Tema: Modelos de tiempo discreto

◁ *Guía de Ejercicios # 18* ▷

1. Ud. ha decidido depositar una parte de su salario en una cuenta bancaria y mantener siempre una cierta cantidad en ella en caso de imprevistos. Sea q_{k+1} el saldo de la cuenta al inicio de cada mes, este puede calcularse como una fracción α de su sueldo del mes anterior menos el porcentaje β que retiró de la cuenta el mes anterior para pagar diversos gastos, más las utilidades que recibió por las acciones en las que invirtió empleando el resto del saldo del mes anterior (es decir $1-\beta$). Asumiendo que la rentabilidad de su inversión es de $r > 0$:

   (a) Formule el modelo del estado de cuenta a inicios de cada mes.

   (b) Encuetre la política de gastos ideal, es decir β que le permita mantener un balance en la cuenta igual al porcentaje de sueldo que deposita mensualmente en ella.

   Solución:

   (a) De acuerdo al enunciado:

   q_{k+1}: Saldo inicial en la cuenta en el mes $k+1$.
   u_k: Sueldo pagado en el mes k.
   $I_k + 1$: Ganancia de utilidades en el mes $k+1$.
   g_k: Gastos del mes k cargados al saldo q_k en el mismo mes.

   Además:

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= r(1-\beta)q_k \\ g_k &= \beta q_k \\ q_{k+1} &= \alpha u_k - \beta q_k + (1+r)(1-\beta)q_k \end{aligned}$$

   (b) Asumiento un sueldo constante $u_k = u$ y que el saldo inicial siempre es $q_{k+1} = \alpha u$ para todo k, entonces en equilibrio se debería cumplir:

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= \alpha u_k - \beta q_k + (1+r)(1-\beta)q_k \\ \alpha u &= \alpha u - \beta\alpha u + (1+r)(1-\beta)\alpha u \\ 1 &= 1 - \beta + (1+r)(1-\beta) \\ \beta + (1+r)\beta &= (1+r) \\ (2+r)\beta &= 1+r \\ \beta &= \frac{1+r}{2+r} \end{aligned}$$

   Lo anterior implica que el porcentaje de gasto β de lo que se tiene en la cuenta para que esta se mantenga estable dada una una inversión que tiene rentabilidad $r = 0$ debiese ser $\beta = \frac{1}{2}$. Si la rentabilidad tendiese a infinito, se podría gastar todo, puesto que $\beta \to 1$ y el dinero se recuperaría.
   Observe que el gasto mensual total es g_k (cargado a la cuenta) y $(1-\alpha)u_k$ (el sueldo que no deposita en la cuenta).
   ¿Si la cuenta tiene un saldo inicial cero, cuál será el saldo al inicio del tercer mes?

2. Para la planta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

realimentada con una ganancia unitaria negativa y controlador:

$$K(z) = K_p\, z^{-1}$$

(a) Calcule $y(k)$ en $k = 4$ para el lazo abierto con condiciones iniciales cero y entrada impulso unitario en $k = 0$.

(b) Calcule K_p tal que la respuesta del sistema realimentado tenga un error en régimen estacionario menor al 1% ante una referencia escalón unitario.

Solución:

(a) De la función de transferencia de lazo abierto se tiene que:

$$Y(z)\left(1 - 0.5z^{-1} + 0.1z^{-2}\right) = U(z)$$

Luego, calculando la transformada $\mathcal{Z}$ inversa:

$$y(k) - 0.5y(k-1) + 0.1y(k-2) = u(k)$$

y reemplazando $k = 2$, $k = 3$ y $k = 4$:

$$\begin{aligned} y(0) - 0.5y(-1) + 0.1y(-2) &= u(0) \\ y(1) - 0.5y(0) + 0.1y(-1) &= u(1) \\ y(2) - 0.5y(1) + 0.1y(0) &= u(2) \\ y(3) - 0.5y(2) + 0.1y(1) &= u(3) \\ y(4) - 0.5y(3) + 0.1y(2) &= u(4) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow y(0) = 1 \\ y(1) - 0.5 = 0 &\Rightarrow y(1) = 0.5 \\ y(2) - 0.25 + 0.1 = 0 &\Rightarrow y(2) = 0.15 \\ y(3) - 0.5 * 0.15 + 0.1 * 0.5 = 0 &\Rightarrow y(3) = 0.025 \\ y(4) - 0.5 * 0.025 + 0.1 * 0.15 = 0 &\Rightarrow y(4) = -0.0025 \end{aligned}$$

(b) Dada la funcion de transferencia de lazo abierto obtenida en el punto anterior:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z^2 - 0.5z + 0.1}$$

El error del sistema en lazo cerrado se puede calcular como:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{1 + K(z)F(z)} R(z) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{K_p}{z}\frac{z^2}{z^2 - 0.5z + 0.1}} R(z) \\ &= \frac{z^2 - 0.5z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.1 + K_p\, z} R(z) \end{aligned}$$

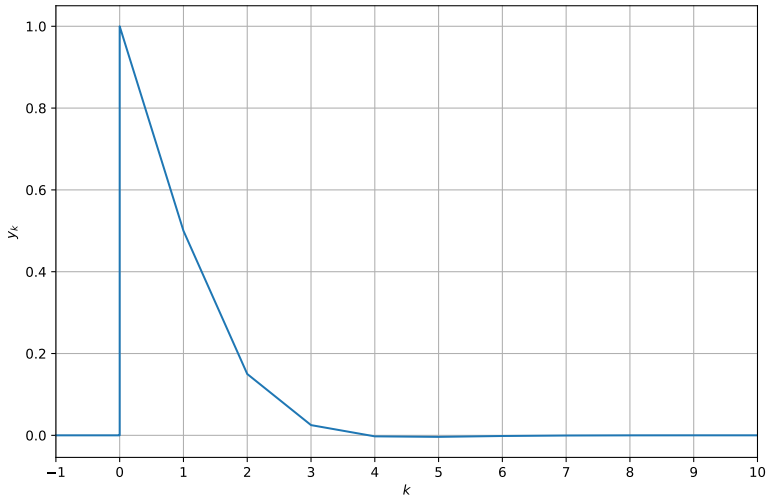


Figura 1: Respuesta al impulso de sistema discreto del problema 2.

con el escalón unitario:

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

Para aplicar el Teorema del Valor Final es necesario asegurar primero que el sistema sea estable. En este caso los polos de sistema en lazo abierto están en $z = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{20}}$, dentro del círculo unitario y convergen a los dos ceros en $z = 0$, pero el controlador añade un polo en $z = 0$. Por lo tanto, ese tercer polo sigue una asíntota hacia $-\infty$ que sale del círculo unitario. Aunque no es correcta la cancelación de z^2 en el numerador de $F(z)$ con el z en el denominador de $K(z)$ debido a que se pierde información y el orden de la ecuación característica se reduce de 3 a 2, la cancelación permite observar que los polos remanentes del sistema en lazo cerrado serían los de un sistema que tiene un solo cero en $z = 0$ con un LGR sobre el eje real negativo a la izquierda de $z = 0$, con polos complejos conjugados que convergen al eje real, uno de los cuales converge a $z = 0$, mientras que el otro a $z = -\infty$ de acuerdo a:

$$z = \frac{0.5 - K_p \pm \sqrt{0.25 - K_p + K_p^2 - 0.4}}{2}$$

La solución $z = -1$ se alcanzan cuando:

$$\begin{aligned}
\bar{q}(z=-1) &= 1 + K_p \frac{1}{z} \frac{z^2}{z^2 - 0.5z + 0.1}\bigg|_{z=1} = 0 \\
&= 1 + K_p \frac{1}{-1} \frac{1^2}{(-1)^2 - 0.5 \cdot (-1) + 0.1} = 0 \\
&\Rightarrow K_p = ((-1)^2 - 0.5 \cdot (-1) + 0.1) = 1.6
\end{aligned}$$

De hecho, con $K_p = 1.6$ las raíces del sistema en lazo cerrado serán $z = \{-1, -0.1\}$. Luego para que la respuesta del sistema en lazo cerrado sea estable se requiere $K_p < 1.6$.

Asumiendo que el sistema en lazo cerrado es estable, por Teorema de Valor Final:

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{k\to\infty} e_k &&= \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) \\ &&&= \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{z^2-0.5z+0.1}{z^2-0.5z+0.1+K_p z} \frac{z}{\cancel{z-1}} \\ &&&= \frac{1-0.5+0.1}{1-0.5+0.1+K_p} \\ &&&= \frac{0.6}{0.6+K_p} \end{aligned}$$

Para que $e_\infty \leq \frac{1}{100}$ se requeriría:

$$e_\infty = \frac{0.6}{0.6+K_p} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 0.6+K_p \geq 60 \Rightarrow K_p \geq 59.4 \tag{1}$$

Este resultado es mayor que la ganancia crítica que asegura la estabilidad, por lo tanto, no existe un K_p que cumpla el requerimiento.
Con $K_p = 1.4$ el error sería:

$$e_\infty = \frac{0.6}{0.6+K_p} = \frac{0.6}{0.6+1.4} = 0.3 = 30\% \tag{2}$$

y en el mejor de los casos, con un $K_p = 1.6$ la solución oscilaría con un error $e_\infty = \frac{3}{11} = 27.3\%$ y sería imposible lograr un error menor con este controlador. La figura 2 muestra la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado para distintos valores de ganancia. Valores de ganancia creciente disminuyen el error en regimen permanente, pero cuando se alcanza el valor crítico $K_p = 1.6$ el sistema empieza a oscilar y cualquier aumento empeoraría las cosas haciendo que el sistema se vuelva inestable.

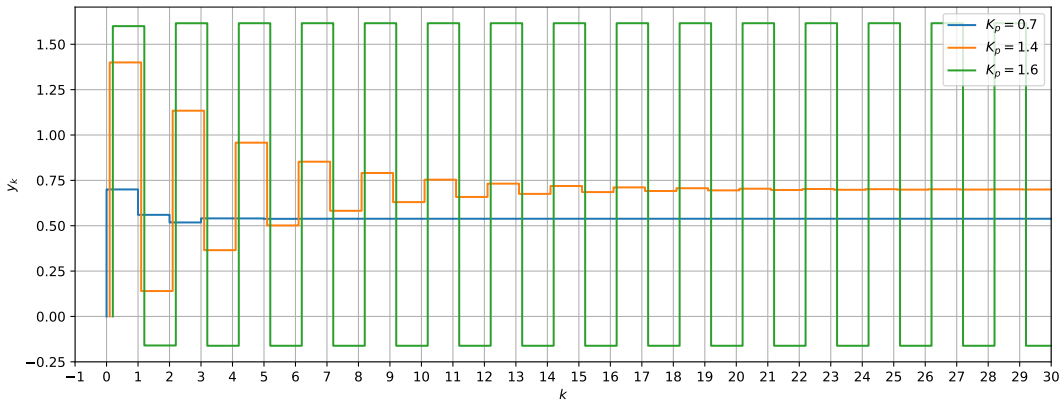


Figura 2: Respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado del problema 2.

3. Para el sistema realimentado que se muestra en el siguiente diagrama de bloques $C(s) = 1$, $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$:

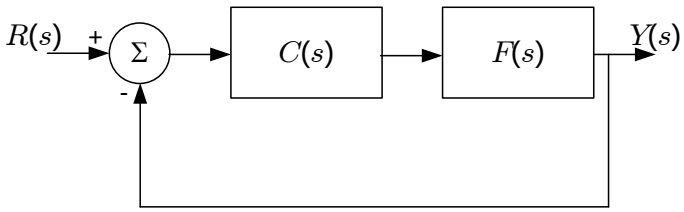


Figura 3: Sistema realimentado.

(a) Determine la función de transferencia $\bar{F}(s)$ de lazo cerrado.
(b) Encuentre una aproximación discreta de $\bar{F}(s)$ mediante el método de Tustin.
(c) Encuentre una aproximación discreta de $\bar{F}(s)$ mediante el aproximación rectangular hacia adelante.
(d) Compare la respuesta en regimen permanente ante un escalón unitario de ambas aproximaciones.

Solución:

(a) Determine la función de transferencia.

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ Y(s) &= \frac{E(s)}{s(s+1)} \Rightarrow Y(s)[s^2+s] + Y(s) = R(s) \\ F(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+s+1} \end{aligned}$$

(b) $\bar{F}_{Tustin}(z) = \bar{F}(s_{Tustin})$ donde:

$$s_{Tustin} \longleftrightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \Rightarrow \bar{F}_{Tustin}(z) = \frac{1}{\frac{4}{T^2}\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + 1}$$

(c) $\bar{F}_{Rect.Ad}(z) = \bar{F}(s_{Rect.Ad})$ donde:

$$s_{Rect.Ad} \longleftrightarrow \frac{z-1}{T} \Rightarrow \bar{F}_{Rect.Ad}(z) = \frac{1}{\frac{(z-1)^2}{T^2} + \frac{z-1}{T} + 1}$$

(d) Para aplicar el Teorema del Valor Final es primero necesario comprobar que el sistema es estable. En el caso del sistema continuo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\frac{1}{s}\right\} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Como $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$ el sistema es estable. Esto también puede observarse notando que los polos $s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ están en $\mathbb{C}_-$.
Para el sistema discretizado por Tustin, vemos que la ecuación característica es:

$$\begin{aligned} \bar{q}(z) &= 4(z-1)^2 + 2T(z-1)(z+1) + T^2(z+1)^2 \\ &= (4+2T+T^2)z^2 + 2(T^2-4)z + 4 - 2T + T^2 \end{aligned}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2(T^2-4) \pm \sqrt{4(T^2-4)^2 - 4(4+2T+T^2)(4-2T+T^2)}}{2(4+2T+T^2)} \\ &= \frac{-2(T^2-4) \pm j4T\sqrt{3}}{2(4+2T+T^2)} \end{aligned}$$

Si $T \to \infty$ ambas raíces tienden a $z = -1$, si $T \to 0$, ambas raíces tienden a $z = 1$, y se mueven dentro del círculo unitario ya que para todo $T > 0$, se cumple que $\|z\| \leq 1$. Por lo tanto, la aproximación discretizada mediante el método de Tustin es estable.

Para el sistema discretizado por la aproximación rectangular hacia adelante, la ecuación característica está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{q}(z) &= 4(z-1)^2 + T(z-1) + T^2 \\ &= 4z^2 + (T-8)z + T(T-1) + 4 \end{aligned}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(T-8) \pm \sqrt{(T-8)^2 - 16(T^2-T+4)}}{8} \\ &= \frac{-(T-8) \pm jT\sqrt{15}}{8} \end{aligned}$$

Si $T \to \infty$ ambas raíces tienden a $z = -\infty \pm j\infty$, si $T \to 0$, ambas raíces tienden a $z = 1$. En este caso es posible verificar que raíces salen del círculo unitario. Es posible calcuar para que valor T ocurre que $\|z\| \leq 1$. Esto no se pide en este problema. Lo importante es notar que en este ejercicio, para un T suficientemente grande, la aproximación rectangular hacia adelante es inestable, mientras que la aproximación de Tustin es estable.

Para calcular el valor final, aplicamos el Teorema del Valor Final en cada caso usando un escalón unitario discreto:

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

En el caso de la aproximación de Tusin,

$$y_\infty = \lim_{z \to 1}(z-1)F_{Tustin}(z)R(z) = 1$$

En el caso de la aproximación de rectangular hacia adelante,

$$y_\infty = \lim_{z \to 1}(z-1)F_{Rect.Ad}(z)R(z) = 1$$

Estos ambos casos las respuestas convergen al mismo valor, pero debe tenerse presente que la convergencia en el caso de la aproximación rectangular hacia adelante ocurrirá solo para valores de T que aseguren que las raíces estén dentro del círculo unitario.

4. Encuentre el equivalente discreto de los sistemas Σ_1 y Σ_2 con periodo de discretización $T = 0.1$.

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \quad G(s) &= \frac{3(-s+1)}{(s+1)(s+3)} \\ \Sigma_2: \quad G(s) &= \frac{e^{-Ls}}{5s+2},\ L = 0.1 = T \end{aligned}$$

   (a) Mediante aproximación rectangular hacia adelante.
   (b) Mediante aproximación rectangular hacia atrás.
   (c) Mediante aproximación de Tustin.
   (d) En forma exacta mediante retención de orden cero.

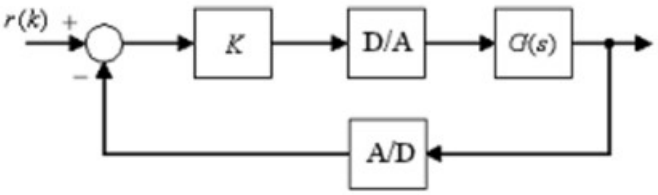


Figura 4: Sistema en lazo cerrado

Solución:

Para el caso del sistema Σ_2 puede utilizar una aproximación de Padé para el retardo en la que:

$$e^{-Ls} \approx H_{Pade}(s) = \frac{1 - k_1 s + k_2 s^2}{1 + k_1 s + k_2 s^2} = \frac{1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{12}s^2}{1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{12}s^2}$$

y los coeficientes k_i son los que se muestran en la siguiente tabla para las aproximaciones de orden $n = 1$ y $n = 2$.

$n = 1$	$n = 2$
$k_1 = \frac{L}{2}$, otros $k_i = 0$	$k_1 = \frac{L}{2}, k_2 = \frac{L^2}{12}$ otros $k_i = 0$

Tabla 1: Coeficientes de aproximación de Padé de orden $n = 1$ y $n = 2$ al retardo e^{-Ls}.

Para este ejercicio utilizaremos una aproximación de primer orden en los primeros tres métodos aproximados, es decir:

$$\begin{aligned} e^{-as} &= \frac{1 - \frac{a}{2}s}{1 + \frac{a}{2}s} \\ G(s) &= \left(\frac{2 - 0.1s}{2 + 0.1s}\right)\frac{1}{5s+2} \end{aligned}$$

Sin embargo, cabe notar que el retardo L es un múltiplo exacto de T, y por lo tanto, sería también factible reemplazar e^{-Ls} simplemente por z^{-1}. En este ejercicio podríamos haber usado z^{-1} en el caso de las aproximaciones rectangular adelante, atrás o de Tustin, pero solo usaremos el retardo z^{-1} en el caso de la retención de orden cero para mostrar la diferencia en la función de transferencia resultante exacta con respecto a las aproximaciones.

(a) Aproximación rectangular hacia adelante.

$$s_{Rect.Ad} \leftrightarrow \frac{z-1}{T}$$

Σ_1 :

$$G(s) = \frac{3(-s+1)}{(s+1)(s+3)} \xrightarrow{Rect.Ad} G(z) = \frac{3\left(-10(z-1)+1\right)}{\left(10(z-1)+1\right)\left(10(z-1)+3\right)} = \frac{-3\left(10z-11\right)}{100z^2-160z+63}$$

Σ_2 :

$$G(s) = \left(\frac{2-0.1s}{2+0.1s}\right)\frac{1}{5s+2} \xrightarrow{Rect.Ad} G(z) = \left(\frac{2-(z-1)}{2+(z-1)}\right)\frac{1}{5\cdot 10(z-1)+2} = \left(\frac{3-z}{1+z}\right)\frac{1}{50z-48}$$

(b) Aproximación rectangular hacia atrás.

$$s_{Rect.At} \leftrightarrow Rect.At\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}$$

Σ_1 :

$$G(s) = \frac{3(-s+1)}{(s+1)(s+3)} \xrightarrow{Rect.At} G(z) = \frac{3\left(-\frac{1}{0.1}\frac{z-1}{z}+1\right)}{\left(\frac{1}{0.1}\frac{z-1}{z}+1\right)\left(\frac{1}{0.1}\frac{z-1}{z}+3\right)} = \frac{3(-(z-1)+0.1z)}{((z-1)+0.1z)((z-1)+0.3z)}$$

Σ_2 :

$$G(s) = \left(\frac{2-0.1s}{2+0.1s}\right)\frac{1}{5s+2} \xrightarrow{Rect.At} G(z) = \left(\frac{2-0.1\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}}{2+0.1\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}}\right)\frac{1}{5\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}+2} = \left(\frac{2z-(z-1)}{2z+(z-1)}\right)\frac{1}{50(z-1)+2}$$

(c) Aproximaciń de Tustin.

$$s_{Tustin} \leftrightarrow Tustin\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Σ_1 :

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{3(-s+1)}{(s+1)(s+3)} \xrightarrow{Tustin} G(z) &= \frac{3\left(-\frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1}+1\right)}{\left(\frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1}+1\right)\left(\frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1}+3\right)} \\ &= \frac{3(-2(z-1)+0.1(z+1))}{(2(z-1)+0.1(z+1))(2(z-1)+0.3(z+1))} \end{aligned}$$

Σ_2 :

$$\begin{aligned} G(s) = \left(\frac{2-0.1s}{2+0.1s}\right)\frac{1}{5s+2} \xrightarrow{Tustin} G(z) &= \left(\frac{2-0.1*20\frac{z-1}{z+1}}{2+0.1\cdot 20\frac{z-1}{z+1}}\right)\frac{1}{5\cdot 20\frac{z-1}{z+1}+2} \\ &= \left(\frac{2(z+1)-0.1\cdot 20(z-1)}{2(z+1)+0.1\cdot 20(z-1)}\right)\frac{1}{6\cdot 20(z-1)+2(z+1)} \end{aligned}$$

(d) Retención de orden cero (ZOH, *zero-order hold*).

$$F(s) \xrightarrow{ZOH} \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left(\frac{F(s)}{s}\right)$$

Σ_1 :

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{3(-s+1)}{s(s+1)(s+3)}$$

Por fracciones parciales podemos descomponer como:

$$\begin{aligned} \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s} &= \frac{3(1-s)}{s(s+1)(s+3)} \\ A(s+3)s + B(s+1)s + C(s+1)(s+3) &= 3(1-s) \\ A = -3, B = 2, C &= 1 \\ G(s) = -\frac{3}{s+1} + \frac{2}{s+3} &+ \frac{1}{s} \end{aligned}$$

De la tabla de conversión se tiene:

$$\begin{aligned} F(s) \xrightarrow{ZOH} F(z) &= (1-z^{-1}) Z\left(-\frac{3}{s+1} + \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s}\right) \\ F(z) &= (1-z^{-1})\left(-\frac{3z}{z-e^{-0.1}} + \frac{2z}{z-e^{-0.3}} + \frac{z}{z-1}\right) \end{aligned}$$

Σ_2 :

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{e^{-Ls}}{s(5s+2)}$$

Por fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{A}{s} + \frac{B}{5s+2} &= \frac{1}{s(5s+2)} \\ A(5s+2) + Bs &= 1 \\ A = \frac{1}{2}, B &= -\frac{5}{2} \\ \frac{G(s)}{s} = \frac{e^{-Ls}}{2s} &- \frac{5e^{-Ls}}{2(5s+2)} \end{aligned}$$

Como e^{-Ls} es un retardo de exactamente un periodo T porque $L = T$, se puede utilizar $e^{-Ls} \to z^{-1}$

$$F(s) \xrightarrow{ZOH} F(z) = \left(1 - z^{-1}\right) z^{-1} \mathcal{Z}\left(\frac{1}{2s} - \frac{5}{2(5s+2)}\right)$$

Luego:

$$F(z) = (1-z^{-1}) z^{-1} \left(\frac{z}{2(z-1)} - \frac{z}{2(z-e^{-\frac{2}{50}})}\right)$$

5. Discretice el sistema:

   (a) $G(s) = \frac{1}{s(s+0.5)}$

   (b) $G(s) = \frac{e^{-2s}}{5s+1}$

mediante una retención de orden cero (ZOH) con periodo de muestreo $T = 1$ s (ver figura 5). Donde

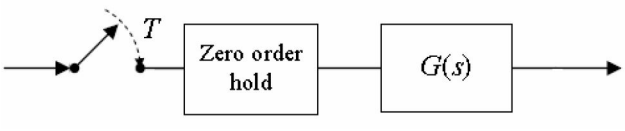


Figura 5: Sistema con retenedor de orden cero.

$T = 1$ segundo y la planta esta dada por:

Solución:

(a) Dado $G(s) = \frac{1}{s(s+0.5)}$ entonces

$$\begin{aligned}
G(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s^2(s+0.5)}\right) \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{z}{s^2}+\frac{4}{s+0.5}-\frac{4}{s}\right) \\
&= (1-z^{-1})\left[\mathcal{Z}\left(\frac{2}{s^2}\right)+\mathcal{Z}\left(\frac{4}{s+0.5}\right)-\mathcal{Z}\left(\frac{4}{s}\right)\right] \\
&= (1-z^{-1})\left[2\frac{Tz}{(z-1)^2}+4\frac{z}{z-e^{-\frac{1}{2}T}}-4\frac{z}{z-1}\right] \\
&= (1-z^{-1})\left[\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{4z}{z-e^{-\frac{1}{2}T}}-\frac{4z}{z-1}\right] \\
&= \frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{4z}{z-e^{-\frac{1}{2}}}-\frac{4z}{z-1}-\frac{2}{(z-1)^2}-\frac{4}{z-e^{-\frac{1}{2}}}+\frac{4}{z-1}
\end{aligned}$$

Evaluando $e^{-\frac{1}{2}} = 0.606$, finalmente

$$\Rightarrow G(z) = \frac{0.426z+0.361}{z^2-1.606z+0.606}.$$

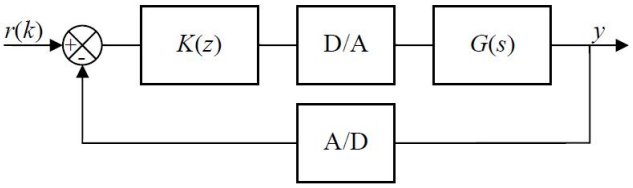
(b) Considerando que e^{-Ls} con $n = \frac{L}{T} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow e^{-nTs} = z^{-n}$, en este caso $n = L/T = 2/1$, y e^{-2s} se reemplaza por z^{-2}. Es decir, para discretizar $G(s) = \frac{e^{-2s}}{5s+1}$ podemos trabajar con la planta sin retardo:

$$G'(s) = \frac{1}{5s+1}$$

y colocar z^{-2} en reemplazo de e^{-2s}:

$$\begin{aligned}
G(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{G'(s)}{s}z^{-2}\right) \\
&= (1-z^{-1})z^{-2}\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s(5s+1)}\right) \\
&= (1-z^{-1})z^{-2}\left[\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s}\right)-\mathcal{Z}\left(\frac{5}{5s+1}\right)\right] \\
&= (1-z^{-1})z^{-2}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-\frac{1}{5}T}}\right] \\
&= -\frac{e^{-\frac{1}{5}}-1}{z^2(z-e^{-\frac{1}{5}})} \\
&= \frac{1-e^{-\frac{1}{5}}}{z^2(z-e^{-\frac{1}{5}})}.
\end{aligned}$$

6. Considere el siguiente sistema



en el que los conversores operan con período de muestreo $T = 1$ s. La planta $G(s)$ es:

$$G(s) = \frac{e^{-Ls}}{5s+1}$$

con $L = 1$ s y el controlador tiene una función de transferencia $K(z) = K$.

(a) Obtenga la función de transferencia discreta de la planta en lazo abierto usando la aproximación de Tustin.

(b) Calcule la ganancia K para obtener un error máximo de 2% en estado estacionario ante una entrada en forma de escalón unitario.

Solución:

(a) Usando la aproximación de Tustin

$$s_{Tustin} \leftrightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

con $T = 1$ s y notando que el término e^{-Ls} corresponde a un retardo continuo de $L = 1$ s que justo coincide con un período de muestreo T, lo que permite reemplazar e^{-s} por z^{-1} porque $e^{-nTs} = z^{-n}$, entonces:

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 + 5\frac{2}{1}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{11z^2 - 9z}$$

(b) Para calcular la ganancia K que asegura un error máximo de 2% en estado estacionario ante una entrada escalón unitario es necesario encontrar la función de transferencia del error, verificar su estabilidad y luego aplicar el Teorema de Valor Final.
La función de transferencia del error es:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} = \frac{1}{1 + K\frac{z+1}{11z^2-9z}} = \frac{11z^2 - 9z}{11z^2 + (K-9)z + K}$$

Es posible apreciar que las raíces son:

$$z = \frac{9 - K \pm \sqrt{81 - 18K + K^2 - 44K}}{22} = \frac{9 - K \pm \sqrt{81 - 62K + K^2}}{22}$$

estas raíces se mueven desde los polos en $z = 0$ y $z = \frac{9}{11}$ dentro del círculo unitario y luego siguen una asíntota vertical que tiene punto de partida: $z_a = \frac{9}{22}$. Calculando el punto de despegue del eje real:

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{F(z)} = (11z^2 - 9z) - (z+1)(22z-9) = 0 \;\Rightarrow\; 11z^2 + 22z - 9 = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + \frac{9}{11}}}{2}$$

se obtiene $z = -1 + \sqrt{\frac{20}{11}} = 0.35$, ya que la raíz debe ubicarse entre los polos. Comparando con la posición de la asíntota correspondiente a la línea vertical por $z_a = \frac{9}{22} = 0.41$, esto siginifica que el círculo unitario se corta en un punto que tiene componente horizontal cercana a 0.35 o 0.41. Para saber el punto exacto, debemos encontrar un punto $z = e^{j\theta}$ que satisface la ecuación característica, es decir, debemos resolver:

$$\begin{aligned}
\bar{q}(e^{j\theta}) &= 11\left[e^{j\theta}\right]^2 - 9e^{j\theta} + Ke^{j\theta} + K = 0 \\
&= 11[\cos^2(\theta) + j2\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin^2(\theta)] + (K-9)\cos(\theta) + j(K-9)\sin(\theta) + K = 0 \\
&\Rightarrow 11\cos^2(\theta) - 11\sin^2(\theta) + (K-9)\cos(\theta) + K = 0 \\
&\Rightarrow 22\cos(\theta)\sin(\theta) + (K-9)\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{(K-9)}{22}
\end{aligned}$$

Reemplazando la última ecuación en la penúltima se obtiene:

$$\begin{aligned}
11\frac{(K-9)^2}{22^2} - 11\left(1 - \frac{(K-9)^2}{22^2}\right) - (K-9)\frac{(K-9)}{22} + K &= 0 \\
22\frac{(K-9)^2}{22^2} - \frac{(K-9)^2}{22} + K - 11 &= 0 \\
K &= 11
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cos(\theta) = -\frac{11-9}{22} = -0.09$, $\theta = \pm 95.22°$, $\sin(\pm\theta) = \pm 0.9959$. Se observa que el punto de cruce del círculo unitario es casi $z_c \approx 0 \pm j$. Por otro lado, la ganancia crítica es $K_c = 11$. Ahora verificaremos que existe una ganancia $K < K_c$ que asegura el requerimiento de que el error permanente sea inferior a 2%.
Considerando el escalón unitario en la referencia:

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

y aplicando el Teorema del Valor Final:

$$e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}\cancel{(z-1)}\frac{11z^2 - 9z}{11z^2 + (K-9)z + K}\frac{z}{\cancel{z-1}} = \frac{1}{1+K}$$

Luego, para un error inferior al 2% se requiere:

$$\frac{1}{1+K} < \frac{2}{100} \Rightarrow 2 + 2K > 100 \Rightarrow K > 49.$$

Sin embargo, a esta ganancia el sistema es inestable, luego el controlador jamás podrá tener un 2% de error, y será necesario considerar un controlador PI discreto para eliminar el error en régimen permanente.

7. Repita el problema de la pregunta anterior, pero considere ahora un retardo $L = 2$ s y un periodo de muestreo $T = 2$ s.

Solución:

(a) Usando la aproximación de Tustin

$$s_{Tustin} \leftrightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

con $T = 2$ s y notando que el término e^{-Ls} corresponde a un retardo continuo de $L = 2$ s que justo coincide con un período de muestreo T, lo que permite reemplazar e^{-2s} por z^{-1} porque $e^{-nTs} = z^{-n}$, entonces:

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 + 5\frac{2}{2}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{6z^2 - 4z}$$

(b) Para calcular la ganancia K que asegura un error máximo de 2% en estado estacionario ante una entrada escalón unitario es necesario encontrar la función de transferencia del error, verificar su estabilidad y luego aplicar el Teorema de Valor Final.
La función de transferencia del error es:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} = \frac{1}{1 + K\frac{z+1}{6z^2-4z}} = \frac{6z^2 - 4z}{6z^2 + (K-4)z + K}$$

Es posible apreciar que las raíces son:

$$z = \frac{4 - K \pm \sqrt{16 - 8K + K^2 - 24K}}{12} = \frac{4 - K \pm \sqrt{16 - 32K + K^2}}{12}$$

estas raíces se mueven desde los polos en $z = 0$ y $z = \frac{2}{3}$ dentro del círculo unitario y luego siguen una asíntota vertical que tiene punto de partida: $z_a = \frac{1}{3}$. Calculando el punto de despegue del eje real:

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{F(z)} = (6z^2 - 4z) - (z+1)(12z - 4) = 0 \;\Rightarrow\; 6z^2 + 12z - 4 = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + \frac{2}{3}}}{2}$$

se obtiene $z = -1 + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0.29$, ya que la raíz debe ubicarse entre los polos. Comparando con la posición de la asíntota correspondiente a la línea vertical por $z_a = \frac{1}{3} = 0.33$, esto siginifica que el círculo unitario se corta en un punto que tiene componente horizontal cercana a 0.29 o 0.33. Para saber el punto exacto, debemos encontrar un punto $z = e^{j\theta}$ que satisface la ecuación característica, es decir, debemos resolver:

$$\begin{aligned}
\bar{q}(e^{j\theta}) &= 6\left[e^{j\theta}\right]^2 - 4e^{j\theta} + Ke^{j\theta} + K = 0 \\
&= 6[\cos^2(\theta) + j2\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin^2(\theta)] + (K-4)\cos(\theta) + j(K-4)\sin(\theta) + K = 0 \\
&\quad \Rightarrow 6\cos^2(\theta) - 6\sin^2(\theta) + (K-4)\cos(\theta) + K = 0 \\
&\quad \Rightarrow 12\cos(\theta)\sin(\theta) + (K-4)\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{(K-4)}{12}
\end{aligned}$$

Reemplazando la última ecuación en la penúltima se obtiene:

$$\begin{aligned} 6\frac{(K-4)^2}{12^2} - 6\left(1 - \frac{(K-4)^2}{12^2}\right) - (K-4)\frac{(K-4)}{12} + K &= 0 \\ 12\frac{(K-4)^2}{12^2} - \frac{(K-4)^2}{12} + K - 6 &= 0 \\ K &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cos(\theta) = -\frac{6-4}{12} = -0.17$, $\theta = \pm 99.59°$, $\sin(\pm\theta) = \pm 0.9860$. Se observa que el punto de cruce del círculo unitario es casi $z_c \approx 0 \pm j$. Por otro lado, la ganancia crítica es $K_c = 6$. Ahora verificaremos que existe una ganancia $K < K_c$ que asegura el requerimiento de que el error permanente sea inferior a 2%.

Considerando el escalón unitario en la referencia:

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

y aplicando el Teorema del Valor Final:

$$e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}\cancel{(z-1)}\frac{6z^2-4z}{6z^2+(K-4)z+K}\frac{z}{\cancel{z-1}} = \frac{1}{1+K}$$

Luego, para un error inferior al 2% se requiere:

$$\frac{1}{1+K} < \frac{2}{100} \Rightarrow 2 + 2K > 100 \Rightarrow K > 49.$$

Sin embargo, a esta ganancia el sistema es inestable, luego el controlador jamás podrá tener un 2% de error, y será necesario considerar un controlador PI discreto para eliminar el error en régimen permanente.

Este resultado es idéntico al del problema anterior. Si bien el retardo es el doble que el del sistema anterior, también el periodo de muestreo se duplicó. Puede repetir este problema considerando un tiempo de muestreo $T = 1$ s, pero un retardo $L = 2T = 2$ s. También puede comprobar si un controlador PI discreto efectivamente elimina el error en régimen permamente.

8. Encuentre la representación discreta en el estado del sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bu \\ y &= x \end{aligned}$$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones del sistema se tiene que:

$$Y(s) = X(s) = (s-a)^{-1} b U(s)$$

El equivalente discreto exacto de la planta utilizando una retención de orden cero (ZOH) está dado por:

$$F(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{F(s)}{s} &= \frac{b}{s(s-a)} \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Recordando las equivalencias de transformadas:

$f(kT)$	$F(s)$	$F(z)$
$s(kT)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{(kT)^2}{2!}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-akT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

Luego,

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{X(z)}{U(z)} &= (1 - z^{-1}) \frac{b}{a} \left(\frac{z}{z - e^{aT}} - \frac{z}{z-1} \right) \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{z-1}{z - e^{aT}} - 1 \right) \\ &= \frac{b}{a} \frac{e^{aT} - 1}{z - e^{aT}} \end{aligned}$$

De esta manera,

$$X(z)(z - e^{aT}) = \frac{b}{a}(e^{aT} - 1) U(z)$$

y aplicando la transforma $\mathcal{Z}$ inversa:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^{aT} x(k) + \frac{b}{a}(e^{aT} - 1) u(k) \\ &= e^{aT} x(k) + \int_0^T e^{a\tau} d\tau \, b \, u(k) \end{aligned}$$

El sistema discreto equivalente en el estado estará entonces dado por:

$$x(k+1) = a_d x(k) + b_d u(k)$$

con

$$\begin{aligned} a_d &= e^{aT} \\ b_d &= \int_0^T e^{a\tau} d\tau \, b \end{aligned}$$

9. Encuentre la representación discreta exacta en el estado del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^p$.

Solución:

La representación discreta exacta corresponde a la aplicación de una retención de orden cero (ZOH) al sistema continuo. Veremos que las matrices para el sistema discreto equivalente, $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{B}_d$, $\mathbf{C}_d$, y $\mathbf{D}_d$ corresponden a una generalización del resultado obtenido en el ejercio anterior. Sin embargo, en el caso matricial sería necesario calcular $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}(sI-\mathbf{A})^{-1}\right\}$ en reemplazo de $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}(sI-a)^{-1}\right\}$, lo cual puede ser tedioso. Por esta razón, una manera sencilla para obtener el equivalente discreto que no requiere de la transformada de Laplace y la tranformada $\mathcal{Z}$ asociada es emplear la ecuación de la respuesta dinámica del sistema en el tiempo, la cual está dada por:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

La ecuación anterior nos entrega una ecuación de diferencia si la integración se hace durante un periodo de muestreo T iniciando en $t_0=kT$ y terminando en $t=kT+T=(k+1)T$, es decir:

$$\mathbf{x}\left((k+1)T\right)=e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Considerando que la señal de control $\mathbf{u}$ se mantiene constante durante el periodo debido a la retención de orden cero (ZOH), se cumple que:

$$\mathbf{u}(\tau)=\mathbf{u}(kT),\quad kT\le\tau<kT+T$$

La solución se puede simplificar mediante el cambio de variable

$$t=(k+1)T-\tau$$

de modo que

$$\begin{aligned}\tau=kT &\rightarrow t=T\\ \tau=(k+1)T &\rightarrow t=0\\ d\tau &= -dt\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(k+1)=e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(k)+\int_{0}^{T}e^{\mathbf{A}t}dt\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

donde $\mathbf{x}(k+1)\equiv\mathbf{x}\left((k+1)T\right)$, $\mathbf{x}(k)\equiv\mathbf{x}\left(kT\right)$, $\mathbf{u}(k)\equiv\mathbf{u}(kT)$.

Finalmente, la ecuación de diferencia se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}_d\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_d\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}_d\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

con la matrices

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}T}\\ \mathbf{B}_d &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\gamma}d\gamma\mathbf{B}\\ \mathbf{C}_d &= \mathbf{C}\\ \mathbf{D}_d &= \mathbf{D}\end{aligned}$$

Nótese que el resultado anterior es análogo al obtenido en el caso escalar (ver problema anterior) empleando las equivalencias entre transformadas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{Z}$, en vez de la integración en un periodo.

Cabe también destacar algunas propiedades que facilitan en muchos casos el cálculo de las matrices $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{B}_d$, $\mathbf{C}_d$, $\mathbf{D}_d$ para un sistema discreto dado. Considere la expansión de Taylor de $e^{\mathbf{A}T}$:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}+\mathbf{A}T+\frac{\mathbf{A}^2T^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3T^3}{3!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^kT^k}{k!}$$

La matriz de transición de estado $e^{\mathbf{A}T}$ puede re-escribirse como:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}+\mathbf{A}T\Psi$$

con

$$\Psi = \mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{2!}+\frac{\mathbf{A}^2T^2}{3!}+\frac{\mathbf{A}^3T^3}{4!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^kT^k}{(k+1)!}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_d &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}d\tau\mathbf{B} = \int_0^T \mathbf{I}+\mathbf{A}\tau+\frac{\mathbf{A}^2\tau^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3\tau^3}{3!}+\cdots\, d\tau\mathbf{B}\\ &= \left(T+\frac{\mathbf{A}T^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^2T^3}{3!}+\frac{\mathbf{A}^3T^4}{4!}+\cdots\right)\mathbf{B}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^kT^{k+1}}{(k+1)!}\right)\mathbf{B}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^kT^k}{(k+1)!}\right)T\mathbf{B}\\ &= \Psi T\mathbf{B}\end{aligned}$$

Por último, cabe notar que el calculo de la serie Ψ se puede descomponer como:

$$\begin{aligned}\Psi &= \mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{2}\Bigg(_1\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{3}\Bigg(_2\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{4}\Bigg(_3\cdots\frac{\mathbf{A}T}{N-1}\Bigg(_{N-2}\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{N}\Bigg(_{N-1}\cdots\Bigg)_{N-1}\Bigg)_{N-2}\cdots\Bigg)_3\Bigg)_2\Bigg)_1\\ &= \mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{2}\left(\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{3}\left(\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{4}\left(\cdots\frac{\mathbf{A}T}{N-1}\left(\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{N}\left(\cdots\right)\right)\cdots\right)\right)\right)\end{aligned}$$

La representación anterior de la serie tiene mejores propiedades numéricas que la serie directa, ya que en este caso la evalución de Ψ no requiere de calcular las potencias de las matrices $\mathbf{A}^kT^k$, $k=0,1,2,\ldots$, sino simplemente la división de $\mathbf{A}T$ por $(k+1)$, $k=0,1,2,\ldots$, lo que resulta en una acumulación de errores numéricos por redondeo del hardware mucho menores puesto que las potencias de $\mathbf{A}T$ resultan en forma automática por la multiplicación iterativa de los términos de la forma $\frac{\mathbf{A}T}{k}$ por $\left(\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}T}{k+1}\right)$.

En Matlab® o Python las matrices $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{B}_d$, $\mathbf{C}_d$, $\mathbf{D}_d$ se obtienen mediante el procedimiento descrito anteriormente usando la función `c2d` (continuous-to-discrete). Otros métodos para calcular $\mathbf{A}_d$ y $\mathbf{B}_d$ pueden encontrarse en los siguientes referencias clásicas:

- G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman. *Digital Control of Dynamical Systems*, 3rd ed., Addison-Wesley, 1998.
- C. Moler, C. van Loan. Ninteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Review*, v. 20, n. 4, págs. 801–836, 1978.

¿Cuál será la función de traferencia correspondiente al sistema discreto equivalente?

Si $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(k)$ y $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d\mathbf{u}(k)$, aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ se obtiene la función de transferencia como:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad = \quad \mathbf{C}_d(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d$$

10. Para la siguiente planta:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

(a) Obtenga el modelo discreto equivalente exacto en el estado empleando una retención de orden cero (ZOH) con periodo de muestreo T.

(b) Obtenga la función de transferencia del modelo discreto equivalente.

(c) Calcule las matrices de controlabilidad y observabilidad del sistema. ¿Cómo afecta el periodo de muestreo a la controlabilidad y observabilidad del sistema?

(d) Determine que efecto tiene un aumento del periodo de muestreo sobre la estabilidad del sistema en lazo abierto.

(e) Determine que efecto tiene un aumento del periodo de muestreo sobre la estabilidad del sistema en lazo cerrado con una ganancia proporcional K.

(f) Diseñe un controlador digital que garantice que el sistema en lazo cerrado tenga una frecuencia natural $\omega_n \approx \pi/10$ rad/s, un coeficiente de amortiguación $\xi = 0.7$, y un error permanente cero.

(g) Empleando el método de re-localización de polos mediante la retroalimentación lineal del estado construya un controlador que cumpla las mismas especificaciones que en el caso anterior.

Solución:

(a) Empleando los resultado de la sección es posible obtener de manera sencilla las matrices $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{B}_d$, $\mathbf{C}_d$, $\mathbf{D}_d$ de la representación discreta equivalente en el estado. Para este fin, será necesario primero definir una representación en el estado del sistema de tiempo contínuo. Eligiendo la forma canónica controlable se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D} &= 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}T + \frac{\mathbf{A}^2T^2}{2} + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_d = \Psi T \mathbf{B} &= \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2T^2}{3!} + \cdots \right) T\mathbf{B} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & T/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Método 1 (SS-C2D): Empleando las matrices $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{B}_d$, $\mathbf{C}_d$ y $\mathbf{D}_d$ obtenidas anteriormente, la función de transmitancia estará entonces dada por

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} &= \frac{\text{Adj}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)}{\det\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)} \\ \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} z-1 & T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{T}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} F(z) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{T}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \\ &= \frac{T^2}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{T^2}{(z-1)^2}\right) \\ &= \frac{T^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Métdo 2 (TF-C2D): Cabe notar que el mismo resultado se obtiene empleando la discretización de la función de transferencia de la planta contínua mediante retención de orden cero (ZOH) según:

$$\begin{aligned} F(z) &= \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left(\frac{F(s)}{s}\right) \\ &= \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s^3}\right) \\ &= \left(\frac{z-1}{z}\right) \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{T^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

(c) La matriz de controlabilidad del sistema discreto es:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d\mathbf{B}_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{3T^2}{2} \\ T & T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dado que $\det(\mathcal{C}) = -T^3 \neq 0$, para todo $T > 0$, es posible concluir que la discretización no afecta la controlabilidad de este sistema.
De manera similar, se obtiene la matriz de observabilidad:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como la matriz de observabilidad satisface que $\det(\mathcal{O}) = T \neq 0$, para todo $T > 0$, es posible concluir que la discretización tampoco afecta la observabilidad del estado del integrador doble.

(d) La estabilidad del sistema en lazo abierto se establece en base a la ubicación de los polos del sistema y su ubicación con respecto al cículo unitario en el plano complejo $\mathcal{Z}$. De la función de transferencia es posible notar fácilmente que el sistema posee dos polos en $z = 1$ y que son independientes del periodo de muestreo. Luego, el sistema en lazo abierto es críticamente estable independientemente sea cuál sea el periodo de muestreo del ZOH.

(e) Si el sistema se realimenta con un controlador digital de ganancia proporcional, la función de transferencia del lazo cerrado será:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{KF(z)}{1+KF(z)} \\ &= \frac{KT^2(z+1)}{2(z-1)^2+KT^2(z+1)} \\ &= \frac{KT^2(z+1)}{2z^2+(KT^2-4)z+KT^2+2}\end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación característica están dadas por

$$\begin{aligned}z &= \frac{-(KT^2-4)\pm\sqrt{(KT^2-4)^2-8(KT^2+2)}}{4} \\ &= \frac{(4-\alpha)\pm\sqrt{(4-\alpha)^2-8(\alpha+2)}}{4} \\ &= \frac{(4-\alpha)\pm\sqrt{\alpha^2-16\alpha}}{4}\end{aligned}$$

con $\alpha = KT^2$. El sistema en lazo cerrado será estable si $\|z\| < 1$, es decir si:

$$\begin{aligned}(4-\alpha)\pm\sqrt{\alpha^2-16\alpha} &> -4 \\ \pm\sqrt{\alpha^2-16\alpha} &> \alpha-8 \\ \alpha^2-16\alpha &> \alpha^2-16\alpha+64 \\ 0 &> 64 \quad (\rightarrow\leftarrow)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(4-\alpha)\pm\sqrt{\alpha^2-16\alpha} &< 4 \\ \pm\sqrt{\alpha^2-16\alpha} &< \alpha \\ \alpha^2-16\alpha &< \alpha^2 \\ \alpha &> 0\end{aligned}$$

Sin embargo, con $\alpha > 0$ se tiene que $\|z\| > 1$, luego no existe un controlador proporcional que estabilice el sistema. Esto resulta evidente graficando el LGR y notando que las raíces parten en los dos polos parten en $z = 1$, rodean el circulo unitario y una converge al cero en $z = -1$ mientras que la otra se mueve a lo largo del eje real negativo hacia $z = -\infty$.

Por lo tanto, independiente del tiempo de muestreo el sistema es inestable y no se puede concluir nada con respecto a T, excepto que un mayor T solo contribuye a que el sistema se vuelva más inestable aún.

(f) Una alternativa para diseñar el controlador digital consiste primero en identificar una función de transferencia para el controlador en el dominio de Laplace tal que el sistema ideal de tiempo continuo posea una respuesta según las especificaciones indicadas.

Habiendo determinado que el controlador proporcional es insuficiente. Asumiremos un controlador de adelanto-atraso de la forma:

$$C(s) = K\frac{T_a s + 1}{T_d s + 1}$$

Luego, la función de transferencia del lazo cerrado estará dada por:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)} \\ &= \frac{K(T_a s + 1)}{(T_d s + 1)s^2 + K(T_a s + 1)}\end{aligned}$$

Como se requiere quiere que el error en régimen permanente sea nulo, aplicando el teorema del valor final a la función de transferencia del error para cambios de escalón en la referencia se tiene que:

$$\begin{aligned}e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1 + C(s)F(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{(T_d s + 1)s^2}{(T_d s + 1)s^2 + K(T_a s + 1)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Por el simple hecho de que la planta es un doble integrador, vemos que en forma natural esta cancela el error permanente. Por lo tanto, en la selección de las constantes K, T_a y T_d no es necesario realizar mayores consideraciones para suprimir el error permanente puesto que la planta misma se encarga de eliminarlo.

Por otro, lado se aprecia que la planta en lazo cerrado con el compensador define un sistema de tercer orden:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KT_a s + K}{T_d s^3 + s^2 + KT_a s + K}$$

Se desea que este sistema se aproxime al sistema:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

el cual tiene la misma ganancia estática que el sistema original.

Luego es posible establecer ciertas correspondencias:

$$\begin{aligned}T_d &= \approx 0 \\ 2\xi\omega_n &= KT_a \\ KT_a &= 0 \Rightarrow \xi\omega = 0_n \\ K &= \omega_n^2\end{aligned}$$

Claramente, no es posible lograr un comportamiento idéntico al de una planta de segundo orden con el compensador de adelanto y atraso, por lo que se realizarán las siguientes aproximaciones en

la definición de las constantes considerando las especificaciones:

$$\begin{aligned} T_d &= 0.01 \\ K &= \omega_n^2 = \frac{\pi^2}{100} \approx 0.1 \\ T_a &= \frac{2\xi\omega_n}{K} \approx \frac{2 \cdot 0.7 \cdot 0.3}{0.1} \approx 4 \end{aligned}$$

Con las definiciones anteriores la función de transferencia del compensador estará dada por:

$$C(s) = 0.1\frac{4s+1}{0.01s+1} = 40\frac{s+0.25}{s+100}$$

Ahora queda encontrar una representación discreta del controlador. Para esto se aplicara la transformación exacta mediante retención de orden cero a las componentes básicas del controlador:

$$\begin{aligned} C(z) &= 40\left((1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+100}\right) + (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{0.25}{s(s+100)}\right)\right) \\ &= 40\left((1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+100}\right) + 0.0025(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+100}\right)\right) \\ &= 40\left((1-z^{-1})\frac{z}{z-e^{-100T}} + 0.0025(1-z^{-1})\frac{z}{z-1} - 0.0025(1-z^{-1})\frac{z}{z-e^{-100T}}\right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{399}{10}\frac{z-1}{z-e^{-100T}} \end{aligned}$$

Repita este problema empleando un controlador PID, considerando si realmente es necesario que sea PID o basta con un controlador P, PI o PD.

(g) El controlador obtenido en la sección anterior en lazo cerrado con la planta resultan en un sistema con polos ubicados según:

$$\begin{aligned} q(z) &= 1 + C(z)F(z) = 0 \\ &= 1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{399}{10}\frac{z-1}{z-e^{-100T}}\right)\frac{T^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2} \\ &= 20(z-e^{-100T})(z-1)^2 + (z-e^{-100T} + 399(z-1))T^2(z+1) \\ &= 20(z-\alpha)(z-1)^2 + T^2z(z+1) - T^2\alpha(z+1) + 399T^2(z-1)(z+1) \\ &= 20z^3 + 20(20T^2 - 2 - \alpha)z^2 + (T - T^2\alpha + 40\alpha)z + 20 - (399-\alpha)T^2 - 20\alpha \end{aligned}$$

con $\alpha = e^{-100T}$.

Para poder obtener una expresión es necesario determinar el tiempo de muestreo. Dado que $\omega_n = \frac{\pi}{10}$ rad/s, una elección razonable para T debería ser tal que la frecuencia de muestreo $w_s = 2000w_n$, es decir:

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T} = 2000\omega_n$$

luego,

$$T = \frac{2\pi}{2000\frac{\pi}{10}} = 0.01 \text{ s}$$

Substituyendo $T = 0.01$ s se tiene:

$$q(z) \approx 20z^3 - 47.32z^2 + 14.72z + 12.60$$

cuyas racíces son:

$$\begin{aligned} z_1 &\approx 1.73 \\ z_2 &\approx 1.00 \\ z_3 &\approx -0.36 \end{aligned}$$

Mediante la retroalimentación de estado solo dos raíces pueden reubicarse. Se buscará reubicar las raices inestables z_1 y z_2 en $z_1, z_2 = 0.8$, dejando $z_3 = -0.36$.
La representación discreta en el estado de la planta discreta en la forma canónica controlable es:

$$\mathbf{A}_{dc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Con la retroalimentación $u = -\mathbf{K}x$, tendremos que:

$$\begin{aligned} -1 - K_1 &= \frac{12.60}{47.32} \\ 2 - K_2 &= \frac{14.72}{47.32} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} K_1 &= -1.26 \\ K_2 &= 1.69 \end{aligned}$$

Con estas ganancias, los polos de sistema en lazo cerrado quedarán en las racíces de:

$$\det\left(z\mathbf{I} - [\mathbf{A}_{dc} - \mathbf{B}_{dc}\mathbf{K}]\right) = \det\begin{pmatrix} z & -1 \\ -0.26 & z + 0.31 \end{pmatrix} = 0$$

cuyas raíces son:

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.69 \\ z_2 &= 0.37 \end{aligned}$$

Ambas raíces yacen dentro del círculo unitario. Luego el sistema debería ser estable, pero su comportamiento no será exactamente el mismo al obtenido empleado el enfoque de la punto anterior. Para establecer los índices de desempeñno será necesario realizar una simulación numérica.

11. Considere el siguiente sistema formado por el estanque de la figura:

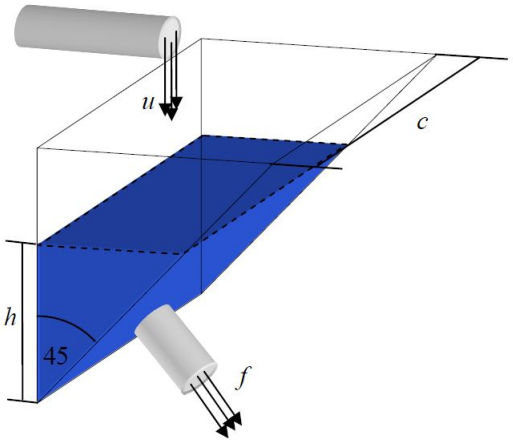


Figura 6: Estanque

En donde h es el nivel del agua, u es el flujo de entrada, f el flujo de salida, $c = 4m$, el área de la sección transversal del tubo de salida es $a = 0,5m^2$, y se considera que $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Solución:

(a) Encuentre un modelo dinámico del proceso que relacione la altura del agua h con el flujo de entrada u.
Podemos calcular la velocidad de salida del agua del estanque a través del principio de Bernoulli de conservación de energía.

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

Donde P es la presión, ρ la densidad de líquido, v la velocidad y h la altura. Si consideramos que las presiones y las densidades son iguales, y tomamos como punto 1 la superficie del líquido y como punto 2 la salida a través del tubo, podemos obtener

$$v = \sqrt{2gh}$$

De esta forma, el flujo f de salida será

$$f = av = a\sqrt{2gh}$$

El volumen de agua en el estanque está dado por

$$V = \frac{h^2 c}{2}$$

Luego, la variación del volumen del agua estará dada por la diferencia entre el flujo de entrada y el de salida, es decir

$$\frac{\partial V}{\partial t} = u - f$$

Reemplazando lo obtenido en (1) y (2), tenemos

$$ch\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}$$

(b) Encuentre el punto de equilibrio cuando $h_0 = 3m$ y linealice el modelo en torno a él.
Ahora, queremos encontrar el punto de equilibrio cuando $h_0 = 3$. Si consideramos que en equilibrio no hay variación de altura, podemos decir que $\dot{h}_0 = 0$. Reemplazando estos valores en (3), se obtiene

$$ch_0\dot{h}_0 = u_0 - a\sqrt{2gh_0}$$

de lo que se obtiene, reemplazando también los parámetros, que

$$u_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2.10.3} = \sqrt{15} = 3.873$$

Luego, el punto de equilibrio está dado por $p_0 = (u_o, h_0, \dot{h}_0)$. Para linealizar el sistema en torno a p_0, reordenamos la ecuación (3) de la siguiente forma

$$f(u, h, \dot{h}) = ch\dot{h} - u + a\sqrt{2gh} = 0$$

Linealizamos usando la aproximación de Taylor de primer orden, de la siguiente forma

$$f(p_0) + \tfrac{\partial f}{\partial u}(p_0)(u - u_0) + \tfrac{\partial f}{\partial h}(p_0)(h - h_0) + \tfrac{\partial f}{\partial \dot{h}}(p_0)(\dot{h} - \dot{h}_0) = 0$$

Obviamente, $f(p_0) = 0$. Evaluando, obtenemos el modelo linealizado

$$-(u - u_0) + \left(c\dot{h}_0 + a\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\right)(h - h_0) + (ch_0)(\dot{h} - \dot{h}_0) = 0$$

(c) Encuentre la función de transferencia $G(s) = \frac{H(s)}{U(s)}$.
Para obtener la función de transferencia, escribimos el modelo linealizado de la ecuación (4)

$$-\Delta u + \left(c\dot{h}_0 + a\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\right)\Delta h + (ch_0)\Delta\dot{h} = 0$$

Consideramos ahora los siguientes pares de transformaciones de Laplace

$$u(t) \leftrightarrow U(s)$$
$$h(t) \leftrightarrow H(s)$$
$$\dot{h}(t) \leftrightarrow sH(s) - h(0)$$

Sin embargo, siempre podemos considerar el punto p_0 como referencia del sistema, de tal forma que las transformadas de laplace se pueden considerar como

$$\Delta u(t) \leftrightarrow U(s)$$

$$\Delta h(t) \leftrightarrow H(s)$$

$$\Delta\dot{h}(t) \leftrightarrow sH(s)$$

Reemplazando (6), (7) y (8) en la ecuación (5), obtenemos

$$U(s) + \left(c\dot{h_0} + a\sqrt{\tfrac{g}{2h_0}}\right) H(s) + (ch_0)sH(s) = 0$$

Despejando $H(s)/U(s)$, se obtiene finalmente

$$G(s) = \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{1}{c\dot{h_0} + a\sqrt{\frac{g}{2h_0} + sch_0}}$$

Evaluando todos los parámetros en la función encontrada en (9), se obtiene

$$G(s) = \frac{1/12}{s + \sqrt{15}/72} = \frac{0,0833}{s + 0,0538} = \frac{1,548}{1 + 18,587s}$$

De lo que se puede leer que el sistema tiene una ganancia de $1,548$, y una constante de tiempo de $T = 18,548$.

(d) Considere que se toman datos de u y h cada $T = 2$ segundos. Encuentre un modelo en tiempo discreto para el proceso, encuentre la ecuación en diferencias y la ecuación de estado.
Para discretizar, pueden usarse distintos métodos. El más utilizado es la retención de orden cero (o Zero Order Hold), que está dada por

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Por otro lado, tenemos la aproximaci´on de Tustin, en la que realizamos la transformación

$$s \leftrightarrow \tfrac{2}{T}\tfrac{z-1}{z+1}$$

Usando esta última aproximación, sobre la planta G(s) obtenida en (10) con un muestreo de $T = 2$, obtenemos

$$G(z) = \frac{0,0833}{\frac{2}{2}\frac{z-1}{z+1} + 0,0538} = \frac{0,0833z + 0.0833}{1,054z - 0.9462}$$

Para encontrar la ecuación de diferencias, consideramos que

$$\tfrac{h(k)}{u(k)} = G(z)$$

Reemplazando lo obtenido en (11), queda

$$\tfrac{h(k)}{u(k)} = \tfrac{0,0833z+0,0833}{1,054z-0,99462}$$

Reescribimos como

$$(1,054z - 0,99462)h(k) = (0,0833z + 0,0833)u(k)$$

Dividiendo por z se obtiene

$$(1,054 - 0,99462z^{-1})h(k) = (0,0833 + 0,0833z^{-1})u(k)$$

Ahora, consideramos que z^{-1} representa un retardo en una unidad de tiempo, con lo que se obtiene finalmente

$$1,054h(k) - 0,99462h(k-1) = 0,0833u(k) + 0,0833u(k-1)$$

Despejando, queda

$$h(k) = 0,8977h(k-1) + 0,790u(k) + 0,790u(k-1)$$

Para obtener la ecuación de estados, escribimos la ecuación (12) como

$$h(k) = 0,790u(k) + z^{-1}[0,8977h(k) + 0,790u(k)]$$

Definimos entonces una variable

$$v_1(k+1) = 0,8977h(k) + 0,790u(k)$$

de manera que la ecuación (13) se transforma en

$$h(k) = 0,790u(k) + v_1(k)$$

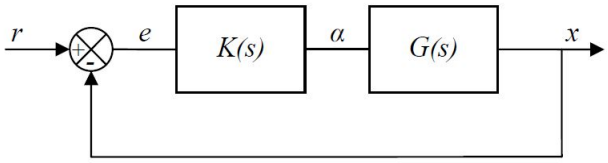
por lo que

$$v_1(k+1) = 0,8977(0,790u(k) + v_1(k)) + 0,790u(k) = 0,8977v_1(k) + 1,4992u(k)$$

Con lo que la ecuación de estados finalmente será

$$[v_1(k+1)] = [0,8977][v_1(k)] + [1,4992]u(k)$$
$$h(k) = [1][v_1(k)] + 0,790u(k)$$

(e) Considere que se realimenta el sistema y se agrega un controlador $K(s) = K$. Repentinamente, se desea que el sistema llegue a $h = 4m$. Decida si el controlador es capaz de realizar la tarea.
Realimentando con un controlador proporcional, el sistema continuo es el siguiente



en que para este caso, $x = h$. Podemos decir que

$$H(s) = K(s)G(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - H(s)$$

Combinando ambas ecuaciones, se puede obtener que

$$\frac{H(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}$$

Reemplazando (10), obtendremos

$$\frac{H(s)}{R(s)} = \frac{\frac{0,0833K}{s+0,0538}}{1 + \frac{0,0833K}{s+0,0538}} = \frac{0,0833K}{s + 0,0538 + 0,0833K}$$

Queremos saber como se comportará este sistema ante un cambio de referencia a $h = 4m$, es decir, aplicar un escalón unitario a la referencia. El escalón queda determinado como $R(s) = 1/s$.

Para saber si el controlador es capaz de llevar el sistema a la referencia, tenemos que averiguar el valor de $h(t)$ cuando $t \to 1$. Esto lo hacemos aplicando el teorema del valor final, asumiendo que la planta es estable

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Aplicando esto a lo obtenido en (14), se obtiene

$$\lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0,0833K}{s + 0,0538 + 0,0833K} = \frac{0,0833K}{0,0538 + 0,0833K}$$

Ya que el escalón es de monto unitario 1, este límite debería ser 1 tmabién. Sin embargo, se aprecia que ningún valor de K es posible que el límita tome dicho valor, luego el controlador no es capaz de llegar a la referencia indicada.

Anexo: Algunas equivalencias dentre transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

Tabla de equivalencias de transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$	$\frac{z^{1-k_0}}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{Tz^2}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$
$\frac{1}{s^4}$	$\frac{Tz^3}{6}\left[\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}\right]$
$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$Te^{-aT}z\frac{1}{(z-e^{-aT})^2}$