Tema: Sistemas lineales en el estado propoiedades y control

◁ *Guía de Ejercicios # 19* ▷

1. Considere el sistema definido por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando el control realimentado $u = -Kx$, se desea tener los polos del lazo cerrado en $s = -2 \pm j4$ y $s = -10$. Determine la matriz de ganancia K.

Solución

Primero debemos revisar la matriz de controlabilidad del sistema, esto es:

$$C = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

Se comprueba que $|C| = -1$ y que el rango de C es 3, por lo tanto el sistema es controlable.
Para encontrar la matriz de ganancia usaremos 2 métodos equivalentes.

- **Método 1:**
  Calculamos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix} &= s^3 + 6s^2 + 5s + 1 \\ s^3 + 6s^2 + 5s + 1 &= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \\ &\rightarrow a_1 = 6, a_2 = 5, a_3 = 1 \end{aligned}$$

  La ecuaciń característica deseada es:

$$\begin{aligned} (s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) &= s^3 + 14s^2 + 60s + 200 \\ &\rightarrow \alpha_1 = 14, \alpha_2 = 60, \alpha_3 = 200 \end{aligned}$$

  Entonces tenemos:

$$K = [\alpha_3 - a_3 : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1]T^-1$$

  En este caso $T = I$ pues la ecuación de estado está en la forma canónica controlable, luego:

$$K = [200 - 1 : 60 - 5 : 14 - 6] = [199 : 55 : 8]$$

- **Método 2:**
  Se define la matriz de ganancia como:

$$K = [k_1 : k_2 : k_3]$$

Ahora debemos igualar la expresión $|sI - A + BK|$ con ecuación característica deseada, esto es:

$$\begin{aligned}
|sI - A + BK| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 : k_2 : k_2] \right| \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k_1 & 5+k_2 & s+6+k_3 \end{vmatrix} \\
&= s^3 + (6+k_3)s^2 + (5+k_2)s + 1 + k_1 \\
&= s^3 + 14s^2 + 60s + 1 + 200
\end{aligned}$$

Luego:

$$6 + k_3 = 14, 5 + k_2 = 60, 1 + k_1 = 200$$

Por lo tanto:

$$K = [199 : 55 : 8]$$

2. Determine una combinación posible de valores para x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 que hacen que los sistemas S_1 y S_2 representados por las ecuaciones de estado sean equivalentes (correspondan al mismo sistema dinámico). Además, encuentre los valores propios de las matrices A_1 y A_2.

$$S_1: \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & x_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} D_1 = 0$$

$$S_2: \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & x_1 & 0 \\ -1 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} C_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_7 & x_8 \end{bmatrix} D_2 = 0$$

Solución

Lo más fÃ¡cil es calcular la ecuación característica $q(s)$ y hacer que las raíces sean iguales a los valores propios. La ecuación característica es inmediata a partir de la controlable, por ejemplo:

$$s^3 + 2s^2 + s = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = s(s+1)^2 = 0$$

Para que ambos sistemas sean equivalentes, es necesario que la ecuación característica de ambos sean iguales, tal que posean los mismos polos. La ecuación característica está dada por: $A - \lambda I$. Para el primer sistema, la ecuacińn característica es:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - x_1\lambda = 0$$

Mientras que para el segundo:

$$\lambda^3 + (2 - x_2)\lambda^2 - (2x_2 + 2x_4 - 1)\lambda - 2x_4 - x_3 = 0$$

Dado que todos los coeficientes deben ser iguales, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= -2x_1 - 2 \\ x_4 &= x_1 + 1 \end{aligned}$$

Donde x_1 puede tomar cualquier valor.
Si $x_1 = 1$, entonces $x_2 = 0$, $x_3 = -4$ y $x_4 = 2$.
Por otro lado, si $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$ y $x_8 = 1$ (es decir, $B_1 = B_2 = B$ y $C_1 = C_2 = C =$), la salida de las plantas son:

$$Y_1 = C[sI - A_1]^{-1}B = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s^2 - s}$$
$$Y_2 = C[sI - A_2]^{-1}B = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s^2 - s}$$

Ambas son iguales, por lo tanto las ecuaciones de estado son equivalentes.
Los valores propios de la matriz A_1 y A_2 son (tienen igual ecuación característica):

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - x_1\lambda = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_{2,3} & = -1 \pm \sqrt{1 + x_1} \end{cases}$$

3. (a) Obtener la matriz de transicioń de estado y su inversa del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(b) Obtener la respuesta en el tiempo del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Solución

(a) Para el sistema se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la matriz transición de estado está dada por:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{\cdot 1}\}$$

Entonces resolviendo ordenadamente:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

Luego para calcular la transformada inversa de Laplace, se usan las siguientes relaciones:

$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}[e^{-at} - e^{-bt}]$
$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$:	$\frac{1}{(b-a)}[(\alpha - a)e^{-at} - (\alpha - b)e^{-bt}]$

A continuación:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} \\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{(s+1)(s+2)}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right\} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Para calcular la inversa, en este caso podemos notar que $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, por lo tanto:

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(b) Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz transición de estado es la misma de la parte a), luego la respuesta a un escalón unitario es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Finalmente si asumimos que las condiciones iniciales son nulas, se obtiene que la respuesta al escalón es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4. Empleando el siguiente modelo simplificado del movimiento de un avión, el cual solo considera la dinámica longitudinal y vertical simplificadas dadas por las siguientes ecuaciones:

   Dinámica Vertical

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= L - B_z\dot{z} - mg \\ L &= K_L(1+\sin(\theta))\dot{x} \end{aligned}$$

   donde
   - $(z, \dot{z}, \ddot{z})$ posición, velocidad y aceleración verticales.
   - L: fuerza de sustentación (*lift*).
   - θ: ángulo de los alerones.
   - $\dot{x}$: velocidad longitudinal.
   - K_L: constante de la fuerza de sustentación.
   - B_z: constante de roce dinámico en la direcci'on vertical.

   Dinámica Longitudinal

$$m\ddot{x} = T - B_x\dot{x} - K_D(1-\cos(\theta))\dot{x}$$

   donde
   - $(x, \dot{x}, \ddot{x})$ posición, velocidad y aceleración logitudinales.
   - T: fuerza de empuje (*thrust*).
   - θ: ángulo de los alerones.
   - K_D: constante de la fuerza de arrastre debido al ángulo de los alerones.
   - B_x: constante de roce dinámico en la direcci'on longitudinal.

   (a) Obtenga un modelo lineal en el estado para la dinámica del avión considerando como comandos de entrada la fuerza de empuje T y el ángulo de los alerones θ ajustables por el piloto.

   (b) Indique si el sistema es controlable con respecto a T solamente.

   (c) Indique si el sistema es controlable con respecto a θ solamente.

   (d) Indique si el sistema es controlable con respecto a T y θ.

   (e) Indique si el sistema es observable midiendo solamente x.

   (f) Indique si el sistema es observable midiendo solamente z.

   (g) Indique si el sistema es observable midiendo x y z.

   (h) Asumiendo T fijo, obtenga la función de transferencia del sistema correspondiente a la altitud de vuelo z ante cambios en el ángulo de los alerones θ.

   (i) Obtenga la forma canónica controlable del sistema.

   (j) Obtenga la forma canónica observable del sistema.

   (k) Obtenga la forma canónica modal del sistema.

Solución

   (a) Definiendo el vector de estado según:

$$\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{1}$$

y el vector de control según:

$$\mathbf{u} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

las ecuaciones dinámicas en las variables de estado pueden escribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u_1 - \frac{B_x}{m}x_2 - \frac{K_D}{m}x_2 + \frac{K_D}{m}x_2\cos(u_2)) \\ x_4 \\ \frac{K_L}{m}x_2 + \frac{K_L}{m}x_2\sin(u_2) - \frac{B_z}{m}x_4 - g \end{bmatrix} = f(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{3}$$

Mientras que las ecuaciones de salida consideran la mediciónes básicas de velocidad (comunmente empleando tubos de Pitot) y del altímetro (a partir de la medición de presión corregida por temperatura). De esta manera las ecuaciones de salida estarían dadas por:

$$\mathbf{y} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{4}$$

Para obtener el modelo lineal en el estado es necesario primero definir el punto de operación entorno al cual se realizará la linealización. Cabe notar que la fuerza de sustentación L es cero si la velocidad longitudinal $x_2 = \dot{x}$ es cero, por lo tanto esto confirma que si el avión debe mantenerse en el aire, el punto de operación debe ser dinámico, es decir en regimen permanente algunas de las variables de estado no serán cero, sino constantes o funciones del tiempo. De esta manera, es razonable asumir el siguiente punto de operación:

$$\mathbf{x^e} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_2^e t \\ x_2^e \\ z_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

con entradas de control nominales:

$$\mathbf{u^e} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} T^e \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

En este caso el equilibrio dinámico implica que $\mathbf{x^e}, \mathbf{u^e}$ deben satisfacer:

$$f(\mathbf{x^e},\mathbf{u^e}) = \begin{bmatrix} x_2^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Lo anterior implica que las aceleraciones netas longitudinales y verticales son nuleas, es decir no hay cambios en las velocidades de traslación, ni de ascenso, por lo tanto se mantienen constantes. Así la velocidad de ascenso es cero, y se mantiene la altitud nominal de vuelo de operación z_0, mientras que la velocidad de traslación se mantiene fija en x_2^e, de modo que la posición longitudinal del avión incrementa linealmente en el tiempo en proporción a la velocidad longitudinal nominal x_2^e.
Resolviendo 7 se puede obtener una relación entre el empuje nominal T^e y la velocidad nominal x^e que garanticen el vuelo a una velocidad de desplazamiento y altitud fijas. Específicamente, de 7 se tiene que:

$$\begin{aligned} T^e &= \frac{B_x}{m}x_2^e \\ \frac{K_L}{m}x_2^e &= g \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_2^e &= \frac{mg}{K_L} \\ T^e &= \frac{B_x g}{K_L} \end{aligned}$$

Ahora es posible calcular los Jacobianos que definen las matrices A,B,C y D evaluados en el punto nominal de operación $(\mathbf{x^e}, \mathbf{u^e})$, los cuales están dados por:

$$\begin{aligned} A \overset{def}{=} \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x^e},\mathbf{u^e})} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_x}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_L}{m} & 0 & -\frac{B_z}{m} \end{bmatrix} \\ B \overset{def}{=} \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x^e},\mathbf{u^e})} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \\ C \overset{def}{=} \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x^e},\mathbf{u^e})} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D \overset{def}{=} \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x^e},\mathbf{u^e})} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El modelo lineal estará dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Delta x}} &= A\Delta\mathbf{x} + B\mathbf{\Delta u} \\ \dot{\mathbf{\Delta y}} &= C\Delta\mathbf{x} + D\mathbf{\Delta u} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x^e} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{\Delta x} \overset{def}{=} \mathbf{x} - \mathbf{x^e}$, $\mathbf{\Delta u} \overset{def}{=} \mathbf{u} - \mathbf{u^e}$ y $\mathbf{\Delta y} \overset{def}{=} \mathbf{y} - \mathbf{y^e}$.

(b) Para calcular la controlabilidad con respecto a la primera variable manipulada, la fuerza de empuje T, se calcula la matriz de controlabilidad empleando solo la primera columna de B, según:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & A^3B_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{B_x}{m} & \frac{B_x^2}{m^2} \\ 1 & -\frac{B_x}{m} & \frac{B_x^2}{m^2} & -\frac{B_x^3}{m^3} \\ 0 & 0 & \frac{K_L}{m} & -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} \\ 0 & \frac{K_L}{m} & -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} & \frac{K_L}{m}\frac{B_x^2}{m^2} + \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} + \frac{B_z^2}{m^2}\frac{K_L}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando,

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{C}) &= -\begin{vmatrix} 1 & -\frac{B_x}{m} & \frac{B_x^2}{m^2} \\ 0 & \frac{K_L}{m} & -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} \\ \frac{K_L}{m} & -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} & \frac{K_L}{m}\frac{B_x^2}{m^2} + \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} + \frac{B_z^2}{m^2}\frac{K_L}{m} \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} \frac{K_L}{m} & -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} \\ -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} & \frac{K_L}{m}\frac{B_x^2}{m^2} + \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} + \frac{B_z^2}{m^2}\frac{K_L}{m} \end{vmatrix} - \frac{K_L}{m}\begin{vmatrix} -\frac{B_x}{m} & \frac{B_x^2}{m^2} \\ \frac{K_L}{m} & -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{K_L^2}{m^2}\left(\frac{B_x^2}{m^2} + \frac{B_z}{m}\frac{B_x}{m} + \frac{B_z^2}{m^2}\right) + \frac{K_L}{m}^2\left(\frac{B_x}{m} + \frac{B_z}{m}\right)^2 - \frac{K_L^2}{m^2}\frac{B_x}{m}\left(\frac{B_x}{m} + \frac{B_z}{m}\right) + \frac{K_L^2}{m^2}\frac{B_x^2}{m^2} \\ &= -\frac{K_L^2}{m^2}\left(\frac{B_x^2}{m^2}\right) + \frac{K_L^2}{m^2}\frac{B_x^2}{m^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el estado del sistema no puede controlarse usando solo la fuerza de empuje como variable manipulada!

(c) Para calcular la controlabilidad con respecto a la segunda variable manipulada, el ángulo de los alerones θ, se calcula la matriz de controlabilidad empleando solo la segunda columna de B, según:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \begin{bmatrix} B_2 & AB_2 & A^2B_2 & A^3B_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & -g\frac{B_z}{m} & g\frac{B_z^2}{m^2} \\ g & -g\frac{B_z}{m} & g\frac{B_z^2}{m^2} & -g\frac{B_z^3}{m^3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En esta caso, es evidente que

$$\det(\mathcal{C}) = 0$$

Luego, se concluye que el estado del sistema tampoco puede ser controlado manipulando solamente la posición de los alerones θ.

(d) Para calcular la controlabilidad con respecto a ambas variables manipuladas, se calcula la matriz de controlabilidad empleando la matriz B, según:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad anterior corresponde a utilizar las columnas de las matrices de controlabilidad obtenidas anteriormente.

Sea

$$\begin{aligned}\mathcal{C}' &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{B_x}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & g & \frac{K_L}{m} & -g\frac{B_z}{m} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En este caso, basta notar que

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{C}') &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ g & \frac{K_L}{m} & -g\frac{B_z}{m} \end{vmatrix} \\ &= -g\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{vmatrix} \qquad (8) \\ &= -g^2 \neq 0 \qquad (9)\end{aligned}$$

Luego, se concluye que las cuatro primeras columnas de $\mathcal{C}$ (contenidas en $\mathcal{C}'$) definen una matriz de 4×4 invertible, y por consiguiente de rango máximo. Resulta evidente que el rango de $\mathcal{C}$ empleando las 8 columnas debe cumplir $\text{rango}(\mathcal{C}) = \text{rango}(\mathcal{C}') = 4$. De este modo, se confirma que empleando ambas variables manipuladas es posible controlar el estado completo del sistema, es decir las posiciones y velocidades del avión.

(e) Para calcular la observabilidad del estado con respecto a la medición de la velocidad solamente, se

construye la matriz de observabilidad empleando solo la primera fila de C, según:

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A \\ C_1A^2 \\ C_1A^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_x}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_x^2}{m^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_x^3}{m^3} & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Resulta evidente que $\det(\mathcal{O}) = 0$, por lo tanto el estado del sistema no se puede inferir midiendo solamente la velocidad de traslación del avión.

(f) Para calcular la observabilidad del estado con respecto a la medición de la altitud solamente, se construye la matriz de observabilidad empleando solo la segunda fila de C, según:

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2A \\ C_2A^2 \\ C_2A^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_L}{m} & 0 & -\frac{B_z}{m} \\ 0 & -\frac{K_L}{m}\frac{B_x}{m} - \frac{B_z}{m}\frac{K_L}{m} & 0 & \frac{B_z^2}{m^2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Nuevamente $\det(\mathcal{O}) = 0$, por lo tanto el estado del sistema no se puede inferir midiendo solamente la altura de vuelo del avión.

(g) Para calcular la observabilidad del estado con respecto a la medición de tanto la velocidad de traslación como la altitud de vuelo, se construye la matriz de observabilidad empleando ambas filas de la matriz$C$, según:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

Lo anterior corresponde a utilizar la filas de las matrices de observabilidad calculadas los dos puntos anteriores. Sin embargo, inspeccionando las matrices obtenidas anteriormente, es fácil concluir que el estado del sistema tampoco será observable midiendo las variables de estado x_2 y x_3, ya que la primera columna de la matriz estará llena de ceros. Se conlcuye que la unica manera de que el estado sea observable es que se mida al menos la posición x_1 y la altitud x_3.

(h) Si $T = T^e$, luego $\Delta\mathbf{u}_1 = 0$, luego podemos tratar el sistema como un sistema de una sola entrada. En este caso, la función de transferencia de la altitud con respecto a u_2 estará dada por:

$$G(s) = c_2(sI - A)^{-1}b_2 + d_{22} \tag{10}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{B_x}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & -\frac{K_L}{m} & 0 & s + \frac{B_z}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \tag{11}$$

Realizaremos el calculo de la inversa de $(sI - A)$ empleando técnica de reducción de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s+\frac{B_x}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & -\frac{K_L}{m} & 0 & s+\frac{B_z}{m} \end{array}\right| \left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & -\frac{K_L}{m} & 0 & s+\frac{B_z}{m} \end{array}\right| \left.\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+\frac{B_z}{m} \end{array}\right| \left.\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{K_L}{m}}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{K_L}{m}}{s+\frac{B_x}{m}} & \frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} & \frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{K_L}{m}}{s+\frac{B_x}{m}} & \frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} & \frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} \\ 0 & \frac{\frac{K_L}{m}}{s+\frac{B_x}{m}} & \frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} & \frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{cccc} \frac{1}{s} & \frac{1}{s}\frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{B_x}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s}\frac{\frac{K_L}{m}}{s+\frac{B_x}{m}}\frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s}\frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} \\ 0 & \frac{\frac{K_L}{m}}{s+\frac{B_x}{m}}\frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} & 0 & \frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} \end{array}\right]$$

Luego,

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g\frac{1}{s}\frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} \\ g\frac{1}{s+\frac{B_z}{m}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{g}{s\left(s+\frac{B_z}{m}\right)} \\ &= \frac{g}{s^2+\frac{B_z}{m}s} \end{aligned}$$

(i) La forma canónica controlable se puede construir facilmente a partir de los coeficientes de la función

de transferencia obtenida en el punto anterior (ver apuntes de clase). Las matrices resultantes son:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{B_z}{m} & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} g & 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(j) De manera similar, la forma canónica observable se puede construir a partir de los coeficientes de la función de transferencia (ver apuntes de clase) obtenida en el punto (h). Las matrices resultantes son:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{B_z}{m} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(k) Para construir la forma canónica modal, es necesario encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz A. Los eigenvalores son las raices de la ecuación característica:

$$\begin{aligned} s_2 &= 0 \\ s_2 &= -\frac{B_z}{m} \end{aligned}$$

Para encontrar los eigenvectores deben resolverse:

$$(sI - A)|_{s=s_i} p = 0, \quad i = 1, 2$$

donde p es un vector de 2×1. Luego,

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s + \frac{B_z}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = 0$$

Resulta en los siguientes eigenvectores normalizados:

$$\begin{aligned} p_{s_1} &= [\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{B_z^2}}} \quad \frac{\frac{m}{B_z}}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{B_z^2}}}]^T \\ p_{s_2} &= [0 \; 1]^T \end{aligned}$$

Luego la matriz de transformación de estado estará dada por:

$$\begin{aligned} T = P^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{B_z^2}}} & 0 \\ \frac{\frac{m}{B_z}}{\sqrt{1+\frac{m^2}{B_z^2}}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \sqrt{1 + \frac{m^2}{B_z^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\frac{m}{B_z}}{\sqrt{1+\frac{m^2}{B_z^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{B_z^2}}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A_d &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_z}{m} \end{bmatrix} \\ B_d &= P^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \\ C_d &= CP \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{m}{B_z}}{\sqrt{1+\frac{m^2}{B_z^2}}} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Establezca condiciones de controlabilidad y observabilidad para el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{12}x_2\\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ \dot{x}_3 &= a_{33}x_3 + b_3u\\ y &= c_1x_1\end{aligned}$$

Luego teniendo en cuenta que $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{23}?1$, $b_3 = -1$ y $c_1 = 2$, Â¿Es estable el sistema?

Solución
Se tiene que:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}\\ B &= \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ b_3\end{bmatrix}\\ C &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ D &= 0\end{aligned}$$

Nota: Ver definición SISTEMA CONTROLABLE
- La matriz de controlabilidad viene dada por:

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B\end{bmatrix},$$

Si el rango de C o det—C— es distinto de 0, el sistema es controlable.
Luego

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 0 & 0\end{bmatrix}\\ A^2 &= \begin{bmatrix} a_{12}*a_{21} & a_{12}*a_{22} & a_{12}*a_{23}\\ a_{21}*a_{22}+a_{23}*a_{31} & a_{22}^2+a_{12}*a_{21} & a_{22}*a_{23}\\ 0 & a_{12}*a_{31} & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Luego

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{12}*a_{23}*b_3\\ 0 & a_{23}b_3 & (a_{33}*a_{23}+a_{22})*b_3\\ b_3 & a_{33}*b_3 & a_{33}^2b_3\end{bmatrix}$$

Directamente por la dioagonal se puede ver que $a_{12} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $b_3 \neq 0$

$$|C| = a_{12} * a_{23}^2 * b_3^3$$

Igualmente para el determinante
Nota: Ver definición SISTEMA OBSERVABLE

-La matriz de observabilidad viene dada por:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si el rango de O o det—O— es distinto de 0, entonces el sistema es observable.
Luego para que sea observable.

$$O = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 a_{12} & 0 \\ a_{12} * a_{21} * c_1 & a_{12} * a_{22} * c_1 & a_{12} * a_{23}[c_1] \end{bmatrix}$$

Luego:

$$|O| = a_{12}^2 * a_{23} * c_1^3$$

De lo que se agrega sólo la condición $c_1 \neq 0$. Luego finalmente se tiene que basta con: $a_{12} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $b_3 \neq 0$ y $c_1 \neq 0$ y el resto no importa.

Por último se tiene que la ecuación característica viene dada por:

$$q(s) = |s * | - A|$$

Se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$q(s) = |$$

de lo que se tiene que

$$s_i = 1, \sqrt{2,2j}$$

6. Considere un sistema en variables de estado de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix}, D = 0$$

Verifique que el sistema es estable es observable y controlable. Si es así diseñe un sistema de control con realimentación del vector de estado completo, posicionando los polos del sistema realimentado en $s_{1,2} = -1 \pm j$ (Determinar K para posicionarlo en esos polos). **Solución**
Primero analizamos observabilidad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, CA = \begin{bmatrix} 26 & 52 \end{bmatrix}$$
$$O = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 26 & 52 \end{bmatrix}$$
$$|O| = 416 \neq 0$$

Controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$
$$|C| = -38 \neq 0$$

Es decir, es controlable y observable, ahora hay que relocalizar los polos $s_{1,2} = -1 \pm j$ para esto se tiene que $u = -kx$
Luego

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$\dot{x} = Ax + BKx$$
$$\dot{x} = (A - BK)x$$

Luego la ecuación característica queda como

$$|s* | - (A - B * K)|$$

con

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Luego se tiene la ecuación característica $(s+1-j)(s+1+j) = s^2+2*s+2$ que es lo que se trata de imitar

$$s* | - (A - B * K) = \begin{bmatrix} -4 * k_1 + s - 1 & -4 * k_2 - 2 \\ k_1 + 5 & k_2 + s + 10 \end{bmatrix}$$

Luego se calcula $|s* | - (A - B * K)| = s^2 + (9 - 8 * k_1 + 2 * k_2)s + (6 * k_2 - 24 * k_1)$

$$9 - 4 * k_1 + k_2 = 2$$
$$-38 * k_1 + 19 * k_2 = 2$$

Despejando se obtiene

$$k_1 = 3.55, k_2 = 7.2$$

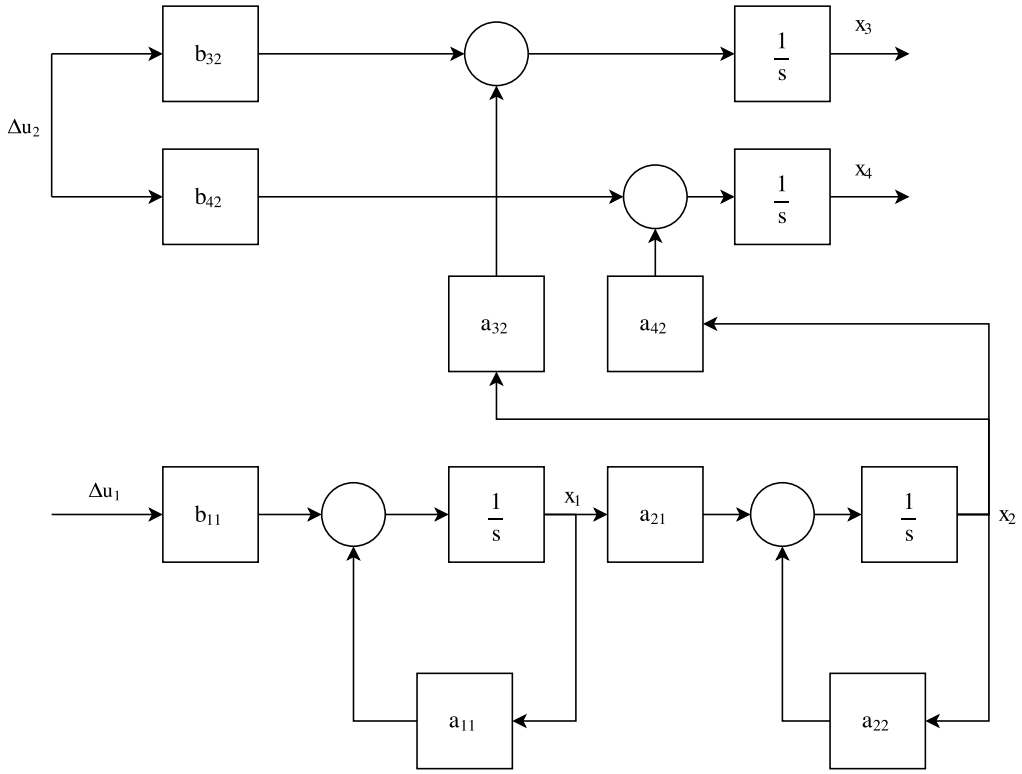


Figura 1: Diagrama del sistema

7. **(a)** Es posible solo mirando el diagrama saber si el sistema es controlable solo por Δu_1? Â¿Y por Δu_2?

Si miramos el diagrama podemos ver que existe un camino entre Δu_1 y todas las variables de estado (x_1, x_2, x_3 y x_4). Sin embargo, si observamos bien el diagrama tanto x_3 como x_4 provinen de un integrador cuyos inputs son bastante parecidos entre sí, por lo que se debe sospechar acerca de la existencia de una redundancia en las variables, por lo que el sistema no serÃa controlable solamente con Δu_1.

Con Δu_2 es sencillo darse cuenta que ni siquiera existe un camino entre esta y las variables de estado x_1 y x_2, por lo que por definición el sistema no debería ser controlable solo usando esta variable.

(b) Usando el criterio algebraico de controlabilidad argumente si el sistema es o no controlable por Δu_1, Δu_1 y finalmente por ambas variables juntas.

Del diagrama podemos deducir las matrices A y B, que son las que necesitamos para realizar el test de controlabilidad:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{32} \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix}$$

Si queremos ver la controlabilidad solamente utilizando Δu_1, debemos tomar la columna de la

matriz B correspondiente:

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}_1$ es: [1]

$$\mathcal{C}_1 = [B_1 \ AB_1 \ A^2B_1 \ A^3B_1] = b_{11} \begin{bmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^2 & a_{11}^3 \\ 0 & a_{21} & a_{21}(a_{11}+a_{22}) & a_{21}[a_{11}^2 + a_{22}(a_{11}+a_{22})] \\ 0 & 0 & a_{21}a_{32} & a_{32}a_{21}(a_{11}+a_{22}) \\ 0 & 0 & a_{21}a_{42} & a_{42}a_{21}(a_{11}+a_{22}) \end{bmatrix}$$

Notamos que la sub-matriz superior izquierda de $3x3$ es triangular y por lo tanto su determinante no es nulo, siempre y cuando a_{21} no sea cero, por lo que podemos afirmar que el rango de $\mathcal{C}_1$ es al menos 3. Finalmente si analizamos el determinante de la sub-matriz inferior derecha de $2x2$ veremos que su determinante es cero, por lo que el rango de $\mathcal{C}_1$ es menor a 4, con loq ue concluímos que no es posible controlar el sistema usando exclusivamente Δu_1.

Se deja propuesto el desarrollo para Δu_2.

Podemos adelantar que la matriz de controlabilidad para Δu_2 es:

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{32} & 0 & 0 & 0 \\ b_{42} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente la matriz de controlabilidad del sistema completo será una matriz de $4x8$ cuyas columnas son las columnas de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ entrelazadas. El sistema será controlable si es que tiene al menos 4 columnas linealmente independientes. Por simplicidad tomamos las primeras 3 columnas de $\mathcal{C}_1$ y la primera de $\mathcal{C}_2$, y calculamos su determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{11}a_{11} & b_{11}a_{11}^2 & 0 \\ 0 & b_{11}a_{21} & b_{11}a_{21}(a_{11}+a_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & b_{11}a_{21}a_{32} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{11}a_{21}a_{42} & b_{42} \end{vmatrix} = b_{11}^3 a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & b_{32} \\ a_{42} & b_{42} \end{vmatrix}$$

como podemos ver, a no ser que se den ciertos valores de los parámetros el determinante en general es no nulo, lo cual asegura rango máximo, y por lo tanto que el sistema es controlable utilizando ambas variables.

Para terminar cabe destacar que estos métodos algebraicos de controlabilidad y observabilidad solamente son válidos para sistemas LTI.

[1] El orden del sistema es 4, por lo que $k = 4 - 1$, donde k es el exponente más alto de la matriz A en la fórmula de la matriz de controlabilidad.

8. **Relocalización Polos en el Espacio de Estados**

(a) Considerando el siguiente sistema, determinar la matriz de ganancia G que posiciona los polos en $s_{1,2} = -1 \pm j$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como vimos en la discusión siempre es sano verificar la controlabilidad y la observabilidad del sistema. Ya que de esto depende que la relocalización de polos se pueda llevar a cabo.

La matriz de observabilidad queda definida simplemente por por C y CA

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 26 & 52 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es 416, por lo que podemos asegurar que tiene rango completo y por lo tanto que el sistema es observable. Por otro lado la matriz de controlabilidad queda definida por B y AB

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es -38, por lo que el sistema es también controlable.

Ahora es momento de relocalizar los polos, para lo cual tomamos la ecuación característica utilizando $\dot{x} = (A - BG)x$, por lo que la ecuación queda

$$| sI - (A - BG) | \text{ , con } G = [g_1 \ g_2]^T$$

y obtenemos $s^2 + (9 - 8g_1 + 2g_2)s + (6g_2 - 24g_1)$.

Recordemos que lo que queremos es que este polinomio factorice como

$$(s + (1 - j))(s + (1 + j)) = s^2 + 2s + 2$$

por lo que solo basta con plantear las siguientes ecuaciones

$$9 - 4g_1 + g_2 = 2$$

$$-38g_1 + 19g_2 = 2$$

lo que implica valores de g_1 y g_2 iguales a 3.55 y 7.2, respectivamente.

Anexo: Repaso de conceptos fundamentales

Sistema Controlable

El sistema (A, B) es controlable si existe una señal de control $u(t)$ continua por partes que dirija el estado del sistema desde cualquier estado inicial x_0 a cualquier estado final deseado x_f en un intervalo de tiempo finito. - La matriz de controlabilidad viene dada por:

$$C = [\ B \quad AB \quad A^2B \dots A^{n-1}B\ ],$$

Si el rango de C o det—C— es distinto de 0, el sistema es controlable.

Sistema Observable

El sistema (A, C) es observable si, para cualquier estado inicial x_0, existe un tiempo finito tau tal que x_0 puede determinarse en forma única a partir de la señal de control $u(t)$ y la salida del sistema $y(t)$ para $0 - t - tau$. -La matriz de observabilidad viene dada por:

$$O \quad = \quad \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si el rango de O o det—O— es distinto de 0, entonces el sistema es observable.

Controlabilidad y Observabilidad

Para toda la materia referente a la modelación y control en el espacio de estados, recomiendo utilizar el libro *Friedland, B. (2012). Control system design: an introduction to state-space methods. Courier Corporation*.

- Un sistema es controlable si existe una señal de control $u(t)$ continua por partes que sea capaz de dirigir el estado del sistema partiendo de un estado inicial arbitrario x_0 hasta llevarlo a un estado final deseado x_f en un intervalo de tiempo finito.
- Un sistema es observable si, para cualquier estado inicial x_0, existe un tiempo finito τ tal que x_0 pueda determinarse en forma única a partir de la señal de control $u(t)$ y la salida del sistema $y(t)$ para $t \in [0, \tau]$.

Un ejemplo inicial: (1/2)

Fue Rudolf Kalman el que planteó por primera vez los conceptos de Controlabilidad y Observabilidad, cuando intentaba demostrar que un método de cancelación de polos inestables con ceros en el lado derecho del plano estaba destinado al fracaso, incluso si la cancelación era perfecta.

Muchas veces en el análisis el dominio de la frecuencia se asume que las propiedades dinámicas de un sistema están completamente determinadas por la función de transferencia, pero ese no es siempre lo que sucede.

Tomemos como ejemplo el siguiente sistema SISO:

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + u \\ \dot{x_2} &= -2x_1 + 3x_2 - 2u \\ \dot{x_3} &= -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2u \\ \dot{x_4} &= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 - u\end{aligned}$$

$$y = 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

Pregunta: Con las definiciones anteriores es posible solo mirando las ecuaciones ver si el sistema es controlable/observable?

Podemos calcular la función de transferencia como sigue [2]:

$$H(s) = C(sI - A) = \frac{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}{s^4 + 21s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

Por el momento no se vislumbra ningún inconveniente, pero al darnos cuenta que:

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{s+1}$$

Un ejemplo inicial:(2/2)

entonces lo que parecía ser una función de transferencia de orden 4, pasó a ser de primer orden. Para explicar esto podemos realizar una transformación del sistema usando una matriz

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto nos deja con un sistema como el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x_1}} &= -\overline{x_1} + u \\ \dot{\overline{x_2}} &= -2\overline{x_2} \\ \dot{\overline{x_3}} &= -3\overline{x_3} + u \\ \dot{\overline{x_4}} &= -4\overline{x_4} \end{aligned}$$

$$\overline{y} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

de aquí podemos observar que solo dos estados son afectados por la variable manipulada, y que solo dos son visibles a la salida.
Podemos concluir que los sistemas incontrolables y/o inobservables provienen de sistemas que:

- Tienen variables de estado redundantes
- Son físicamente incontrolables
- Tienen demasiada simetría involucrada en su dinámica

Sin importar si el sistema está escrito correctamente, es decir, con el némero adecuado de variables de estado, siempre podemos analizar su controlabilidad y observabilidad usando un criterio algebraico. El método establece el análisis del rango de ciertas matrices $\mathcal{C}$ y $\mathcal{O}$, que llamaremos de controlabilidad y observabilidad respectivamente. Las matrices se definen como sigue:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

Se debe evaluar que el rango de estas matrices, si es máximo se puede asegurar la controlabilidad u observabilidad del sistema. Esto puede realizarse calculando el determinante de la matriz y cerciorarse de que este sea no nulo (todas las columnas serían LI).

Relocalización de Polos en el Espacio de Estados

El método conocido como *pole-placement* es un método simple para mover los polos de los sistemas en el espacio de estados a un lugar arbitrario. Si bien puede sonar ideal, el método solo funciona cuando todas las variables de estados son accesibles para ser medidas y el sistema es controlable. Estas limitaciones provienen de que se busca

$$u = -Gx$$

como se puede observar la variable manipulada, la cual es fijada por nosotros, requiere tener acceso al vector de estados en su totalidad. Cuando esto es posible podemos calcular G para mover los polos del sistema a cualquier lugar deseado. Una vez más cabe destacar que si bien en teoría es posible realizar este desplazamiento, muchas veces en la práctica es imposible debido a las grandes señales de control que se requerirían en ciertos casos, las cuales simplemente terminarían saturando los actuadores sin poder cumplir el objetivo deseado. Como dijimos si reemplazamos el nuevo control en las ecuaciones de estado, tenemos que

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BG)x$$

por lo que debemos encontrar la matriz G que posiciona los polos del sistema en lazo cerrado en los lugares deseados.