Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

# Ayudantía 4

**Respuesta temporal de segundo orden**

13 de Agosto 2024

Ayudante -@uc.cl

---

## Problema 1

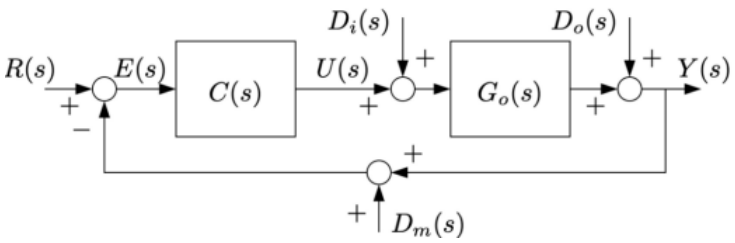



**Figura 1:** Lazo de control nominal

En un lazo de control nominal de 1 grado de libertad [1] se sabe que:

$$T_o(s) = 2\,\frac{s^2 + 0.5s + 0.5}{(s+1)^2}$$

Suponiendo que $r(t) = d_i(t) = d_m(t) = 0$ ¿Cuánto es la amplitud del error estacionario para una perturbación de salida $d_o(t) = 3\cos(t - 0.2\pi)$?

**Solución:**

El error está dado por:

$$e = y - r = y - 0 = y$$

Entonces, interesa estudiar la amplitud de la salida cuando existe la perturbación $d_o(t)$. La función de sensibilidad que relaciona $D_o(s)$ con $Y(s)$ es:

$$S_o(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)C(s)} = 1 - T_o(s) = \frac{-s^2 + s}{(s+1)^2}$$

Por otro lado, recuerde que la respuesta en el estado estacionario de $S_o(s)$ a una sinusoide $A\sin(\omega t)$ es:

$$y_\infty = A|S_o(j\omega)|\sin(\omega t + \phi(\omega))$$

Por ende, la amplitud de $y_\infty$ para $d_o(t) = 3\cos(t - 0.2\pi)$, en donde $\omega = 1$, es:

$$A|S_o(j)| = 3\left|\frac{1+j}{(1+j)^2}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

**Nota**: En este caso, no es posible utilizar herramientas como el teorema del valor final ya que al construir la salida $Y(s)$ en función de $D_o(s)$ (la transformada de $d_o(t)$), el sistema cuenta con polos en el eje imaginario, por lo que la salida es marginalmente estable.

# Pregunta 2

Para una planta nominal $G_o(s) = \frac{10}{s+10}$ se ha diseñado un lazo de control de manera que $T_o(s) = \frac{100}{s+100}$. Estime el rango de frecuencias posibles para una sinusoide de referencia $r(t) = \cos(\omega_r t)$ de manera que en estado estacionario la amplitud de la entrada a la planta sea menor que $\sqrt{10}$.

**Solución:**

El lazo de control se ve como sigue:

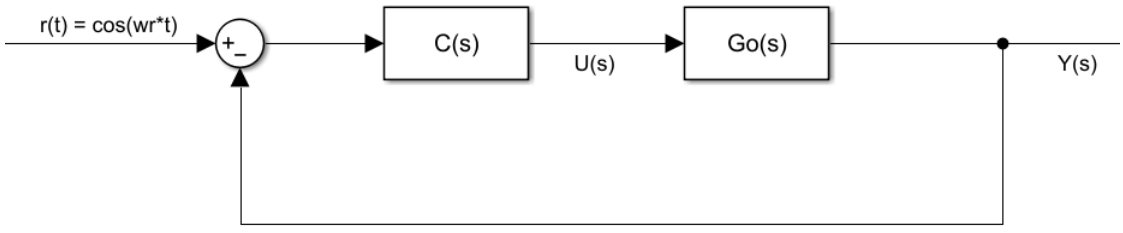



**Figura 2:** Lazo de control

Queremos que $u_\infty < -\sqrt{10}$, dado que la señal de control $u(t)$ es la entrada de la planta. La función de sensibilidad que relaciona $R(s)$ con $U(s)$ es:

$$S_{uo}(s) = \frac{C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{T_o(s)}{G_o(s)}$$
$$= \frac{\frac{100}{s+100}}{\frac{10}{s+10}} = \frac{100(s+10)}{10(s+100)} = \frac{10(s+10)}{s+100}$$
$$|u_\infty| = |S_{uo}(j\omega_r)|$$

En este punto, hay dos formas de resolver, las cuales son las que siguen:

- Utilizar diagrama de Bode:

$$|S_{uo}(j\omega_r)| < \sqrt{10} \iff |S_{uo}(j\omega_r)|_{\text{dB}} < 20\log_{10}\sqrt{10} = 10\text{dB}$$

  El gráfico de Bode queda como sigue:

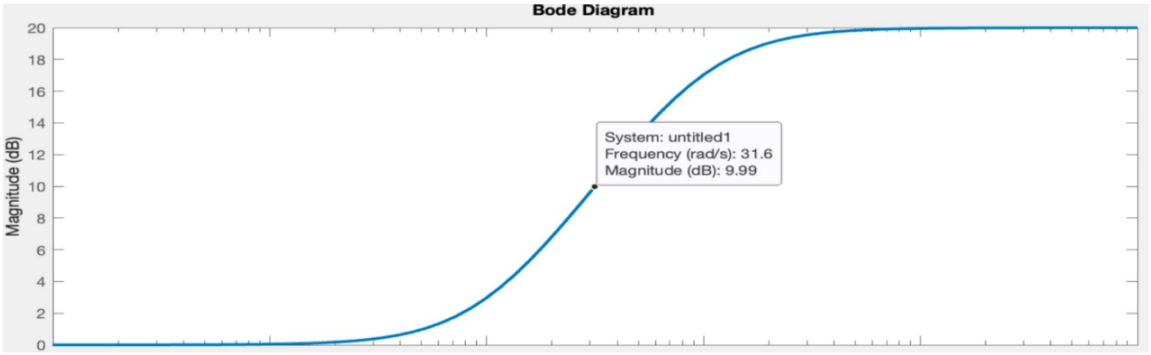



**Figura 3:** Diagrama de Bode

  Del diagrama se observa que $w_r < 10^{1.5} = 10\sqrt{10} \approx 31.6$

- Evaluando directamente la sensibilidad de control

$$|S_{uo}(j\omega_r)| = \frac{10\sqrt{\omega_r^2 + 100}}{\sqrt{\omega_r^2 + 10000}} < \sqrt{10}$$
$$100(\omega_r^2 + 100) < 10(\omega_r^2 + 10000)$$
$$90\omega_r^2 < 90000$$
$$\omega_r < 10\sqrt{10}$$

# Pregunta 3

Del lazo de control estándar presentado en [1], se sabe que:

a) Las perturbaciones de entrada son constantes

b) Existe ruido de medición con frecuencia cercada a $\omega = 8$ rad/s

c) La planta es de fase no mínima y estrictamente propia

d) Existen perturbaciones de salida con componentes en frecuencias $\omega < 2$ rad/s

Proponga una función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$ adecuada en base a la información disponible.

**Solución:**

Cada uno de los requisitos implican lo siguiente:

a) El controlador debe ser tal que:

$$S_{io}(0) = 0 = \frac{T_o(0)}{C(0)}$$

Esto se logra con integración en el controlador, es decir $C(s) = \frac{K}{s}$, de tal forma que $C(0) = \infty$, lo que implica que:

$$T_o(0) = \frac{G_o(s)C(0)}{1 + G_o(0)C(0)} = 1$$

Por lo que así:

$$S_{io}(0) = 0 = \frac{1}{\infty} = 0$$

Con esto, se puede concluir que las acciones integradoras logran el seguimiento perfecto de referencias constantes y a la vez elimina el ruido entrante constante.

Note que para lograr que $S_{io}(s)$ sea 0 no se puede proponer que $T_o(s)$ sea 0 dado que esto implicaría que no se puedan seguir referencias de valores constantes, lo que por lo general es requerido en sistemas de control.

b) Ruido de medición: Recordar que

$$\frac{Y(s)}{D_m(s)} = -\frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = -T_o(s)$$

Idealmente querríamos que $T_o(s) = 0 \ \forall \ s$, pero eso no es posible dado que $T_o(0) = 1$. Esto supone un conflicto de diseño, pero tiene solución. Podemos simplemente imponer una cota en el ancho de banda de $T_o(j\omega)$ como se ilustra:

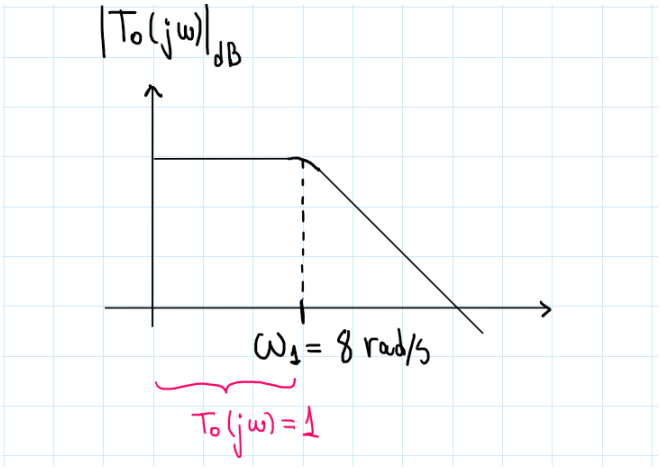



**Figura 4:** Ancho de banda impuesto

O bien se puede forzar que $T_o(j8) \approx 0$

c) Cero de fase no mínima: Si la planta tiene un cero de fase no mínima, este no puede ser cancelado por $C(s)$, ya que esto traería consigo un polo inestable que aparecería en $S_{uo}(s)$. Es decir que si $G_o(s) = (s-c)\tilde{G}_o(s)$ y $C(s) = \frac{\tilde{C}(s)}{s-c}$ , $c > 0$ se tendría:

$$\frac{U(s)}{R(s)} = S_{uo}(s) = \frac{C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{\tilde{C}(s)}{(1 + \tilde{G}_o(s)\tilde{C}(s))(s-c)}$$

Entonces, dado a que no se puede cancelar el cero de fase no mínima de la planta, este va a aparecer en $T_o(s)$:

$$T_o(s) = \frac{(s-c)\tilde{G}_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)}$$

d) Perturbaciones de salida en $\omega < 2$ rad/s

Recordando que:

$$\frac{Y(s)}{D_o(s)} = S_o(s)$$

Esta idealmente es 0, ya que se quiere mitigar al máximo el ruido de salida. En este caso, el ruido de salida tiene una frecuencia no mayor a 2 rad/s, por lo que solo interesa mitigar ese ruido. Es decir:

$$|S_o(j\omega)| \approx 0 \; \forall \; \omega < 2\text{rad/s}$$

Luego, recordando que:

$$S_o(s) + T_o(s) = 1 \rightarrow |T_o(j\omega)| = 1, \quad \forall\, \omega < 2$$

Dado todo lo anterior, basta con proponer un $T_o(s)$ que tenga el cero de fase no mínima de la planta y que tenga un ancho de banda menor a 2 rad/s. **Una** opción que cumple todos los requisitos es:

$$T_o(s) = \frac{(s-c)(\frac{4}{-c})}{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 2s + 4}$$

# Ejercicio propuesto

Siguiendo con el esquema de control 1, el controlador $C(s) = K_p$, donde $K_p > 0$ y el modelo nominal de la planta es $G_o(s) = \frac{1}{s}$. Determine la mpaxima actuación de $|u(t)|$ cuando la perturbación de salida $D_o(s)$ es un escalón unitario (asumiendo que las demás señales de entradas y las condiciones iniciales son cero).