Capítulo 3 – Representación de Sistemas Dinámicos: Modelos Matemáticos en el Dominio de Laplace

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Transformada de Laplace

La representación de fenómenos físicos a través de ecuaciones lineales, permite usar la transformada de Laplace como herramienta de análisis y diseño de controladores.

Dada una señal $f : t \to f(t)$, tal que para $\sigma_1 < \infty$:

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_1 t}dt < \infty$$

La Transformada de Laplace se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Transformada Inversa de Laplace

La Transformada inversa de Laplace* es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_2-j\infty}^{\sigma_2+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

donde $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ es una constante mayor que todas las partes reales de las singularidades de $F(s)$.

La transformada y su inversa existen si se cumple la condición indicada, o equivalentemente, si existe $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ y una constante $0 < k < \infty$, tal que:

$$|f(t)| < ke^{\sigma_2 t}, \quad \forall t \geq 0$$

La región $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_2$ se conoce como región de convergencia de la transformada.

*Formalmente la transformada inversa de Laplace recibe el nombre de Integral de Bromwich o Integral de Fourier-Mellin.

Propiedades de la Transformada de Laplace 1/2

$f(t)$	$F(s)$	Nombre
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$	Linealidad
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Escalamiento en el Tiempo
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0)$	Ley Derivativa
$f^{(n)}(t) \stackrel{def}{=} \frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-$ $s^{n-2}f^{(1)}(0)$ $-\ldots-f^{(n-1)}(0)$	Derivada de Alto Orden
$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau$	Ley Integral
$f(t-T)l(t-T)$	$F(s)e^{-sT}$	Retardo
$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$	Desplazamiento de Frecuencia

Propiedades de la Transformada de Laplace 2/2

$f(t)$	$F(s)$	Nombre
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	Convolución
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(\zeta)G(s-\zeta)d\zeta$	Producto en el Tiempo
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$	Derivada en Frecuencia
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	Derivada en Frecuencia General
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\zeta)d\zeta$	Integral en Frecuencia
$f(t) = f(t+T),\ \forall t$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$	Función Periódica
$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$	$\lim_{s\to 0} sY(s)$	Teorema del Valor Final
$y_0 = \lim_{t\to 0} y(t)$	$\lim_{s\to\infty} sY(s)$	Teorema del Valor Inicial

Tabla de Transformadas de Laplace 1/3

	Function	Time domain $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	Frequency domain $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	Region of convergence*
1	Ideal delay	$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$	
1a	Dirac delta function (unit impulse)	$\delta(t)$	1	all s
2	Delayed n-th power with frequency shift	$\frac{(t-\tau)^n}{n!}e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$s > 0$
2a	n-th power for integer n	$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$s > 0$
2a.1	q-th power for real q	$\frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{q+1}}$	$s > 0$
2a.2	Heaviside step function (unit step)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2b	Delayed unit step	$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$	$s > 0$
2c	Ramp function	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
2d	n-th power with frequency shift	$\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$s > -\alpha$
2d.1	Exponential decay	$e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$s > -\alpha$
3	Exponential approach	$(1-e^{-\alpha t}) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$s > 0$
4	Sine	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
5	Cosine	$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$

* Region of convergence for causal systems.

Tabla de Transformadas de Laplace 2/3

	Function	Time domain $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	Frequency domain $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	Region of convergence*
6	Hyperbolic sine	$\sinh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$s > \lvert\alpha\rvert$
7	Hyperbolic cosine	$\cosh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$s > \lvert\alpha\rvert$
8	Exponentially-decaying sine wave	$e^{\alpha t}\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$s > \alpha$
9	Exponentially-decaying cosine wave	$e^{\alpha t}\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$s > \alpha$
10	n-th root	$\sqrt[n]{t} \cdot u(t)$	$s^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$s > 0$
11	Natural logarithm	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot u(t)$	$-\frac{t_0}{s}\left[\ \ln(t_0 s) + \gamma\ \right]$	$s > 0$
12	Bessel function of the first kind of order n	$J_n(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega^n\left(s+\sqrt{s^2+\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{s^2+\omega^2}}$	$s > 0\,,\ (n > -1)$
13	Modified Bessel function of the first kind of order n	$I_n(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega^n\left(s+\sqrt{s^2-\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{s^2-\omega^2}}$	$s > \lvert\omega\rvert$
14	Bessel function of the second kind of order 0	$Y_0(\alpha t) \cdot u(t)$	$-\frac{2\sinh^{-1}(s/\alpha)}{\pi\sqrt{s^2+\alpha^2}}$	$s > 0$
15	Modified Bessel function of the second kind of order 0	$K_0(\alpha t) \cdot u(t)$		
16	Error function	$\operatorname{erf}(t) \cdot u(t)$	$\frac{e^{s^2/4}(1-\operatorname{erf}(s/2))}{s}$	$s > 0$

* Region of convergence for causal systems.

Tabla de Transformadas de Laplace 3/3

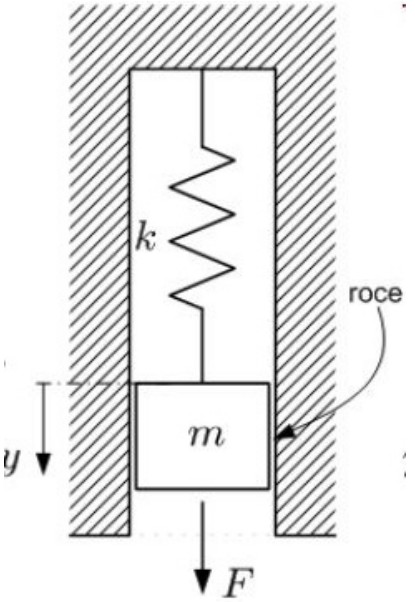
Notes:

- $t \in \mathbb{R}$ represents time or any independent dimension, $s \in \mathbb{C}$ is the complex angular frequency, $\alpha, \beta, \tau, \omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $z \in \mathbb{Z}_+$ or $\Gamma(z) = (z-1)!$, $z \in \mathbb{N}_+$ is the Gamma function.
- $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \log(n) \right] = \int_1^\infty \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right) dx = 0.57721566490153286 06\ldots$ is the Euler-Mascheroni constant.
- $J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n}$ is the Bessel function of the first kind of order n.
- $Y_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin\theta) d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh t} dt$ is the Bessel function of the second kind of order 0.
- $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ is the error function.
- $I_n(x) = j^{-n} J_n(jx)$ is the modified Bessel function of the first kind of order n.
- $K_0(x) = \frac{\pi}{2} j \left(J_0(jx) + Y_0(jx) \right)$ is the modified Bessel function of the second kind of order 0.

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales 1/11

Para el sistema masa-resorte:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = F$$



Aplicando la propiedad de la derivada:

$$\frac{d^ny}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}\frac{dy}{dt}(0) - \ldots \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)$$

La ecuación diferencial en el dominio de Laplace es:

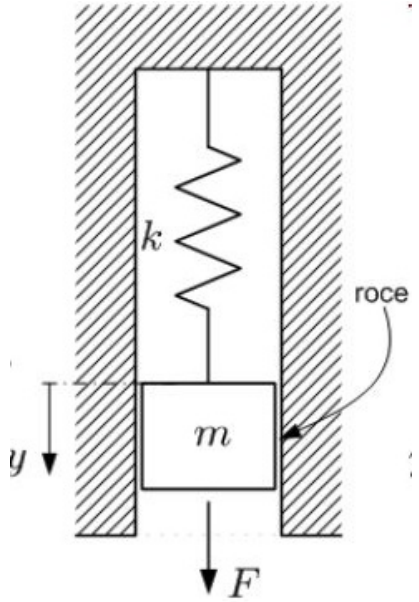
$$m(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + b(sY(s) - y(0)) + kY(s) = F(s)$$

Asumiendo que

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad F = 0,$$

y reagrupando términos se obtiene:

$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = msy_0 + by_0.$$



Despejando:

$$Y(s) = \frac{ms + b}{ms^2 + bs + k} y_0$$

y dividiendo por m el numerador y denominador:

$$Y(s) = \frac{s + b/m}{s^2 + (b/m)s + (k/m)} y_0.$$

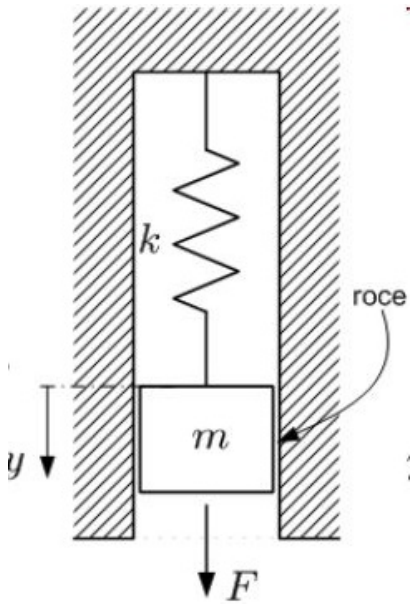
Aplicación a Ecuaciones Diferenciales 3/11

Por ejemplo, si:

$$\frac{b}{m} = 3, \quad \frac{k}{m} = 2$$

se tendrá:

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} y_0$$



Descomponiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \left(\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \right) y_0$$

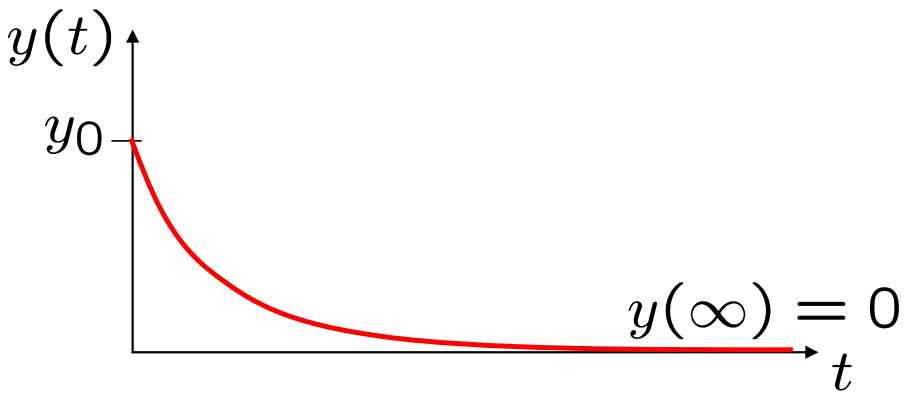
Aplicando la transformada inversa, la respuesta a entrada cero es:

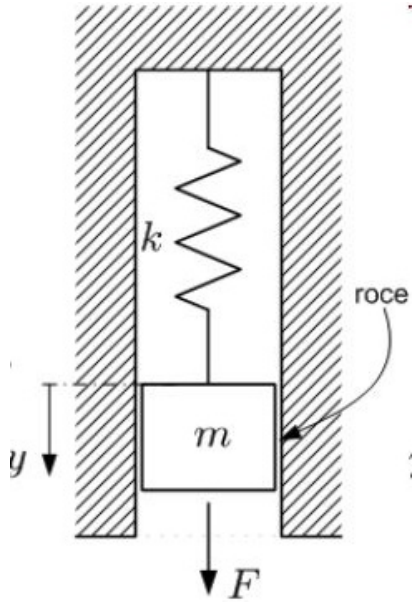
$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t}) y_0$$

Para la condición inicial

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0,$$

gráficamente, la respuesta a entrada cero será:





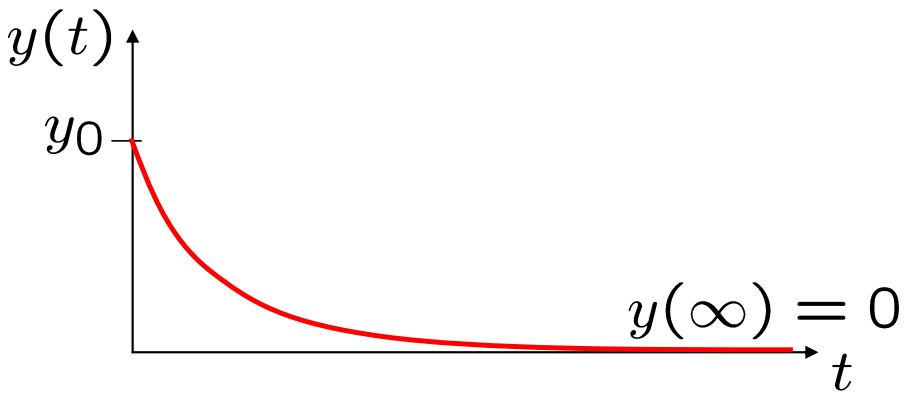
De manera similar es posible encontrar la respuesta a estado cero, esta es la respuesta para:

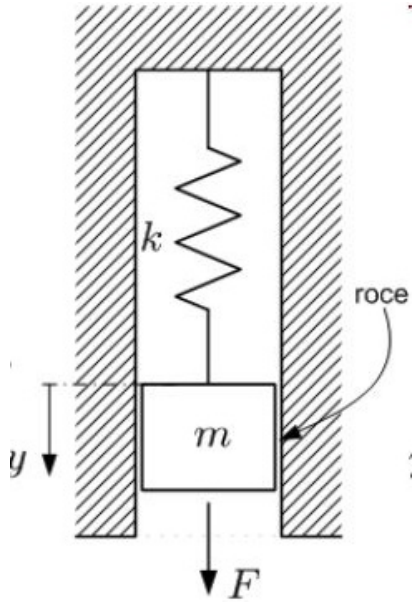
$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad F : t \to F(t)$$

Para la condición inicial

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0,$$

gráficamente, la respuesta a entrada cero será:





De manera similar es posible encontrar la respuesta a estado cero, esta es la respuesta para:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad F : t \to F(t)$$

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Con las condiciones:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad F : t \ \rightarrow \ F(t)$$

La ecuación diferencial en el dominio de Laplace:

$$m\Big(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\Big) + b(sY(s) - y(0)) + kY(s) = F(s)$$

se reduce a

$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = F(s)$$

a partir de la cual:

$$Y(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}F(s)$$

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Por ejemplo si:

$$\frac{b}{m} = 3, \quad \frac{k}{m} = 2, \quad m = 1, \quad F(s) = \frac{F_0}{s}$$

Se tendrá:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{F_0}{s}$$

que por fracciones parciales queda:

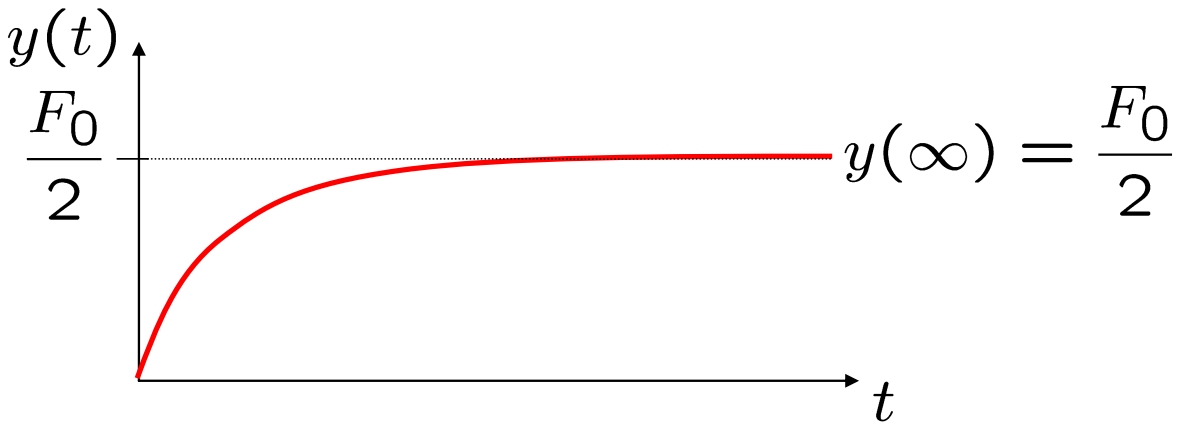
$$\begin{aligned} Y(s) &= \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) \frac{F_0}{s} \\ &= \frac{1}{s+1}\frac{F_0}{s} - \frac{1}{s+2}\frac{F_0}{s} \\ &= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right] \right) F_0 \end{aligned}$$

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Aplicando la transformada inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(1 - e^{-t}\right) F_0 - 0.5 \left(1 - e^{-2t}\right) F_0 \\ &= \left(1 - \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)\right) \frac{F_0}{2} \end{aligned}$$

Gráficamente:



Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

En un caso general con condiciones iniciales y fuerza externa no nulas, por linealidad es posible encontrar la solución como la suma de la respuesta a entrada cero y la respuesta a estado cero:

$$\boxed{y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)}$$

donde,

$y_{zi}(t)$ es la respuesta a entrada cero (zero-input response) o respuesta natural.

$y_{zs}(t)$ es la respuesta a estado cero (zero-state response) o respuesta forzada.

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Comparando la respuesta $y_{zi}(t)$ e $y_{zs}(t)$ del ejemplo:

$$y_{zi}(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right) y_0$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} y_0$$

$$Y(s) = \frac{p_{zi}(s)}{q_{zi}(s)} y_0$$

zi

$$y_{zs}(t) = \left(1 - \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)\right) \frac{F_0}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \frac{F_0}{s}$$

$$Y(s) = \frac{p_{zs}(s)}{q_{zs}(s)} U(s)$$

zs

$y_{zs}(t) \propto y_{zi}(t)$

Ceros y polos

Las raíces de $p_{zs}(s) = 0$ se denominan ceros del sistema.
Las raíces de $q_{zs}(s) = 0$ (o $q_{zi}(s) = 0$) se denominan polos del sistema.

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Siempre se cumple que:

$$q_{zi}(s) = q_{zs}(s)$$

Luego, las raíces de $q(s) \overset{def}{=} q_{zs}(s) = 0$ definen la respuesta característica del sistema.

Polos del sistema

La ecuación

$$q(s) = 0$$

se denomina ecuación característica y sus raíces (polos del sistema) determinan en gran medida la respuesta del sistema y su estabilidad.

Ceros del sistema

Las raíces de $p_{zs}(s) = 0$ se denominan ceros del sistema pues anulan la entrada forzante F_0, y por consiguiente la salida $Y(s)$ es cero. Las raíces de $p_{zs}(s) = 0$ también determinan la respuesta dinámica del sistema, pero no su estabilidad.

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Función de Transferencia

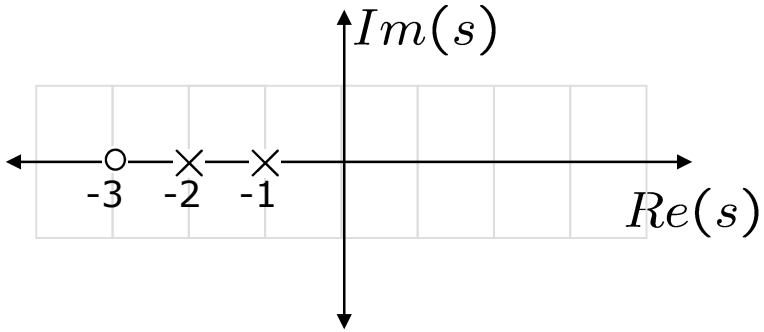
La razón entre la transformada de Laplace de la señal de salida y la de la entrada:

$$F(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{p_{zs}(s)}{q_{zs}(s)}$$

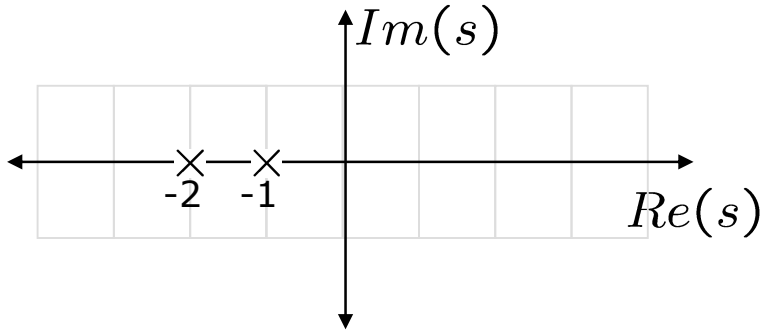
es la llamada función de transferencia del sistema.

La representación gráfica de los polos y ceros en el plano complejo s, para el sistema masa-resorte:

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} y_0$$

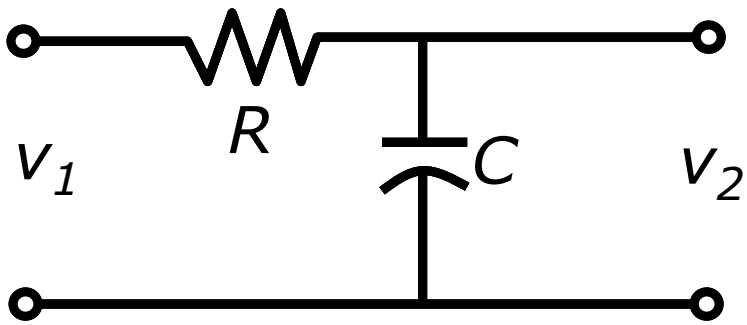


$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



Ejemplo Circuito RC:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_R(t) + v_2(t) \\ v_1(t) &= \underbrace{i_c(t) \cdot R}_{v_R} + \underbrace{\int_0^t i_c(\tau) d\tau}_{v_2} \end{aligned}$$



En el dominio de Laplace: $V_1(s) = I_c(s) \cdot R + I_c(s) \cdot \dfrac{1}{sC}$

Pero además: $V_2(s) = \dfrac{I_c(s)}{sC}$, pues $v_2(t) = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_0^t i_c(\tau) d\tau$

Luego la función de transferencia entrada-salida es:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = F(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

Funciones de transferencia de sistemas lineales

La función de transferencia de un sistema lineal representado por una ecuación diferencial de orden n de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

está dada por:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

donde $p(s)$ y $q(s)$ son el numerador y denominador de $F(s)$, respectivamente. El denominador $q(s)$ también se conoce como ecuación característica de $F(s)$.

Función de Transferencia Propia y Estricatemente Propia

Una función de transferencia propia (proper transfer function) es aquella para la cual se cumple que:

$$\deg(p(s)) = m \ \leq \ \deg(q(s)) = n$$

Se denomina estrictamente propia si:

$$\deg(p(s)) = m \ < \ \deg(q(s)) = n$$

Funciones de Transferencia

Usando la notación $x^{(i)} = d^i x/dt^i$, la ecuación diferencial general puede escribirse en forma compacta como:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i U(s) + c(s, \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0)$$

La respuesta de estado cero (zero-state response):

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} U(s)$$

ya que $c(s, \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) = 0$ para $x_0 = 0$.

Funciones de Transferencia

A partir de ecuación diferencial...

La función de transferencia de un sistema descrito por una ecuación diferencia lineal de parámetros constantes está dada por:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

A partir de la representación en el espacio del estado...

La función de transferencia está dada por:

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Funciones de Transferencia

Se definen lo siguientes términos:

Ceros del sistema

Las raíces de $p(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i = 0$ se denominan ceros del sistema.

Polos del sistema

Las raíces de $q(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0$ se denominan polos del sistema.

Funciones de Transferencia

Grado relativo

La diferencia $m - n$ se conoce como grado relativo entre $p(s)$ y $q(s)$.

Tipos de funciones de transferencia

- $m < n \Rightarrow F(s)$ estrictamente propia (*strictly proper*).
- $m \leq n \Rightarrow F(s)$ propia (*proper*).
- $m = n \Rightarrow F(s)$ bipropia (*biproper*).
- $m > n \Rightarrow F(s)$ impropia (*improper*).

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Aplicando la transformada de Laplace a la representación en el espacio del estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Si se aplica transformada inversa se obtiene:

$$\boxed{x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Aplicando la transformada de Laplace al ecuación de medición o modelo del sensor:

$$y = Cx + Du$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ Y(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) \end{aligned}$$

Similarmente, aplicando transformada inversa:

$$\boxed{y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}$$

Ejemplo 2.1: Vehículo 1/4

2.a. Aplicación de la 2^a Ley de Newton (Eq. Fuerzas)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & f_{empuje} - f_{roce} \\ m\ddot{x} & = & ku - c\dot{x} \end{array}$$

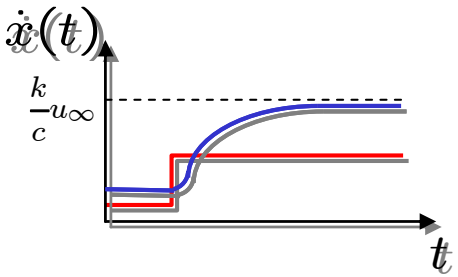
2.b. Condiciones:

$$x(0), \dot{x}(0)$$

Modelo Estático:

Para $t = \infty$, $u(\infty) = u_\infty$ (constante $\neq 0$), en equilibrio $m\ddot{x} = 0$, por lo que las fuerzas de empuje y de roce se equilibran:

$$c\dot{x}_\infty = ku_\infty$$



$$\dot{x}_\infty = \frac{k}{c}u_\infty \longleftarrow$$

Modelo Estático

Modelo en régimen permanente, que relaciona la salida con la entrada.

Ejemplo 2.1: Vehículo - Función de Transferencia 2/4

2.a. Aplicación de la Transformada de Laplace

$$m\ddot{x} = ku - c\dot{x}$$

$$\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) = kU(s) - c(sX(s) - x(0))$$

2.b. Asumiendo condiciones iniciales:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$$

$$s(ms + c)X(s) = kU(s)$$

Función de Transferencia de la Posición $\rightarrow X(s) = \dfrac{k}{s(ms+c)}U(s)$

Función de Transferencia de la Velocidad $\rightarrow \dot{X}(s) = sX(s) = \dfrac{k}{ms+c}U(s)$

Ejemplo 2.1: Vehículo - Función de Transferencia 3/4

3.a. Solución asumiendo que $u(t)$ es un escalón, es decir:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U(s) = \frac{1}{s}$$

luego:

$$\dot{X}(s) = sX(s) = \frac{k}{ms + c}\frac{1}{s}$$

expandiendo mediante fracciones parciales:

$$\dot{X}(s) = \frac{k}{ms + c}\frac{1}{s} = \frac{A}{ms + c} + \frac{B}{s} \tag{1}$$

$$(1) \cdot (m\,s + c)\big|_{s=\frac{-c}{m}} \Rightarrow k\,\frac{1}{s}\bigg|_{s=\frac{-c}{m}} = A + \frac{B(m\,s + c)}{s}\bigg|_{s=\frac{-c}{m}}$$

$$(1) \cdot s\big|_{s=0} \Rightarrow \frac{k}{m\,s + c}\bigg|_{s=0} = \frac{As}{m\,s + c}\bigg|_{s=0} + B$$

Ejemplo 2.1: Vehículo - Función de Transferencia 4/4

se tiene que:

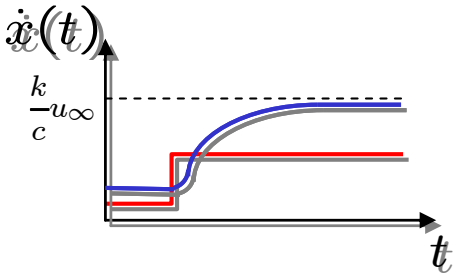
$$A = -\frac{k\,m}{c}, \quad B = \frac{k}{c}.$$

Finalmente

$$\dot{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dot{X}(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{c}\left(\frac{-m}{m\,s+c}+\frac{1}{s}\right)\right)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{k}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right), \qquad \dot{x}(0)=0,\ t\geq 0.$$

El resultado coincide con el modelo estático para $t=\infty$ y $u_\infty = 1$.



$$\dot{x}_\infty = \frac{k}{c}u_\infty \longleftarrow$$

Modelo Estático
Modelo en régimen permanente, que relaciona la salida con la entrada.

Obtención de Modelo en el Espacio del Estado a partir de la Función de Transferencia 1/5

Dada una función de transferencia:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Una manera rápida y simple de obtener el modelo en el espacio de los estados consiste en introducir una señal auxiliar $x(s)$, tal que:

$$Y'(s) = p(s)x(s)$$

$$U'(s) = q(s)x(s)$$

Es fácil verificar que el sistema con función de transferencia $Y'(s)/U'(s)$ es igual, desde el punto de vista del comportamiento dinámico, al sistema con función de transferencia $Y(s)/U(s)$, pues:

$$\frac{Y'(s)}{U'(s)} = \frac{p(s)x(s)}{q(s)x(s)} = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Obtención de Modelo en el Espacio del Estado a partir de la Función de Transferencia 2/5

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_2\frac{d^2}{dt^2}+a_1\frac{d}{dt}+a_0\right)y(t)=\left(b_m\frac{d^m}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}+\cdots+b_2\frac{d^2}{dt^2}+b_1\frac{d}{dt}+b_0\right)u(t)$$

↑ Conviene re-escribir la Ec. Dif. Ordinaria de modo que el coef. de orden n sea 1.

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned}\left(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2s^2+a_1s+a_0\right)Y(s) &= \left(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_2s^2+b_1s+b_0\right)U(s)\\ q(s)Y(s) &= p(s)U(s)\end{aligned}$$

$$\Updownarrow \quad \frac{Y'(s)}{U'(s)}=\frac{p(s)x(s)}{q(s)x(s)}=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\begin{cases}Y(s)=p(s)x(s)\\ U(s)=q(s)x(s)\end{cases}$$

$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\begin{cases}y(t) &= \left(b_m\frac{d^m}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}+\cdots+b_2\frac{d^2}{dt^2}+b_1\frac{d}{dt}+b_0\right)x(t)\\ u(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_2\frac{d^2}{dt^2}+a_1\frac{d}{dt}+a_0\right)x(t)\end{cases}$$

Obtención de Modelo en el Espacio del Estado a partir de la Función de Transferencia 3/5

Definiendo las variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \frac{dx}{dt} \\ x_3 &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

es posible re-escribir el par de ecuaciones

$$\begin{cases} y(t) &= \left(b_m \frac{d^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + b_2\frac{d^2}{dt^2} + b_1\frac{d}{dt} + b_0\right) x(t) \\ u(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2}{dt^2} + a_1\frac{d}{dt} + a_0\right) x(t) \end{cases}$$

como

$$\begin{cases} y(t) &= b_m x_{m+1} + b_{m-1}x_m + \cdots + b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1 \\ u(t) &= \dot{x}_n + a_{n-1}x_n + \cdots + a_2 x_3 + a_1 x_2 + a_0 x_1 \end{cases}$$

Obtención de Modelo en el Espacio del Estado a partir de la Función de Transferencia 4/5

Dado que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned}$$

y

$$\begin{cases} y(t) &= b_m x_{m+1} + b_{m-1} x_m + \cdots + b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1 \\ u(t) &= \dot{x}_n + a_{n-1} x_n + \cdots + a_2 x_3 + a_1 x_2 + a_0 x_1 \end{cases}$$

cuando $m < n$, es posible escribir el sistema en el espacio del estado como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Obtención de Modelo en el Espacio del Estado a partir de la Función de Transferencia 5/5

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix}^T.$$

La representación anterior del sistema en el espacio de los estados recibe el nombre de forma canónica controlable. Como se verá más adelante, este resultado puede adecuarse cuando $m = n$. Por otro lado, existen otras representaciones en el estado para describir la dinámica del mismo sistema.

Resumen conversión TF a SS

1. Dado $F(s) \overset{def}{=} \frac{p(s)}{q(s)}$, introduzca una variable auxiliar $x(s)$ y obtenga:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p(s)x(s)\} \\ u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{q(s)x(s)\} \end{cases} \qquad (\star)$$

2. Defina

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & \frac{dx}{dt} & \cdots & \frac{dx^{n-2}}{dt^{n-2}} & \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T$$

y reemplace en $(\star)$ para obtener el modelo en espacio del estado.

Teorema del Valor Final

TVF

Para sistemas **estables***, es decir para aquellos en que $\lim_{t\to\infty} y(t) < \infty$, o equivalentemente, tales que todos los polos de $sY(s)$ están en el lado izquierdo del plano $\mathbb{C}$, se tiene que:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sF(s)U(s)}$$

* Chequear: 1) Todos los polos de $F(s)$ deben tener parte real negativa, 2) $F(s)$ a lo más puede tener un polo en el origen ($s = 0$).

Teorema del Valor Final

Demostración

Considere:

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt$$

Integrando por partes, con $dv = \frac{dy}{dt}$ y $u = e^{-st}$:

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt = ye^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} ye^{-st} dt \qquad (1)$$

$$= -y(0^-) + sY(s) \qquad (2)$$

Aplicando $\lim_{s\to 0}$ al lado derecho de (1):

$$\lim_{s\to 0} ye^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} ye^{-st} dt = y\Big|_{0^-}^{\infty} = y(\infty) - y(0^-)$$

Pero esto debe ser igual al mismo límite en el lado derecho de (2):

$y(\infty) - y(0^-) = \lim_{t\to\infty} y(t) - \cancel{y(0^-)} = -\cancel{y(0^-)} + \lim_{s\to 0} sY(s)$ ■

Ejemplo 2.1: Vehículo - Teorema del Valor Final

Aplicando el Teorema del Valor Final:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = \lim_{s\to 0} s\dot{X}(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{k}{ms + c} \frac{\bar{u}}{\cancel{s}} = \frac{k}{c}\bar{u}$$

Lo cual corresponde a:

$$\boxed{\dot{x}_\infty = \frac{k}{c} u_\infty}$$

derivado anteriormente empleando el modelo en el dominio del tiempo.

Otro ejemplo - Teorema del Valor Final

Encuentre el valor final en el tiempo de la respuesta al escalón unitario del sistema cuya función de transferencia está dada por:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s-2}$$

Aplicando el Teorema del Valor Final:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{3}{s-2}U(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{3}{s-2}\frac{1}{s} \\ &= \frac{-3}{2}\end{aligned}$$

¿Es correcto el resultado anterior?

a) Si. b) Si pero falta la condición inicial.
c) No. d) Depende de si la condición inicial es cero o no.

Otro ejemplo - Teorema del Valor Final

Atención!

No se puede aplicar el TVF a sistemas inestables!

Obteniendo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\frac{1}{s}\right\}$$
$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}, \quad t \geq 0$$

de donde es fácil ver que:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$$

Luego, el valor final no es acotado!

Ejercicio: Teorema del Valor Final

Ejercicio TVF

Encuentre el valor en régimen permanente de la respuesta al impulso y al escalón unitario del sistema con función de transferencia:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$$

Ejercicio: Teorema del Valor Final

Ejercicio TVF

Encuentre el valor en régimen permanente de la respuesta al impulso y al escalón unitario del sistema con función de transferencia:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$$

Solución: El impulso es $U(s) = 1$ y la respuesta al impulso es $H(s) = F(s)U(s) = F(s)$, luego:

$$h(\infty) = \lim_{s \to 0} sH(s) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s^2 + 9} = 0$$

Ejercicio: Teorema del Valor Final

Ejercicio TVF

Encuentre el valor en régimen permanente de la respuesta al impulso y al escalón unitario del sistema con función de transferencia:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$$

Solución: El impulso es $U(s) = 1$ y la respuesta al impulso es $H(s) = F(s)U(s) = F(s)$, luego:

$$h(\infty) = \lim_{s \to 0} sH(s) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s^2 + 9} = 0$$

El escalón es $U(s) = \frac{1}{s}$ y la respuesta al escalón es $Y(s) = F(s)U(s) = F(s)/s$, luego:

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{F(s)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 + 9} = \frac{1}{9}$$

Ejercicio: Teorema del Valor Final

Ejercicio TVF

Encuentre el valor en régimen permanente de la respuesta al impulso y al escalón unitario del sistema con función de transferencia:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$$

Solución: El impulso es $U(s) = 1$ y la respuesta al impulso es $H(s) = F(s)U(s) = F(s)$, luego:

$$h(\infty) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+9} = \cancel{0} = \frac{1}{3}\sin(3t)$$

El escalón es $U(s) = \frac{1}{s}$ y la respuesta al escalón es $Y(s) = F(s)U(s) = F(s)/s$, luego:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{F(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+9} = \cancel{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t)$$

Teorema del Valor Inicial

TVI

Para cualquier función $y(t)$ (estable o no), se tiene que:

$$\boxed{y(0^+) = \lim_{s \to \infty} sY(s)}$$

Demostración: Teorema del Valor Inicial

Demostración

Considere:

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) = sY(s) - y(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt$$

Re-escribiendo la integral anterior:

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt$$

Aplicando $\lim_{s\to\infty}$ al lado derecho:

$$\lim_{s\to\infty} [sY(s) - y(0^-)] = \lim_{s\to\infty} \left[\int_{0^-}^{0^+} \frac{dy}{dt} e^{0} dt + \cancel{\int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt} \right]$$

pero dado que para $t > 0$, $\lim_{s\to\infty} e^{-st} = 0$:

$$\lim_{s\to\infty} [sY(s)] - \cancel{y(0^-)} = y(0^+) - \cancel{y(0^-)}$$

■

Ejemplo 2.1: Vehículo - Teorema del Valor Inicial

2.a. Aplicación de la Transformada de Laplace:

$$m\ddot{x} = ku - c\dot{x}$$
$$\xrightarrow{\mathcal{L}} m\Big(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\Big) = kU(s) - c\Big(sX(s) - x(0)\Big)$$

2.b. Asumiendo condiciones iniciales:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0 \neq 0$$
$$s(ms + c)X(s) = kU(s) + mv_0$$

Función de transferencia de la posición:

$$X(s) = \frac{k}{s(ms + c)}U(s) + \frac{mv_0}{s(ms + c)}$$

Función de transferencia de la velocidad:

$$\dot{X}(s) = sX(s) = \frac{k}{ms + c}U(s) + \frac{mv_0}{ms + c}$$

Ejemplo 2.1: Vehículo - Teorema del Valor Inicial

Aplicando el TVI:

Posición inicial:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\frac{k}{s(ms+c)}\frac{\bar{u}}{\cancel{s}} + \cancel{s}\frac{mv_0}{\cancel{s}(ms+c)} = 0 + 0 = 0$$

Velocidad inicial:

$$\dot{x}(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\dot{X}(s) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\frac{k}{ms+c}\frac{\bar{u}}{\cancel{s}} + s\frac{mv_0}{ms+c} = 0 + v_0 = v_0$$

Retardo en el Tiempo

Una de las ventajas de la transformada de Laplace, es que puede representar retardos en forma exacta.

Supóngase una función $f(t)$ y su equivalente retardada en un tiempo L, es decir $f(t-L)$. Considere que $f(t) = 0$ si $t < 0$.

Usando la definición de la transformada:

$$\mathcal{L}\{f(t-L)\} = \int_0^\infty f(t-L)e^{-st}dt$$

Creando la variable auxiliar $\tau = t - L$, se tiene que $t = \tau + L$ y además que $d\tau = dt$. Luego:

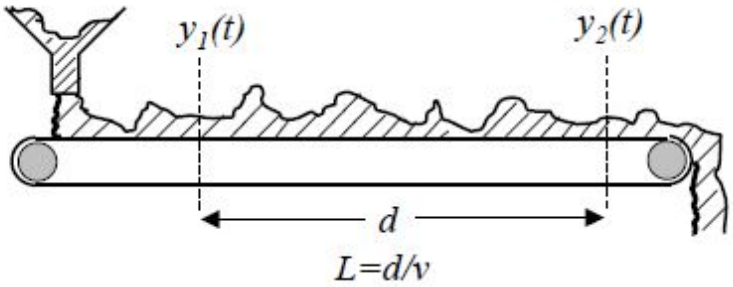
$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+L)}d\tau = e^{-sL}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-sL}F(s)$$

En resumen: $\mathcal{L}\{f(t-L)\} = F(s)e^{-Ls}$.

Retardos en Sistemas Dinámicos de Tiempo Continuo

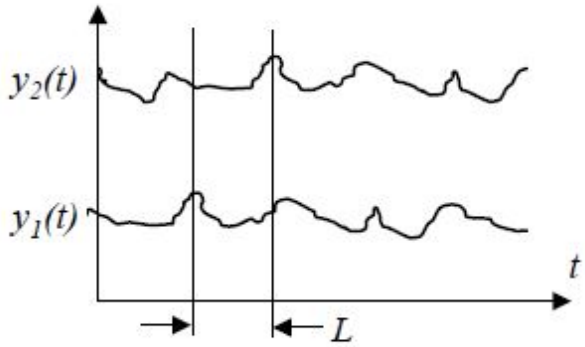
$$\mathcal{L}\{f(t-L)\} = F(s)\cdot e^{-Ls}$$

Ejemplo correas transportadoras



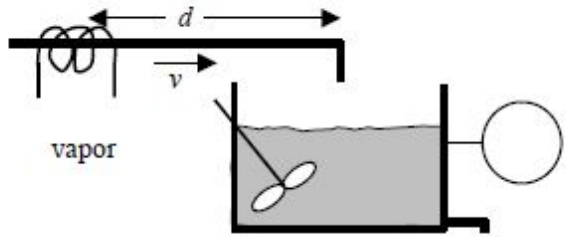
$$Y_2(s) = Y_1(s)\cdot e^{-Ls}$$

Ejemplo calentador



$d = 90$ metros

$v = 300$ m/min



Retardos en Sistemas Dinámicos de Tiempo Discreto

z^{-1} corresponde a un retardo de 1 ciclo. Si el retardo es L, su representación en el dominio $\mathbb{Z}$ es z^{-m}, siendo $m = \lfloor (L/\Delta T) \rfloor$, donde ΔT es el período del sistema digital.

Luego, para el caso anterior de la transferencia de calor, suponiendo que el período del sistema es $\Delta T = 0.1$ minutos, y la función de transmitancia, sin retardo, es:

$$\frac{T(z)}{U'(z)} = \frac{0.5}{z - 0.8}$$

pero $U'(z) = U(z) \cdot z^{-m}$, donde $m = d/(v \cdot \Delta T) = 90/(300 \cdot 0.1) = 3$

Luego,

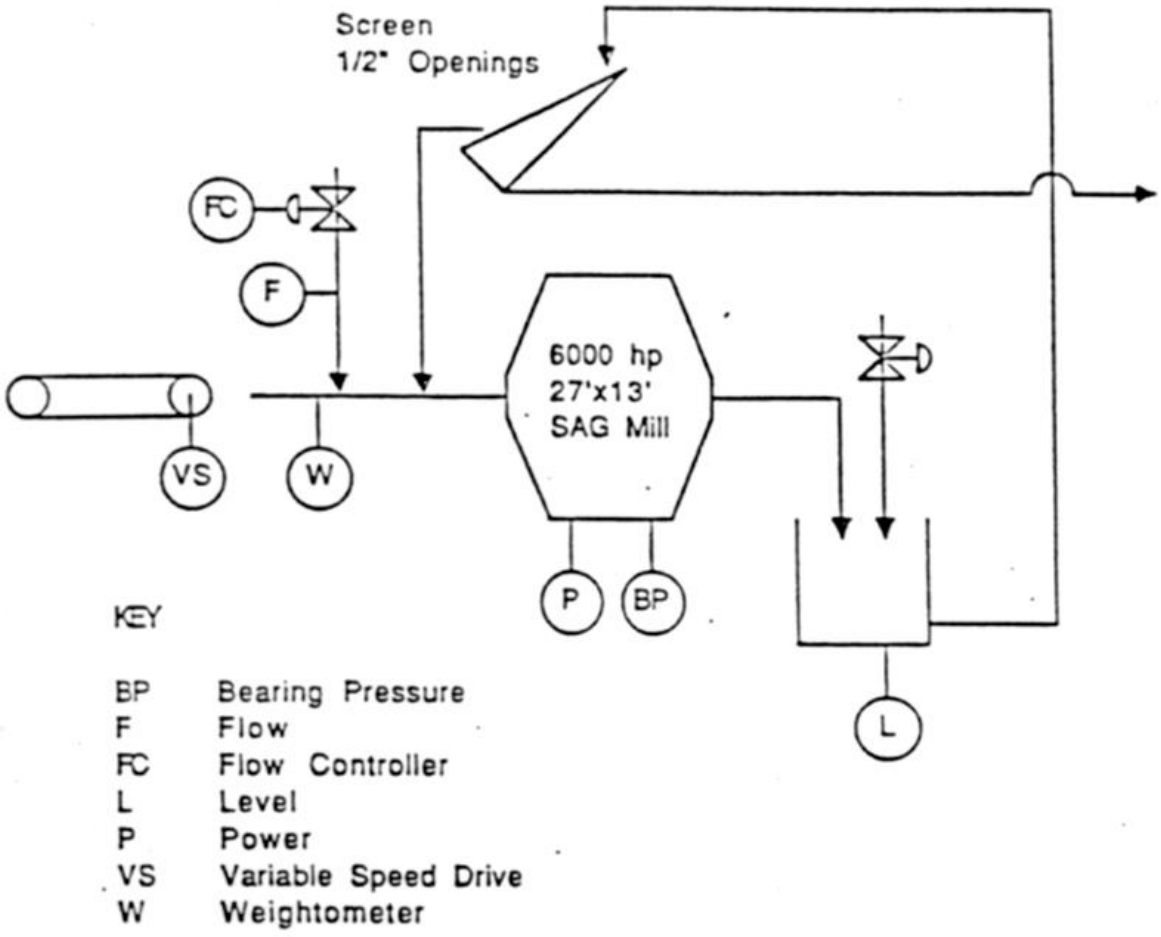
$$\frac{T(z)}{U'(z)} = \frac{0.5z^{-3}}{z - 0.8}$$

y en términos de su ecuación de diferencia: $T_k = 0.8 \cdot T_{k-1} + 0.5 \cdot u_{k-4}$

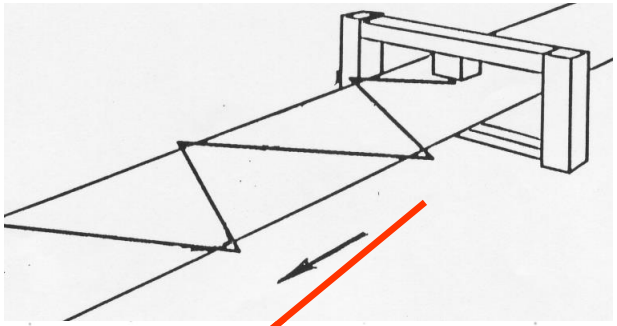
¿Qué pasa si m no es entero?

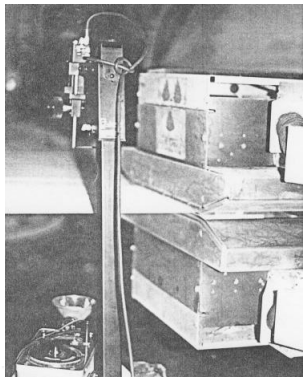
Ejemplo de retardos en procesos: Correas Transportadoras

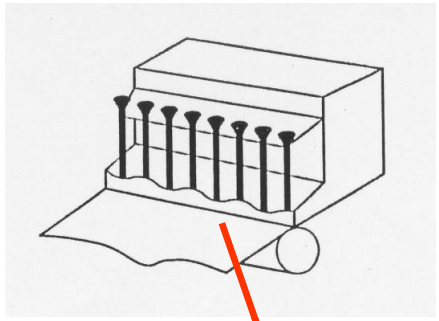


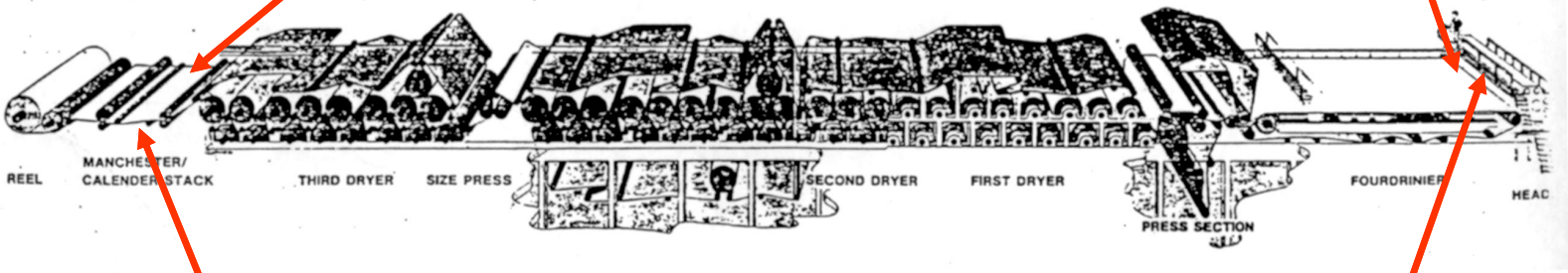


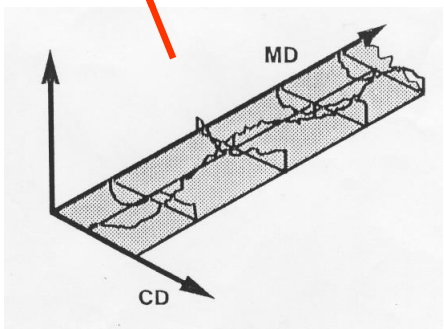
Ejemplo de retardos en procesos: Fabricación de Papel

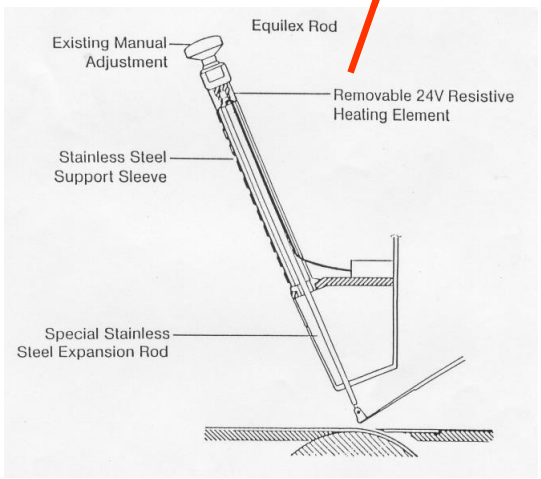






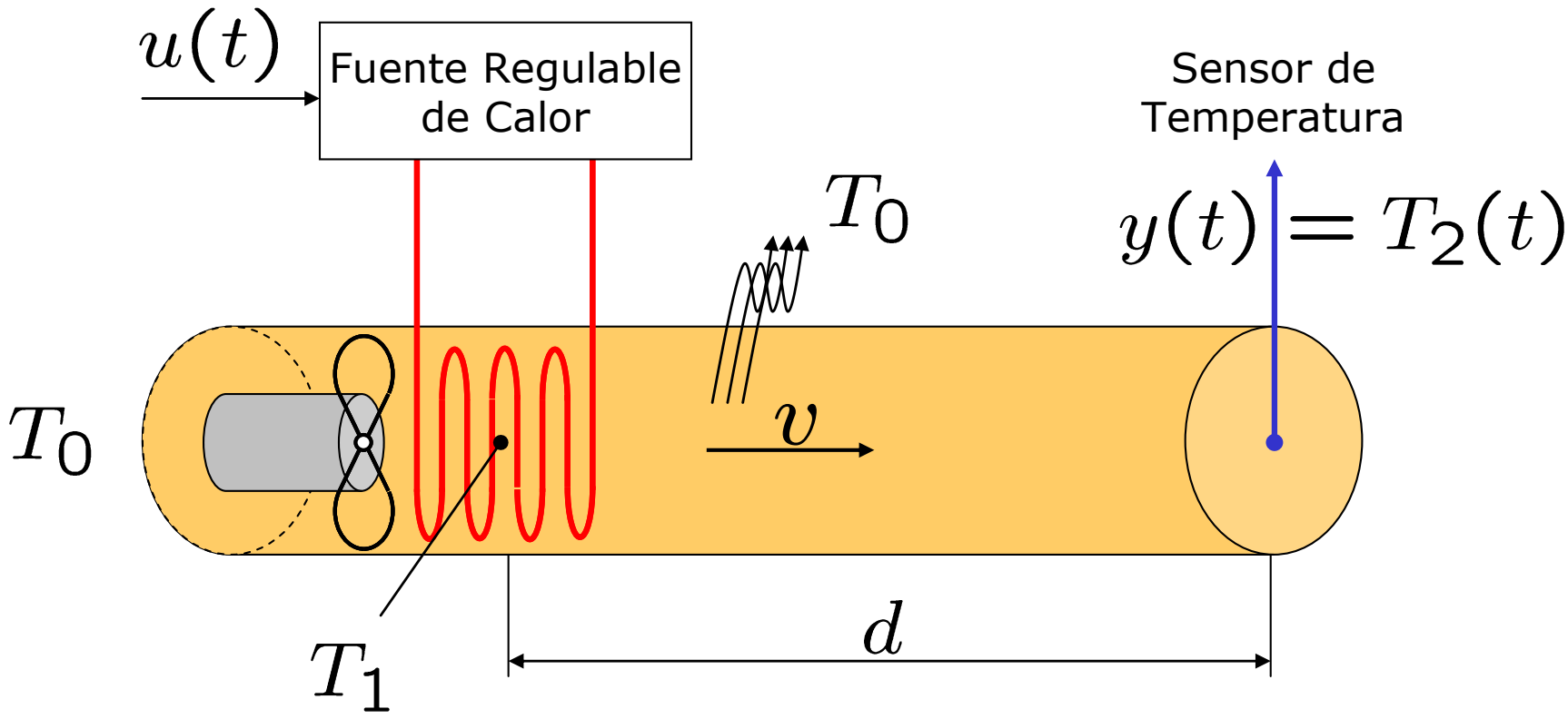






Ejercicio: Procesos con Retardos

Obtenga el modelo dinámico de Laplace para el sistema simplificado de calefacción:



Ejercicio: Procesos con Retardos

Recuerde que:

$$Q_{net} = mc\Delta T \;\rightarrow\; \dot{Q} = \frac{d(mc\Delta T)}{dt} = q_{in} - q_{out}$$

$$q_{conductividad} = k_c \frac{\text{Area}}{\text{espesor}} \Delta T$$

donde

Q_{net}	es el calor almacenado en [J],
q_{in}	es la tasa de calor aplicada en [J/s],
$q_{conductividad}$	es la tasa de pérdida de calor en [J/s].

Aproximación de Retardos Mediante Funciones Racionales

Aproximación de Padé:

$$e^{-Ls} \approx \frac{\sum_{i=0}^{N} h_i \cdot (-Ls)^i}{\sum_{i=0}^{N} h_i \cdot (Ls)^i}$$
$$= \frac{h_0 + h_1 \cdot (-Ls) + h_2 \cdot (-Ls)^2 + \cdots + h_N \cdot (-Ls)^N}{h_0 + h_1 \cdot (Ls) + h_2 \cdot (Ls)^2 + \cdots + h_N \cdot (Ls)^N}$$

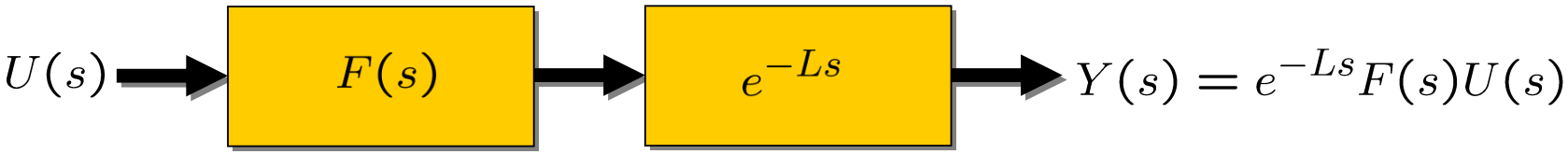
donde

$$h_{i+1} = \frac{N-i}{(2N-i)(i+1)} h_i \quad \text{con} \quad h_0 = 1$$

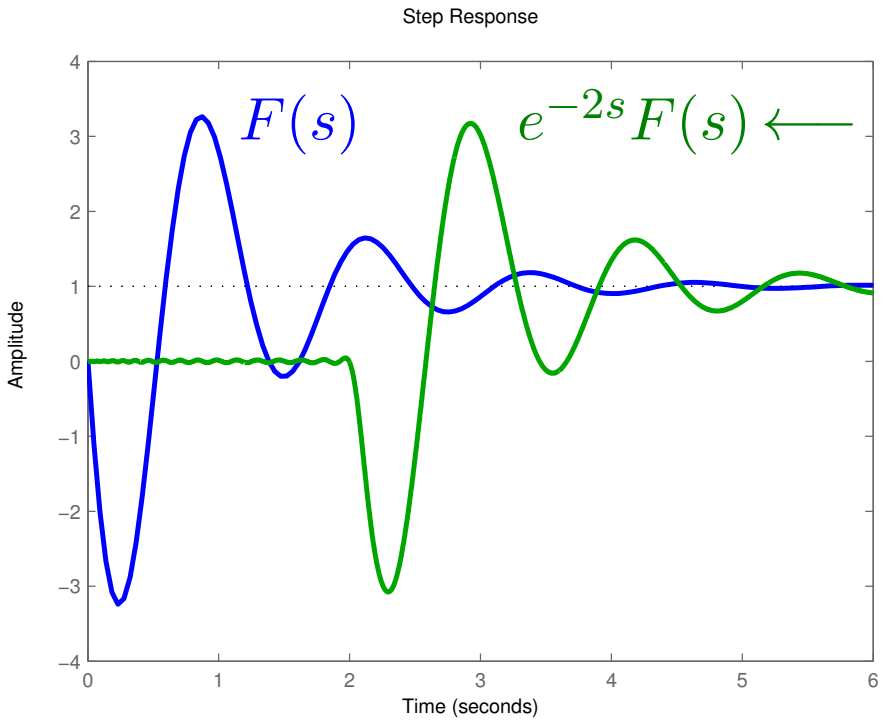
Aproximación de Padé en MATLAB:

```
[num, den] = pade(L,N)
```

Ejemplo Retardo de Padé

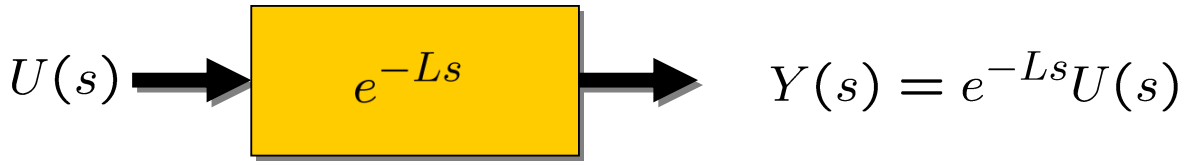


$$F(s) = \frac{-26(s-1)}{(s+1+j5)(s+1-j5)} = \frac{-26(s-1)}{s^2+2s+26}$$

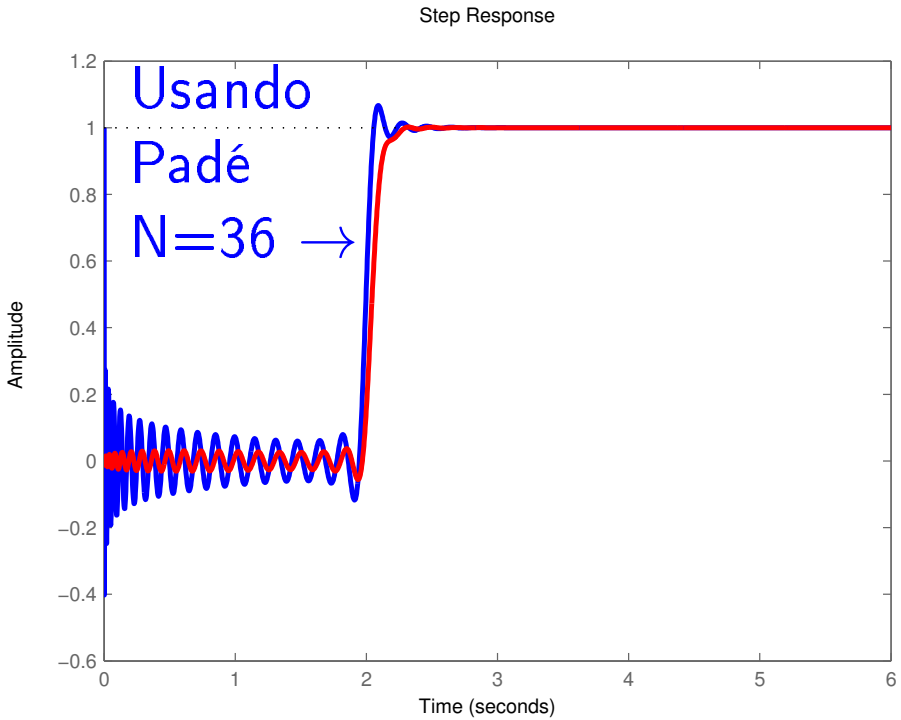


usando Padé N=36

Ejemplo Retardo de Padé



Escalón retardado usando la aproximación:



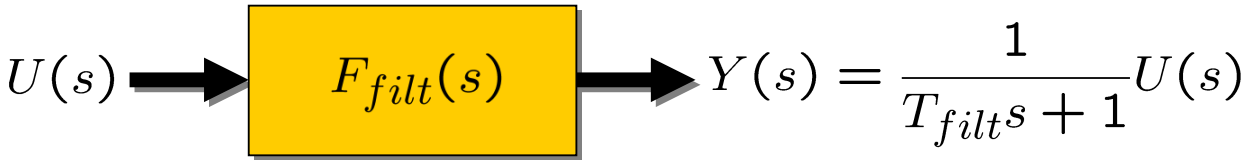
← Aproximación de Padé puede mejorarse usando un filtro de primer orden en cascada:

$$F_{filt}(s) = \frac{1}{T_{filt}s + 1}$$

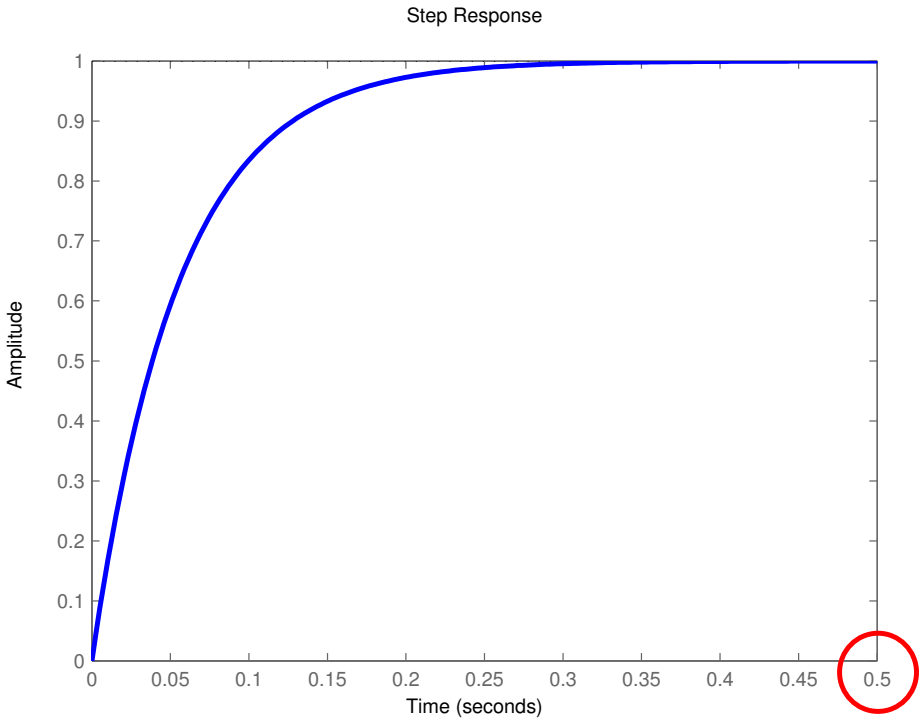
con $T_{filt} \ll L$, en la práctica:

$$T_{filt} \approx \frac{L}{N}.$$

Ejemplo Retardo de Padé



Respuesta al escalón del filtro:

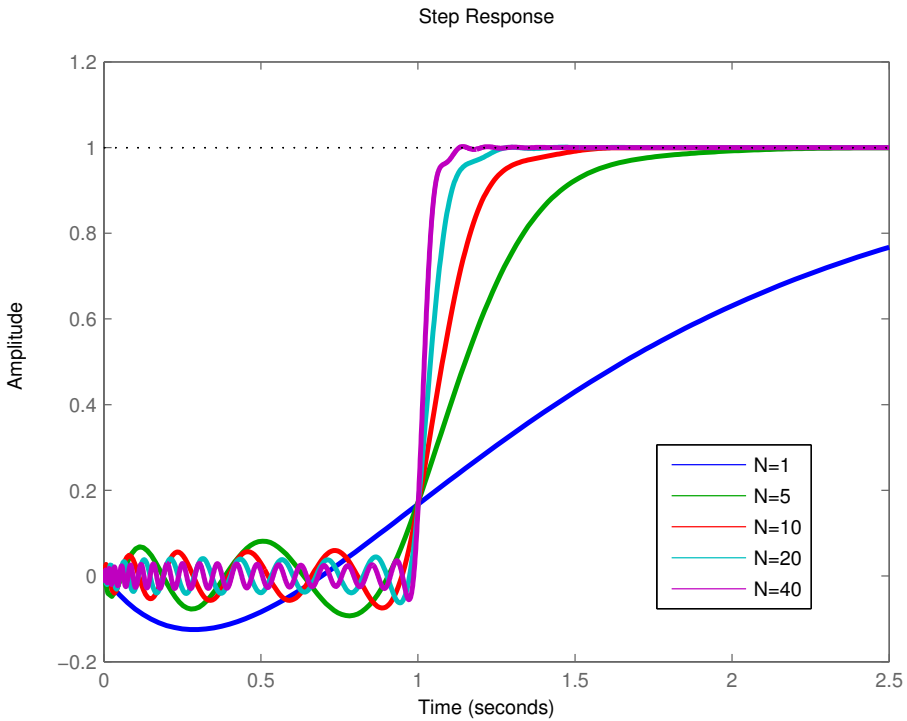


$$T_{filt} \approx \frac{L}{N} = \frac{2}{36} \approx 0.05$$

Ejemplo Retardo de Padé

¿Cuál es el orden apropiado para el Retardo de Padé?

Respuesta al escalón de: e^{-s}



En la práctica:

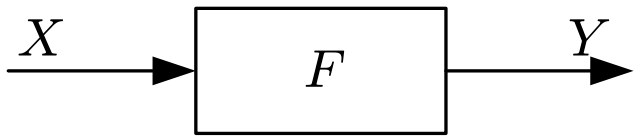
$$N^* \approx 20L$$

por lo que si $L = 1$, luego

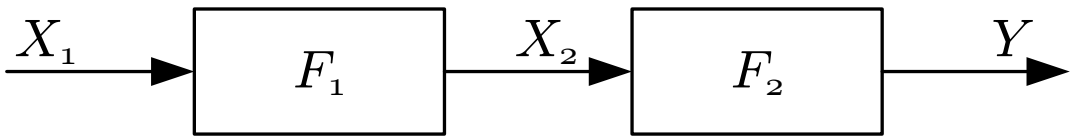
$$T_{filt} \approx *\frac{L}{N} = 0.05$$

Modelos de Sistemas Basados en Diagramas de Bloques

- Los diagramas de bloques permiten describir gráficamente y visualizar las relaciones entre los principales componentes de un sistema.
- Los bloques de un diagrama representan las funciones de transferencia que relacionan la señal de salida resultante de un proceso con la señal de entrada al proceso.



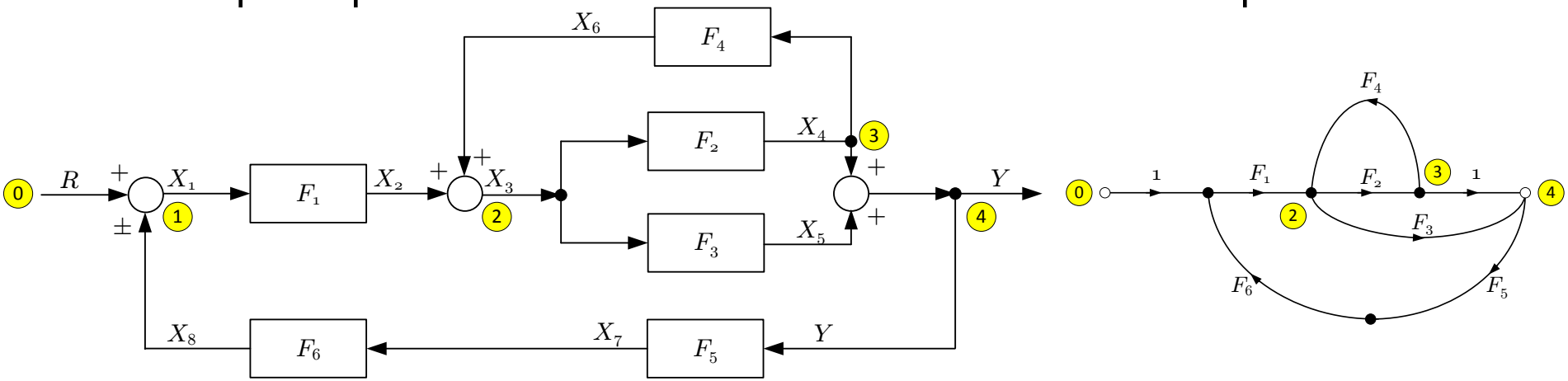
$$Y(s) = F(s)X(s)$$



$$\begin{aligned} Y(s) &= F_2(s)X_2(s) \\ &= F_2(s)F_1(s)X_1(s) \end{aligned}$$

Modelos de Sistemas Basados en Diagramas de Bloques

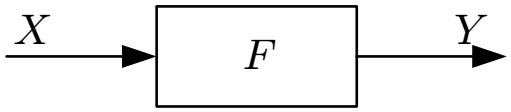
- También existen grafos de flujo de las señales, que son una manera equivalente de visualizar las señales y procesos en el sistema. Específicamente, los nodos representan señales y las ramas representan las ganancias o funciones de transferencia.
- Las modelos gráficos se pueden representar formalmente a través de grafos (listas de vértices y nodos) y son muy útiles porque dan origen a la programación diagramática visual en la que los procesos se representan a través de cajas conectadas a través de flechas, líneas o arcos que representan las relaciones o señales entre los procesos.



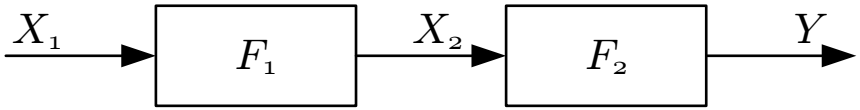
Reducción de Diagramas de Bloques

- La representación gráfica puede simplificarse manipulando los bloques. Esto es exactamente equivalente a manipular las expresiones algebraicas. A veces es más fácil simplificar gráficamente los diagramas, que realizar operaciones algebraicas. Sin embargo, al final ambos enfoques son lo mismo.
- Veremos algunas maneras de simplificar partes de diagramas de bloques reemplazándolos por diagramas equivalentes.

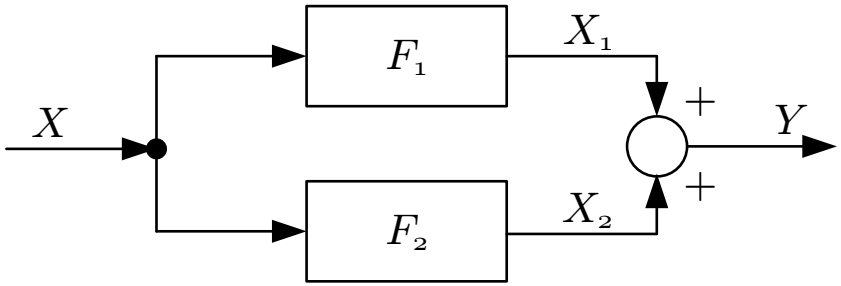
Diagramas de Bloques Equivalentes y Transformaciones



$$Y(s) = F(s)X(s)$$



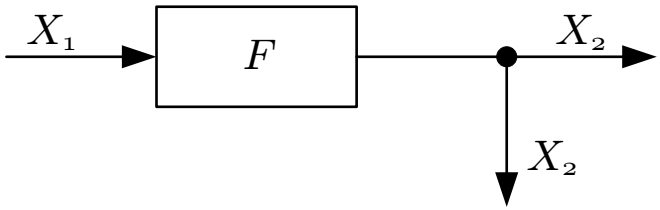
$$Y(s) = F_2(s)X_2(s) = F_2(s)F_1(s)X_1(s)$$



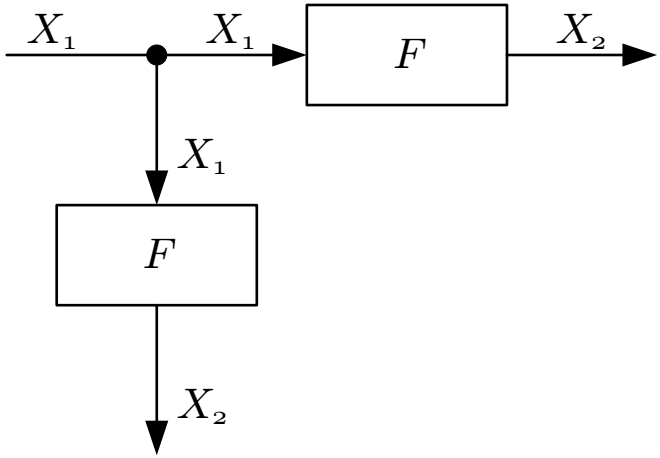
$$\begin{aligned} Y(s) &= F_1(s)X(s) + F_2(s)X(s) \\ &= [F_1(s) + F_2(s)]\, X(s) \end{aligned}$$

Diagramas de Bloques Equivalentes y Transformaciones

Punto post-bloque a punto ante-bloque

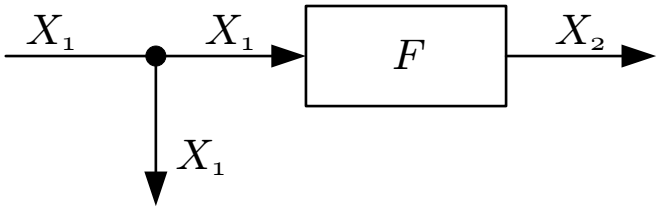


$$X_2(s) = F(s)X_1(s)$$

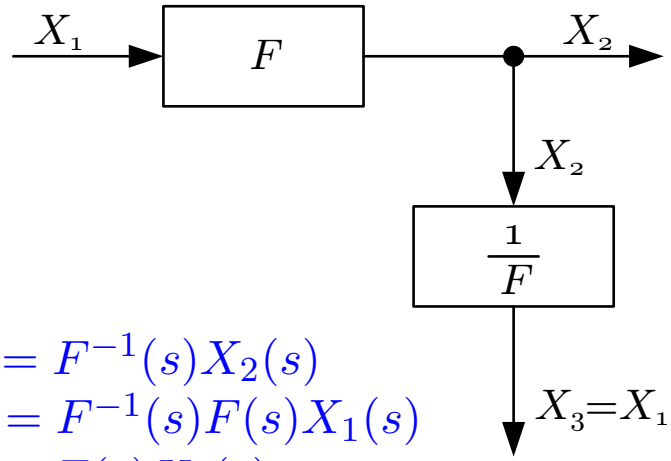


$$X_2(s) = F(s)X_1(s)$$

Punto ante-bloque a punto post-bloque



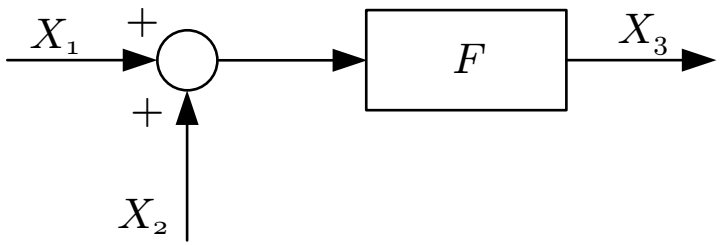
$$X_1(s) = X_1(s)$$
$$X_2(s) = F(s)X_1(s)$$

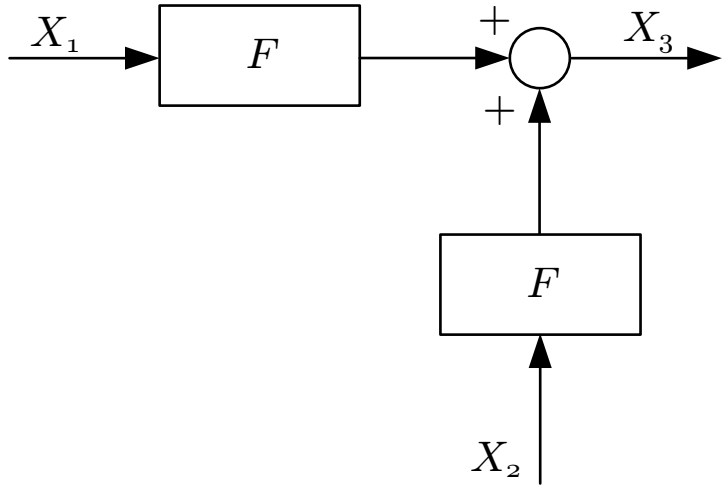


$$X_3(s) = F^{-1}(s)X_2(s)$$
$$= F^{-1}(s)F(s)X_1(s)$$
$$X_2(s) = F(s)X_1(s)$$

Diagramas de Bloques Equivalentes y Transformaciones

Sumador ante-bloque a sumador post-bloque

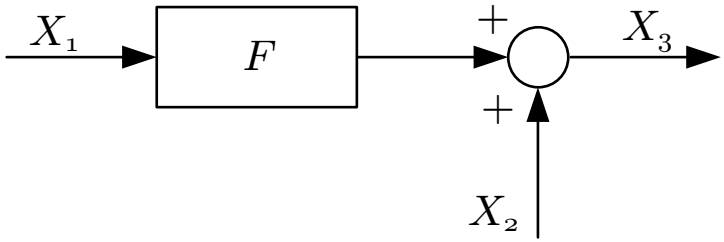




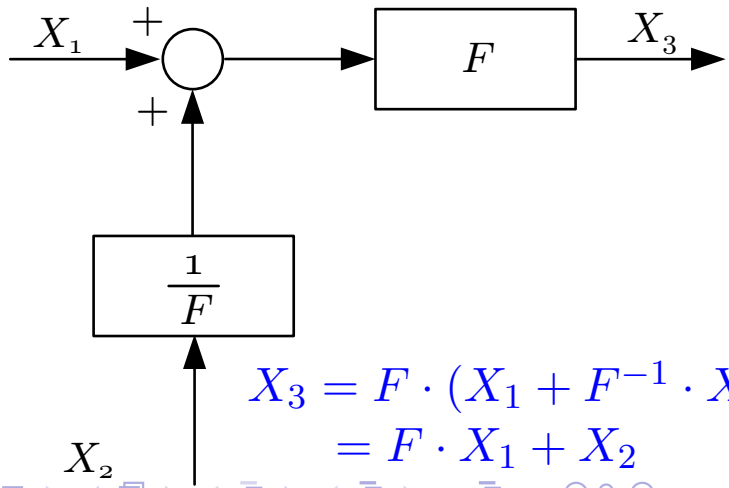
$$X_3 = F \cdot (X_1 + X_2) = F \cdot X_1 + F_2 \cdot X_2$$

$$X_3(s) = F \cdot X_1 + F_2 \cdot X_2$$

Sumador post-bloque a sumador ante-bloque



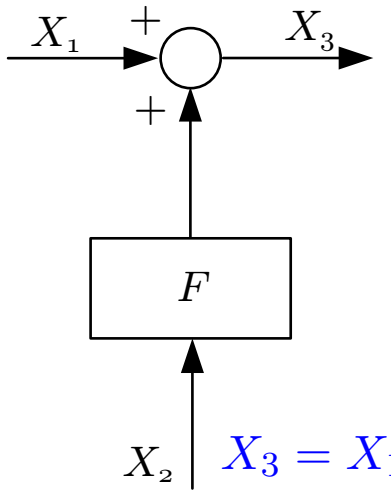
$$X_3 = F \cdot X_1 + X_2$$



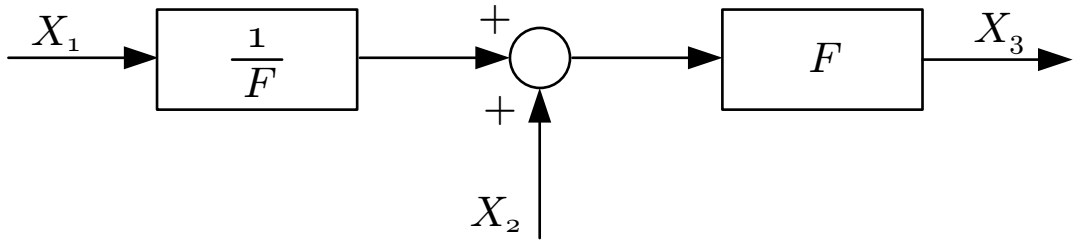
$$X_3 = F \cdot (X_1 + F^{-1} \cdot X_2) = F \cdot X_1 + X_2$$

Diagramas de Bloques Equivalentes y Transformaciones

Sumador post-bloque a sumador pre-bloque

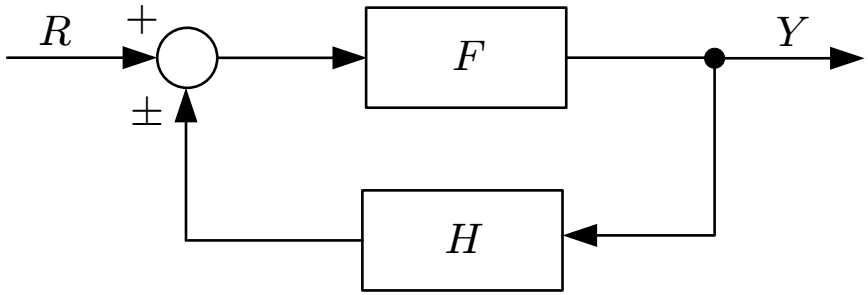


$$X_3 = X_1 + F \cdot X_2$$



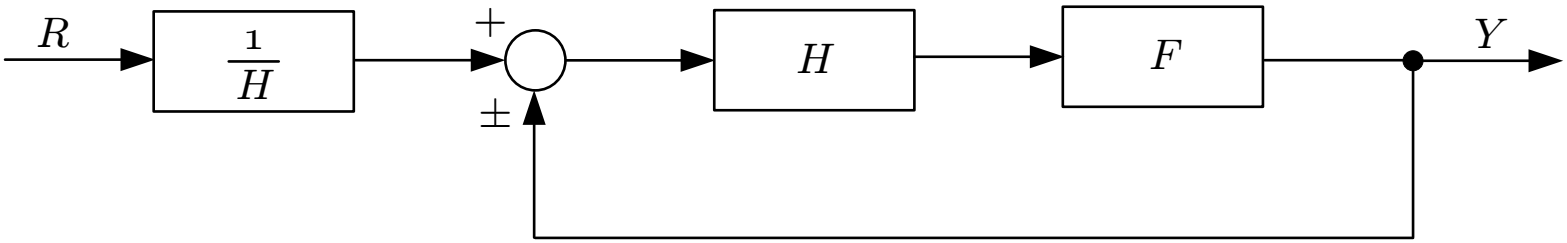
$$X_3 = F \cdot (F^{-1} \cdot X_1 + X_2) = X_1 + F \cdot X_2$$

Sistema en lazo cerrado



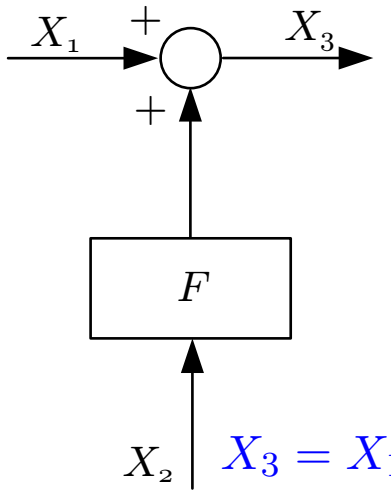
$$Y = F \cdot (R - H \cdot Y) \Rightarrow Y = \frac{F}{1+F \cdot H} R$$

$$Y = F \cdot H \cdot (H^{-1} \cdot R - Y) \Rightarrow Y = \frac{F}{1+F \cdot H} R$$

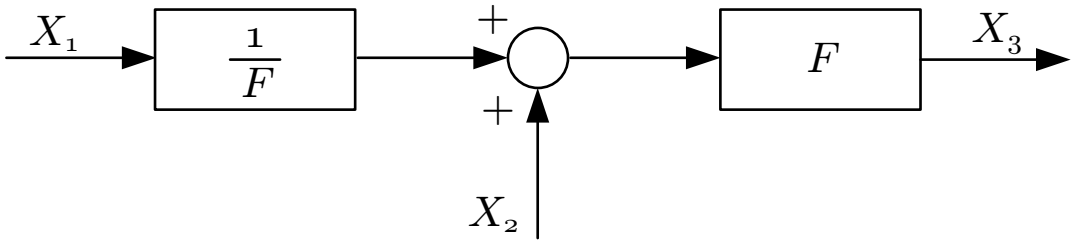


Diagramas de Bloques Equivalentes y Transformaciones

Sumador post-bloque a sumador pre-bloque

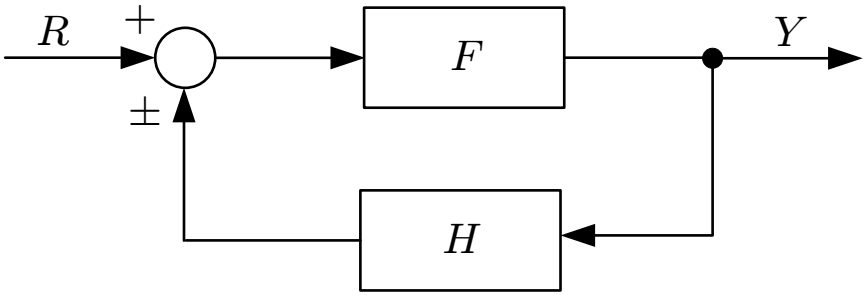


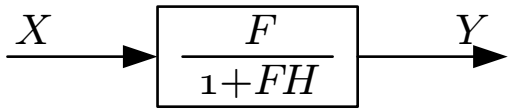
$$X_3 = X_1 + F \cdot X_2$$

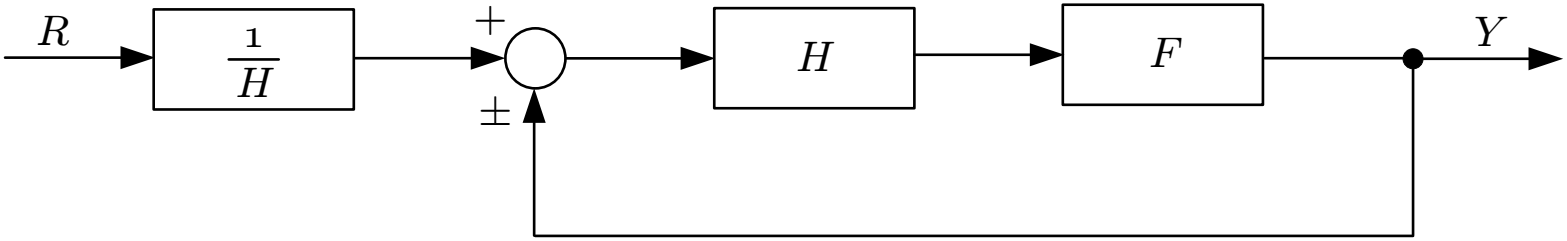


$$X_3 = F \cdot (F^{-1} \cdot X_1 + X_2)$$
$$= X_1 + F \cdot X_2$$

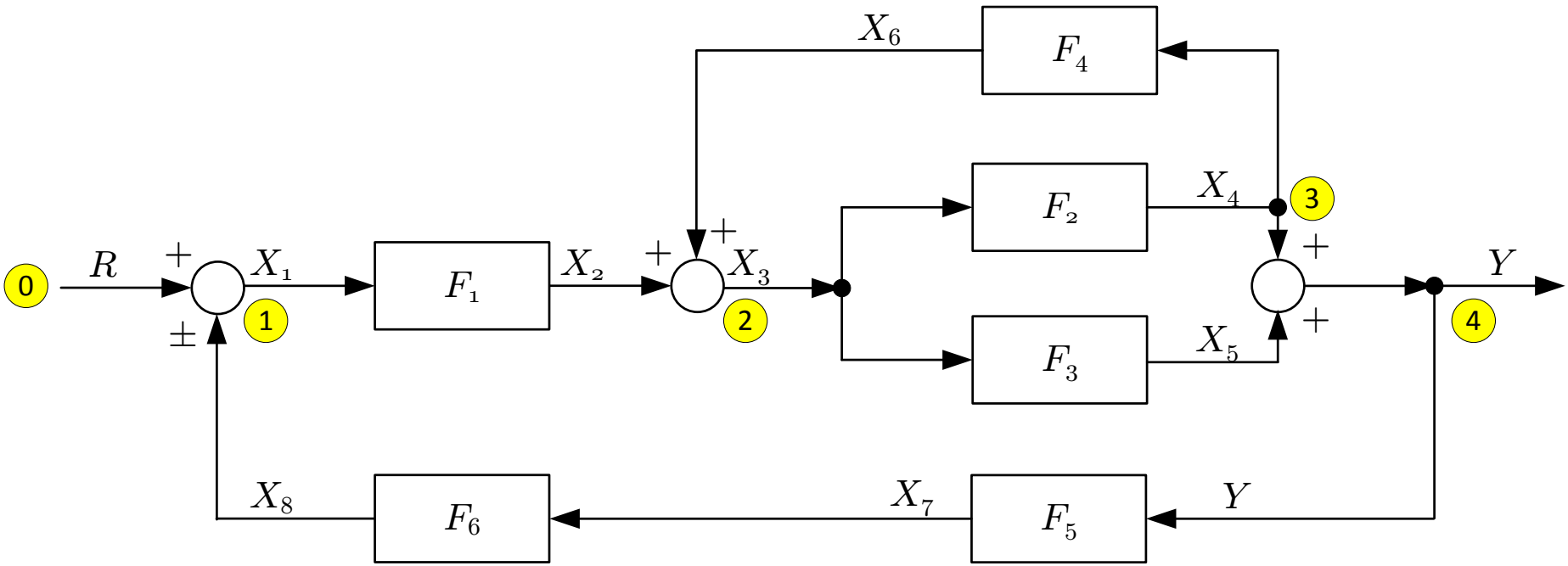
Sistema en lazo cerrado







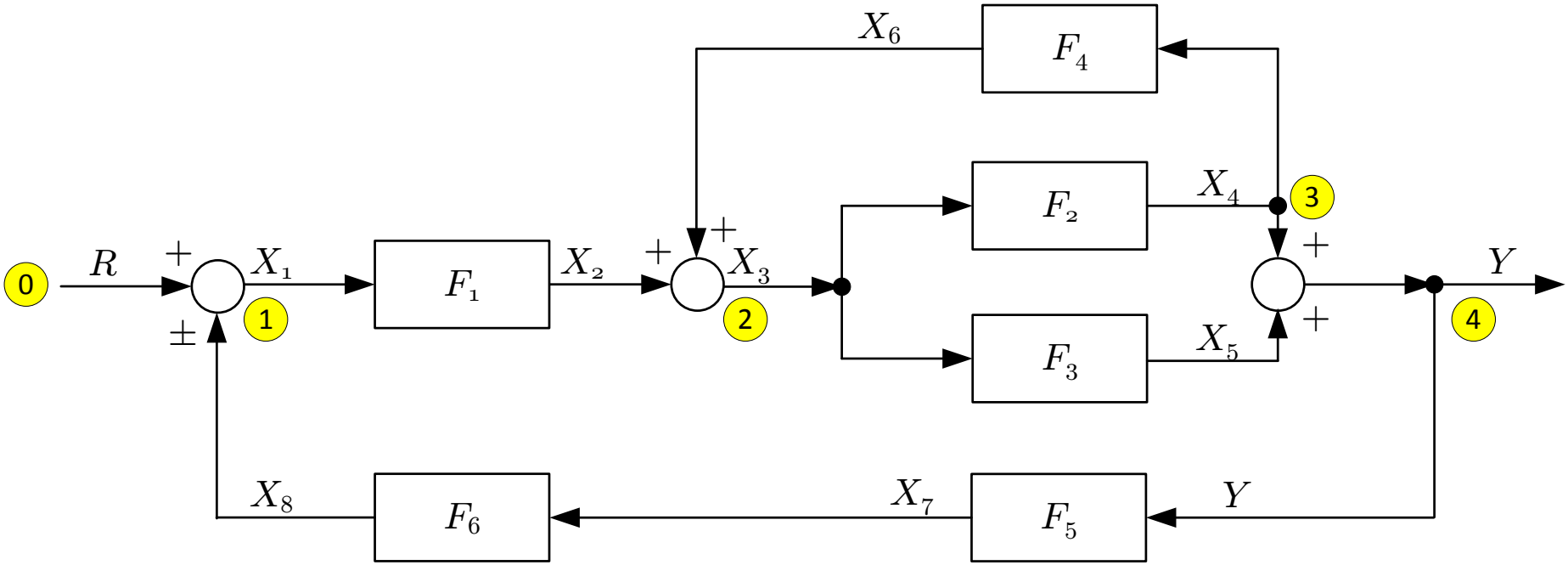
Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques



Solución:

Es posible usar las equivalencias gráficas anteriores o formular relaciones algebraicas. En el segundo enfoque es necesario etiquetar todas las señales, escribir las relaciones matemáticas y simplificar el conjunto de ecuaciones como se muestra a continuación.

Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques



$$
\begin{aligned}
X_1 &= R - X_8 && (1)\\
X_8 &= F_6 X_7 && (2)\\
X_7 &= F_5 Y && (3)\\
Y &= X_4 + X_5 && (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_4 &= F_2 X_3 && (5)\\
X_5 &= F_3 X_3 && (6)\\
X_6 &= F_4 X_4 && (7)\\
X_3 &= X_2 + X_6 && (8)\\
X_2 &= F_1 X_1 && (9)
\end{aligned}
$$

Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques

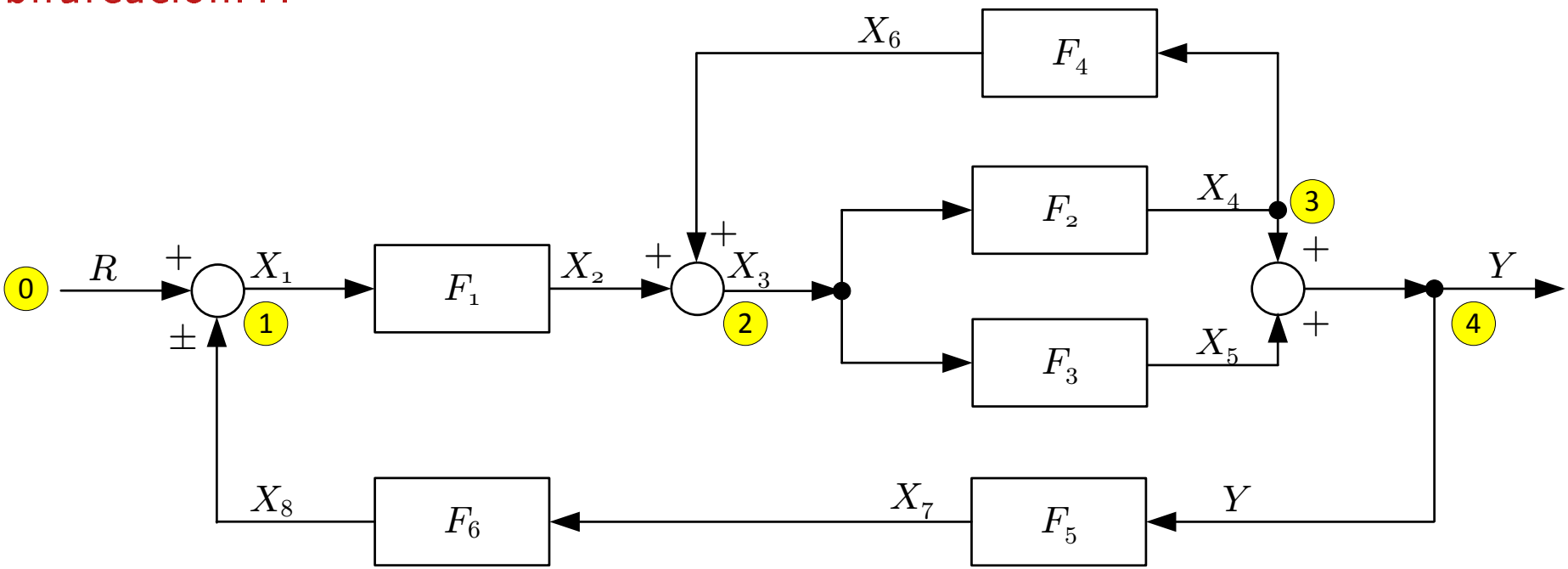
$$
\begin{aligned}
X_1 &= R - X_8 && (1)\\
X_8 &= F_6 X_7 && (2)\\
X_7 &= F_5 Y && (3)\\
Y &= X_4 + X_5 && (4)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
X_4 &= F_2 X_3 && (5)\\
X_5 &= F_3 X_3 && (6)\\
X_6 &= F_4 X_4 && (7)\\
X_3 &= X_2 + X_6 && (8)\\
X_2 &= F_1 X_1 && (9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(3) en (2)} &\Rightarrow X_8 = F_6 F_5 Y && (10)\\
\text{(10) en (1)} &\Rightarrow X_1 = R - F_6 F_5 Y && (11)\\
\text{(9) y (7) en (8)} &\Rightarrow X_3 = F_1 X_1 + F_4 X_4 && (12)\\
\text{(5) en (12)} &\Rightarrow X_3 = F_1 X_1 + F_4 F_2 X_3 && (13)\\
X_3 \text{ de (13)} &\Rightarrow X_3 = \frac{F_1}{1 - F_2 F_4} X_1 && (14)\\
\text{(11) en (13)} &\Rightarrow X_3 = \frac{F_1}{1 - F_2 F_4}(R - F_6 F_5 Y) && (15)\\
\text{(5) y (6) en (4)} &\Rightarrow Y = (F_2 + F_3) X_3 && (16)\\
\text{(15) en (16)} &\Rightarrow Y = (F_2 + F_3)\frac{F_1}{1 - F_2 F_4}(R - F_6 F_5 Y) && (17)
\end{aligned}
$$

Y de (17):
$$Y = \frac{\frac{F_1 \cdot (F_2 + F_3)}{1 - F_2 F_4}}{1 + \frac{F_1 \cdot (F_2 + F_3)}{1 - F_2 F_4} F_5 F_6} R = \frac{(F_2 + F_3) F_1}{1 - F_2 F_4 + (F_2 + F_3) F_1 F_5 F_6} R$$

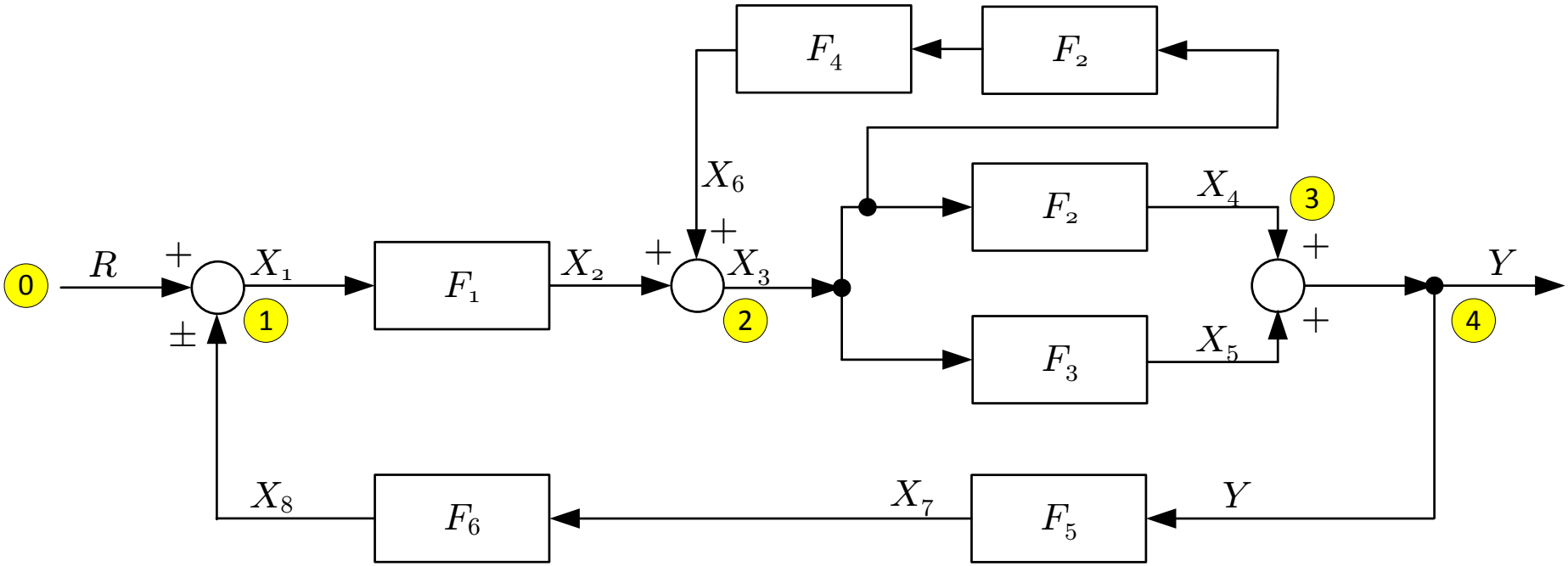
Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques

Simplificando gráficamente el sistema... moviendo F_2 luego de la bifurcación...



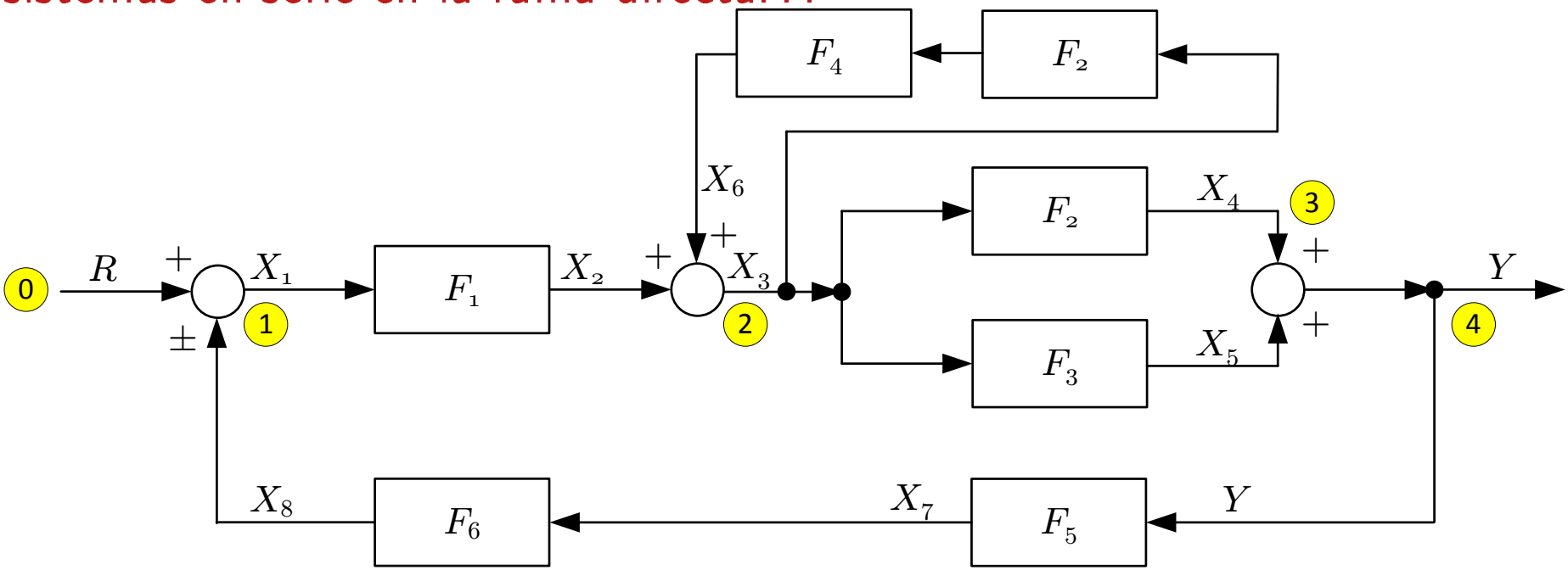
Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques

Los nodos en el punto 2 son los mismos, y se pueden pueden mover...



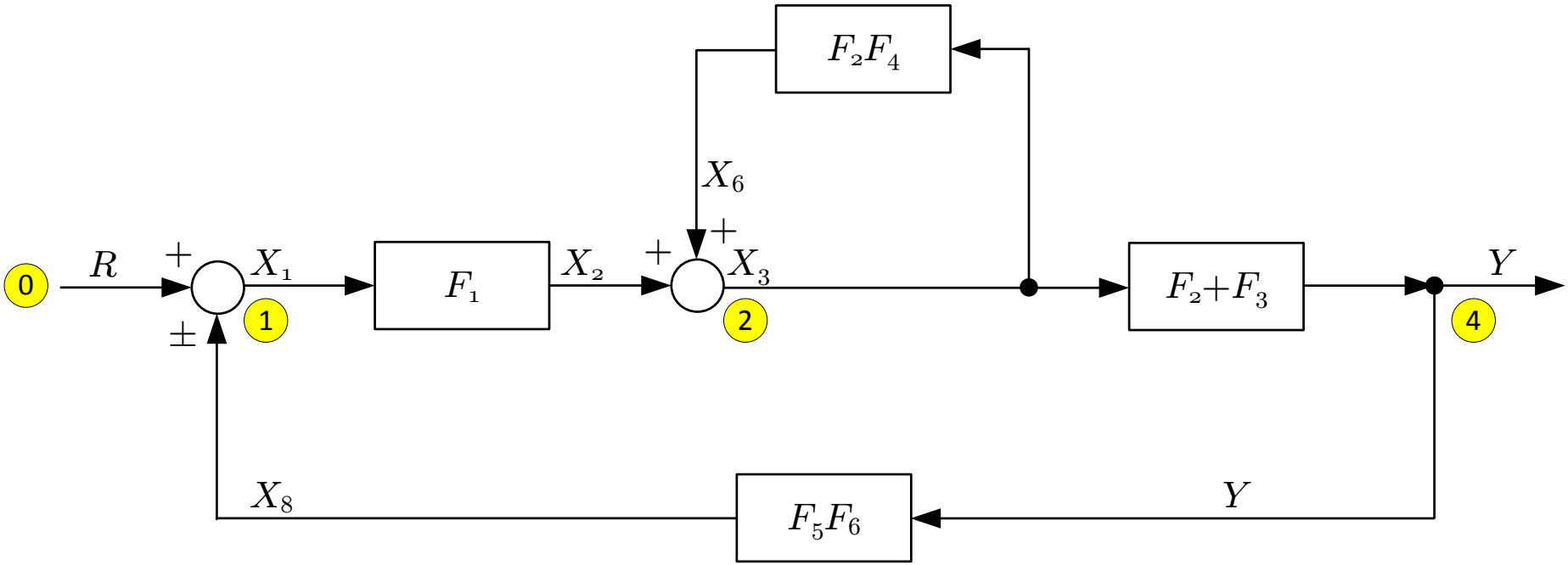
Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques

Separando el sistema realimentado y el sistema en paralelo. . . quedan 3 sistemas en serie en la rama directa. . .



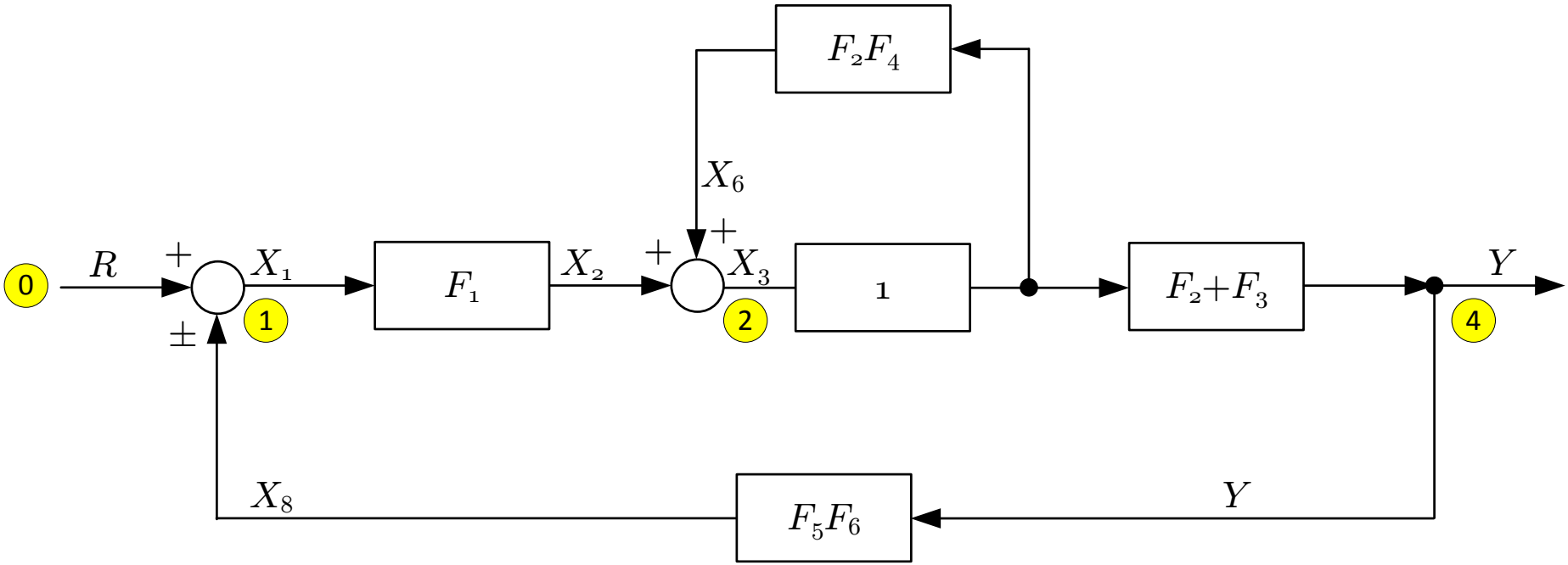
Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques

Reordenando el sistema realimentado y uniendo los sistemas en paralelo...



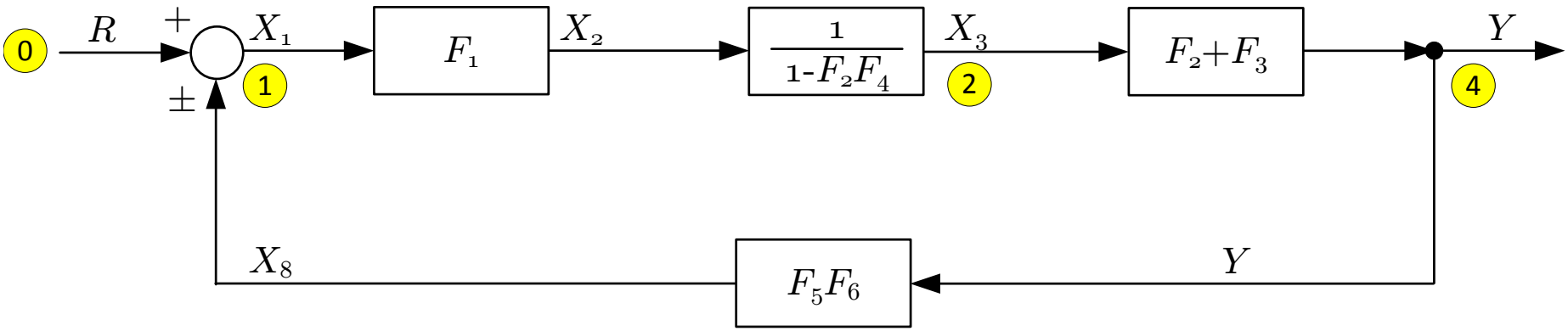
Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques

Observar que el sistema realimentado interno tiene ganancia unitaria...



Ejemplo - Simplifación de un Diagrama de Bloques

Reduciendo el sistema realimentado interno. . . hace sencillo obtener el sistema equivalente. . .



Modelos de Sistemas Basados en Diagramas de Bloques

- Más información sobre diagramas de bloques y grafos relacionados se puede encontrar en:
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Functional_flow_block_diagram
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Functional_block_diagram
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Block_diagram
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(discrete_mathematics)
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Signal-flow_graph
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Flow_graph_(mathematics)
- Existen reglas para reducir grafos de flujo de señales. Una de ellas es la llamada regla de Mason. Procedimientos como estos entregan las bases para la implementación de algoritmos que reducen los grafos, reconociendo que existe una relación directa entre los grafos y el algebra de los sitemas de ecuaciones. Ver por ejmplo:
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Signal-flow_graph
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Mason%27s_gain_formula

Referencias adicionales

- G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems.* 7^a ed. (1^a ed. 1986, Addison-Wesley Publishing Co.), Prentice Hall, 2014.

- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, M.E. Salgado. *Control System Design.* Prentice Hall, 2001.
- Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. *Modern Control Systems.* 13^a ed. (1^a ed. 1967, Addison-Wesley Publishing Co.), Pearson, 2017.