# Capítulo 9 – Representación de Sistemas Dinámicos: Modelos Matemáticos de Tiempo Discreto

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

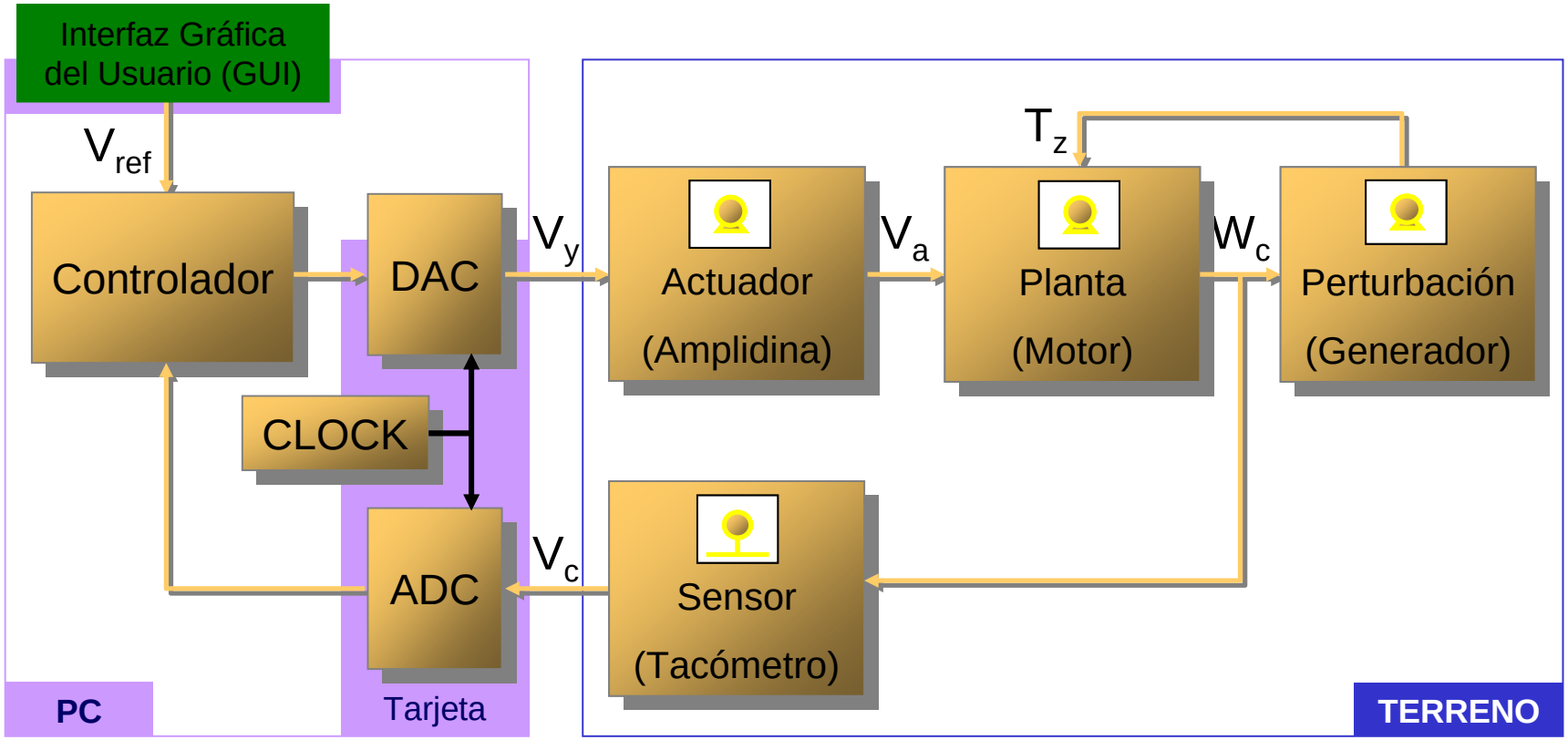
IEE2613 Control Automático

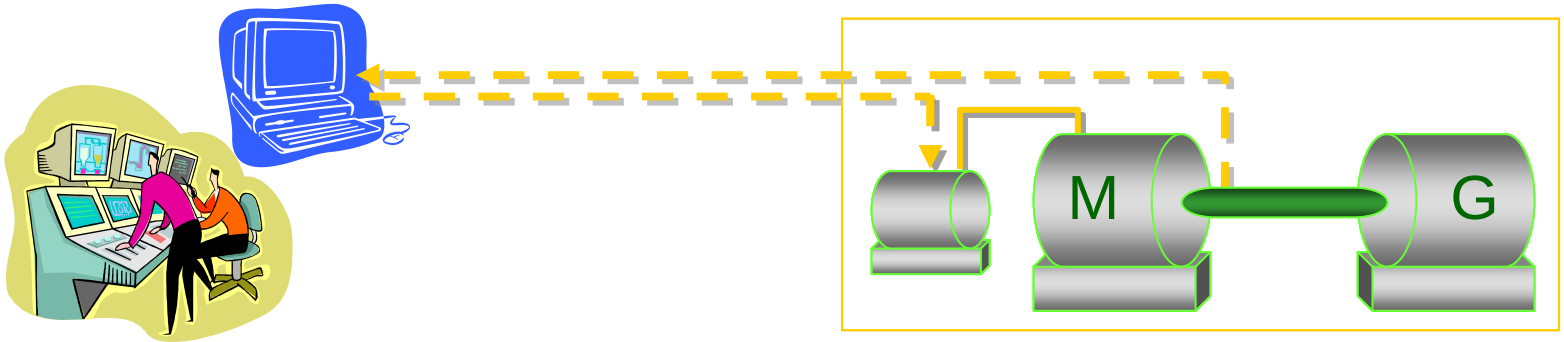
# Modelos de tiempo discreto

- Aquellos sistemas o procesos en los cuales los eventos ocurren cada cierto intervalo fijo de tiempo se conocen formalmente como sistemas de tiempo discreto. [1]
- Los modelos de tiempo discreto son de gran importancia ya que hoy en día la mayor parte de los controladores están implementados utilizando microprocesadores que operan con relojes (osciladores) digitales.

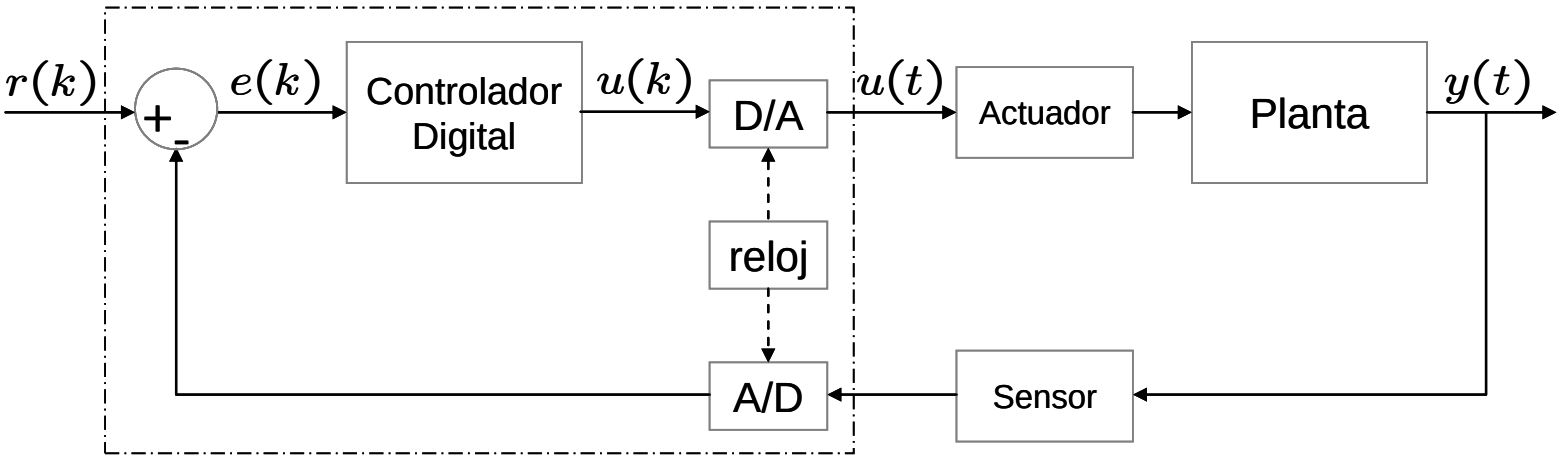
[1] Los *sistemas de tiempo discreto* en general son denominados simplemente *sistemas discretos* o *sistemas digitales*. Sin embargo, es importante tener presente que la denominación de *discreto* o *digital* no es del todo rigurosa, ya que un sistema de tiempo continuo cuyas variables toman valores discretos también podría ser llamado sistema discreto, a pesar de que en estricto rigor debería ser llamado sistema de variables discretas. Franklin et al. hacen la siguiente distinción: "Un controlador que opera sobre señales muestreadas (sampled), pero no cuantizadas (quantized) es llamado *discreto*, mientras que un controlador que opera sobre señales que son tanto muestreadas como cuantizadas es llamado *digital*".

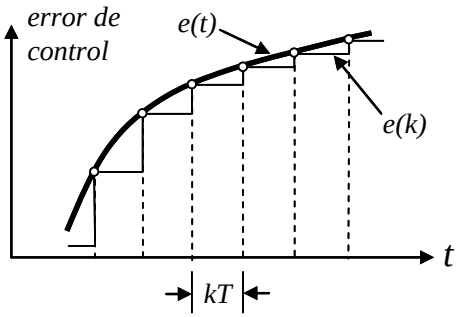
# Control digital por computador



# Sistemas de tiempo discreto




Cálculo de $u(kT)$:

$$u(kT) = u_k = a_1 \cdot u_{k-1} + a_2 \cdot u_{k-2} + \cdots + a_n \cdot u_{k-n} + b_0 \cdot e_k + b_1 \cdot e_{k-1} + \cdots + b_m \cdot e_{k-m}$$

# Ejemplo de sistema discreto: Modelo de epidemia

Durante una epidemia, el número de contagios mensuales aumenta a razón del 10% de los enfermos respecto al mes anterior, menos el 20% de los que fueron vacunados 2 meses antes.

$$y_k = y_{k-1} + 0.1y_{k-1} - 0.2v_{k-2}$$

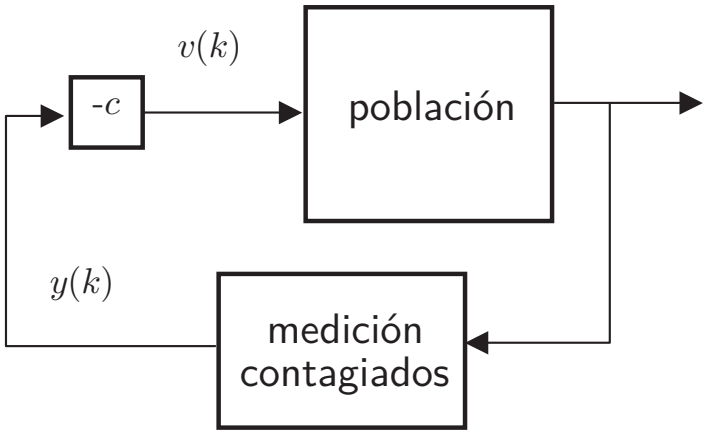
El número de vacunados $v_k$ vendrá dado por un porcentaje sobre la cantidad de enfermos detectados en el mes anterior a la aplicación de la vacuna, es decir:

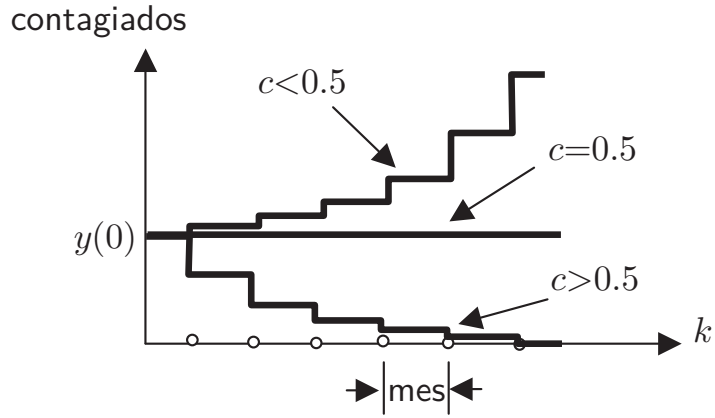
$$v_k = cy_{k-1} \quad \leftarrow \quad \text{política de control}$$

Luego:

$$y_k = y_{k-1} + 0.1y_{k-1} - 0.2cy_{k-3} = 1.1y_{k-1} - 0.2cy_{k-3}$$

# Ejemplo de sistema discreto: Modelo de epidemia




¿Cómo sabemos que porcentaje de vacunación $c$ mantiene la cantidad de contagiados constante?

Si $y_k = y_0$, para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, entonces:

$$y_0 = 1.1y_0 - 0.2cy_0$$

Finalmente, dividiendo la expresión anterior por $y_0$ se tienen que:

$$0.2c = 0.1 \Rightarrow c = 0.5$$

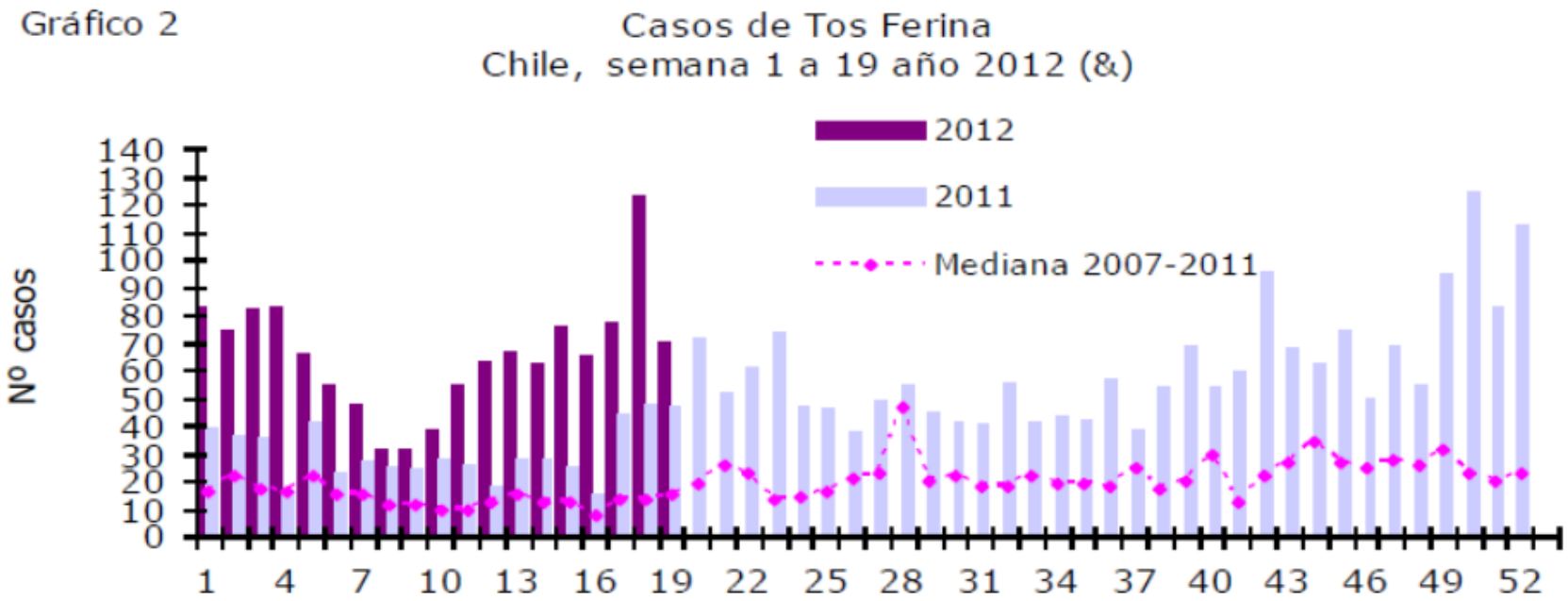
# Tos Ferina o Coqueluche

**Situación Epidemiológica**. Semanas 1 a 19, 2012.
Departamento de Epidemiología.
Ministerio de Salud.

*El Coqueluche se presenta como una enfermedad de baja endemia, debido al comienzo de la vacunación en 1951, e inmunización en forma programática en 1955. Desde la década de los setenta, el aumento de casos de Coqueluche se ha presentado cada 2 a 4 años. Entre los años 1996 y 2000 se produjo un alza en las tasas de la enfermedad, con un peak en el año 2000 (tasa de 21.6 por cien mil hbtes), que coincidió con la situación epidemiológica mundial, para luego estabilizarse a partir del año 2002 en tasas de alrededor 7 por cien mil hbtes., y disminuyendo el año 2009 a una tasa de 4.1 por cien mil hbtes.*

`http://epi.minsal.cl/coqueluche-materiales-relacionados/`

# Tos Ferina o Coqueluche




Fuente: Depto. de Epidemiología, MINSAL, Chile.
`http://epi.minsal.cl/enfermedades-de-notificacion-obligatoria/`

# Ejemplo 2.9: Control de nivel de estanque

## Modelo discreto

Modelo dinámico no-lineal:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{h} = \frac{k_v}{A_e} u - \frac{A_s}{A_e} \sqrt{2gh} \\ \\ h(0) \end{cases}$$

Representación en el espacio de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1] = \left[ \frac{k_v}{A_e} u - \frac{A_s}{A_e} \sqrt{2gx_1} \right] = [f_1(x_1, u)] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Linealización de la ecuación de estado es:

$$\Delta \dot{x}_1 = -\frac{A_s}{A_e} \frac{g}{\sqrt{2gx_1^e}} \Delta x_1 + \frac{k_v}{A_e} \Delta u$$

# Ejemplo 2.9: Control de nivel de estanque

## Modelo discreto

Un modelo discreto para el estanque puede tomar la forma:

$$h_k = 0.9h_{k-1} + 0.2u_{k-1}$$

Suponiendo $u_0 = 1$ [m$^3$/s], $h_0 = 10$ [m], $\Delta T = T = 1$ [min], y que la entrada se mantienen constantes, determine el nivel del estanque en ciclos siguientes:

$$h_1 = 0.9h_0 + 0.2u_0 = 0.9 \cdot 10 + 0.2 = 9.2$$
$$h_2 = 0.9h_1 + 0.2u_1 = 0.9 \cdot 9.2 + 0.2 = 8.48$$
$$\vdots$$

¿Qué pasa si en vez de 0.9 el coeficiente es 1.1?

¿Cuál será el valor final de la altura?

# Ejemplo 2.9: Control de nivel de estanque

## Modelo discreto

Considerando que para un input de escalón, la altura de líquido en régimen permanente se estabiliza en un nuevo nivel (ver este ejemplo en caso contínuo... aunque en estricto rigor, habría que demostrar primero que el sistema es estable ante inputs de escalón):

$$h_{k-1} = h_k = h \text{ (constante)} \ , \ k \geq k^*$$

Luego,

$$h_k = 0.9h_{k-1} + 0.2u_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$h = 0.9h + 0.2\bar{u}$$

Por lo tanto,

$$0.1h = 0.2\bar{u}$$

$$\Rightarrow \quad h = 2\bar{u}$$

# Transformada Z

La transformada para sistemas discretos, equivalente a la transformada de Laplace, es la llamada transformada Z.

| $\mathcal{Z}\{f(k)\}$ | $\mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---|---|
| $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ |

donde $z \in \mathbb{C}$ es la variable del dominio complejo.

Cabe notar que la transformada Z corresponde a la transformada de tiempo discreto de Fourier (DTFT), si se define:

$$z = e^{j\omega}$$

La transformada Z es de gran utilidad en análisis de sistemas de tiempo discreto, de igual manera que la transformada de Laplace lo es para sistemas de tiempo continuo.

# Ejemplos de Transformada Z

**Transformada Z de un impulso o función delta de Dirac:**

$$u_k = \delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = z^{-0} = 1$$

Recordemos que la función impulso permite expresar cualquier secuencia $f_k$ como:

$$f_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \delta_{k-i}$$

# Ejemplos de Transformada Z

**Transformada Z de un escalón unitario**:

$$u_k = s_k = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$

Si $\|z^{-1}\| < 1$ (región de convergencia (ROC) y causalidad), luego:

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

# Ejemplos de Transformada Z

**Transformada Z de una exponencial:**

$$u_k = \begin{cases} r^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} = r^k s_k$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k s_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (rz^{-1})^k$$

$$= \frac{1}{1 - rz^{-1}} = \frac{z}{z - r}$$

siempre que $\|rz^{-1}\| < 1$ (ROC y causalidad)

# Ejemplos de Transformada Z

**Transformada Z de retardo de $n$ periodos:**

$$y_k = u_{k-n}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-n} z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-n} z^{-(k-n)} = z^{-n} U(z)$$

# Región de convergencia

La transformada Z de una señal o función $f_k$ puede ser considerada como la transformada de Fourier de $f_k$ multiplicada por una secuencia exponencial $r^{-k}$, y la transformada Z puede converger aún cuando la transformada de Fourier no lo haga.

— *Si se redefine la convergencia, es posible que la transformada de Fourier converja cuando la transformada Z no lo haga.* —

Para que la transformada de Fourier converja, la secuencia debe tener energía finita, o bien la serie $f_k r^{-k}$ debe ser *absolutamente sumable*, es decir:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| f_k r^{-k} \right\| < \infty$$

# Región de convergencia

La transformada Z es una serie de Laurent (una *serie de potencias* que incluye términos de grado negativo):

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^{-k}$$

La serie de Laurent, e igualmente la transformada Z, representa una función analítica en cada punto dentro de la región de convergencia. Por lo tanto, la transformada Z y todas sus derivadas deben ser funciones continuas de $z$ dentro de la región de convergencia.

(*Nota: esto es un requisito de las funciones analíticas, estas son aquellas que pueden ser representadas mediante una sumatoria de sus derivadas, como una serie de Taylor. Para que esto sea posible es necesario que todas sus derivadas existan, es decir, sean finitas y continuas al menos en la región de convergencia).*

**En general, las series de Laurent convergen en una región anular del plano complejo $\mathbb{C}$.**

# Región de convergencia

Cuando $F(z)$ es una función racional, es decir una razón de polinomios en $z$, ninguno de los polos de $F(z)$ puede ocurrir dentro de la región de convergencia, ¡porque la transformada Z no converge en los polos!

Como veremos en el siguiente ejemplo:

¡La región de convergencia está acotada por los polos!

# ROC - Ejemplo

**Transformada Z de una exponencial:**

$$u_k = r^k s_k \overset{\mathcal{Z}}{\rightarrow} U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (rz^{-1})^k$$

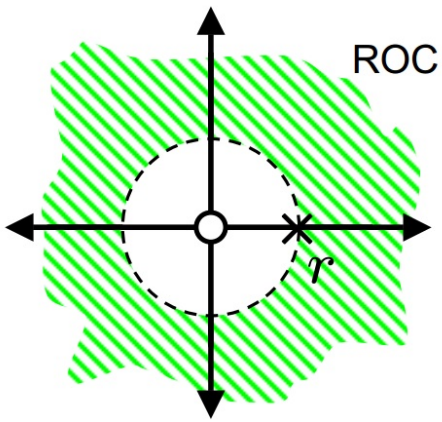
converge a:

$$U(z) = \frac{1}{1 - rz^{-1}} = \frac{z}{z - r}$$

siempre que:

$$\|rz^{-1}\| < 1 \Rightarrow \|z\| > \|r\|$$

Claramente, $U(z)$ tiene un cero en $z = 0$ y un polo en $z = r$.



# ROC y Estabilidad

En términos simples, supongamos que $Y(z)$ fue la respuesta a un escalón unitario $U(z)$ de un sistema causal descrito por su respuesta al impulso $F(z)$.

La ROC de $Y(z)$ estará dado por:

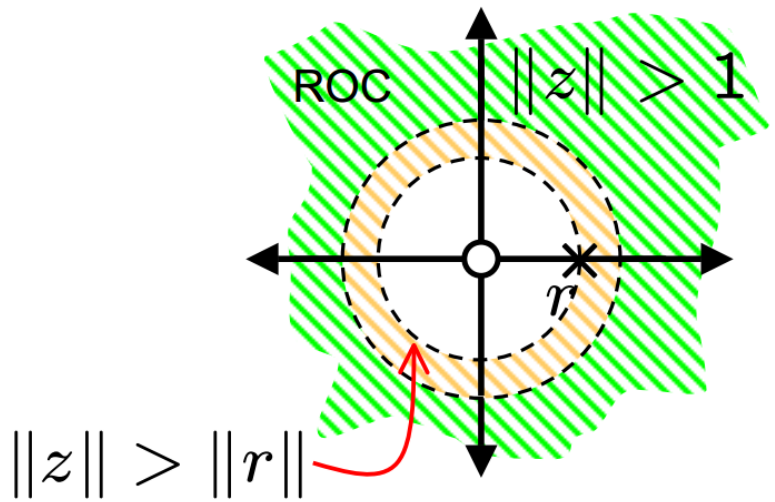
$$\text{ROC}(F(z)) \cap \text{ROC}(U(z))$$

Sabemos además que (ver Ejemplo 2 de Transformada Z):

$$\text{ROC}(U(z)) = \{z : \ \|z\| > 1\}$$

# ROC y Estabilidad

Luego obtendremos la mayor ROC$(Y(z))$ si los polos de $F(z)$ no están en la ROC$(U(z))$; es decir, si estos están dentro del círculo unitario, ya que en los polos se "destruye" la convergencia de la serie, lo cual corresponde a una respuesta que crece indefinidamente.



# Convergencia de secuencias finitas

Suponga que un número finito de valores de una secuencia son distintos de cero, tal que:

$$F(z) = \sum_{k=k_1}^{k_2} f_k z^{-k}$$

para enteros finitos $k_1,\ k_2$.

Para que la serie converja se requiere que:

$$\|f_k\| < \infty, \text{ para } k_1 \leq k \leq k_2$$

De este modo es posible notar que secuencias de largo finito tienen una región de convergencia que es al menos $0 < \|z\| < \infty$, y que puede incluir ya sea $z = 0$ ó $z = \infty$.

# Transformada Z Inversa

La transformada Z inversa puede derivarse usando el Teorema de la Integral de Cauchy, que afirma que si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$, entonces:

$$\oint_{z \in C} f(z) dz = 0$$

para cualquier contorno cerrado $C$ contenido en $D$.

Este teorema lleva a la Fórmula Integral de Cauchy, donde es posible obtener que si $C$ es un contorno que encierra al origen se tiene:

$$\oint_{z \in C} \frac{1}{z} dz = 2\pi j$$

# Transformada Z Inversa

Considere la transformada Z:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^{-k}$$

Multiplicando ambos lados por $z^{n-1}$ e integrando con una integral de contorno para la cual el contorno de integración encierra al origen y yace enteramente en la región de convergencia $F(z)$:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{z \in C} F(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{z \in C} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^{-k+n-1} dz$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{1}{2\pi j} \oint_{z \in C} z^{-k+n-1} dz$$

# Transformada Z Inversa

Note que si $k \neq n$ se tiene que:

$$\oint_{z \in C} z^{-k+n-1} dz = 0$$

por el Teorema Integral de Cauchy. En el caso de $k = n$ se tiene la integral $\oint_{z \in C} \frac{1}{z} dz = 2\pi j$, por lo que:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi j} \oint_{z \in C} F(z) z^{n-1} dz = f_n} \leftarrow \text{Transformada Z inversa}$$

# Transformada Z Inversa

La integral $\oint_{z \in C} \frac{1}{z} dz = 2\pi j$ puede calcularse (sin la necesidad de usar la Fórmula Integral de Cauchy) haciendo un cambio de variable empleando coordenadas polares (contorno polar: magnitud-fase):

$$z = Ae^{j\phi} \;\Rightarrow\; dz = jAe^{j\phi} d\phi$$

Es posible redefinir la integral de contorno para un contorno definido entre 0 y $2\pi$ (una circunferencia):

$$\begin{aligned} \oint_{z \in C} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Ae^{j\phi}} jAe^{j\phi} d\phi \\ &= j \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi j \end{aligned}$$

# Propiedades de la Transformada Z

Sea $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z)$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

| Property | Time Domain | Z Domain |
|---|---|---|
| Linearity | $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$ | $a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$ |
| Time shifting | $x[n-k]$ | $z^{-k} X(z)$ |
| Scaling in Z domain | $a^n x[n]$ | $X(a^{-1} z)$ |
| Time reversal | $x[-n]$ | $X(z^{-1})$ |
| Conjugation | $x^*[n]$ | $X^*(z^*)$ |
| Real part | $\mathrm{Re}\{x[n]\}$ | $\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$ |

# Propiedades de la Transformada Z

| Property | Time Domain | Z Domain |
|---|---|---|
| Imaginary part | $\mathrm{Im}\{x[n]\}$ | $\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$ |
| Differentiation | $nx[n]$ | $-z\frac{dX(z)}{dz}$ |
| Convolution | $x_1[n] * x_2[n]$ | $X_1(z)X_2(z)$ |
| Cross–correlation | $r_{x_1,x_2}(l) = x_1[l] * x_2[-l]$ | $R_{x_1,x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$ |
| Multiplication | $x_1[n]x_2[n]$ | $\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$ |
| Parseval's Theorem | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n]$ | $\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$ |

# Tablas de Transformada Z

| | Time domain $x[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ | Z domain $X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\}$ | Region of convergence |
|---|---|---|---|
| 1 | $\delta[k]$ | $1$ | all $z$ |
| 2 | $\delta[k-k_0]$ | $z^{-k_0}$ | $z \neq 0$ |
| 3 | $u[k]$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\|z\| > 1$ |
| 4 | $-u[-k-1]$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\|z\| < 1$ |
| 5 | $ku[k]$ | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ | $\|z\| > 1$ |
| 6 | $-ku[-k-1]$ | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ | $\|z\| < 1$ |
| 7 | $k^2u[k]$ | $\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$ | $\|z\| > 1$ |
| 8 | $-k^2u[-k-1]$ | $\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$ | $\|z\| < 1$ |
| 9 | $k^3u[k]$ | $\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$ | $\|z\| > 1$ |
| 10 | $-k^3u[-k-1]$ | $\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$ | $\|z\| < 1$ |

# Tablas de Transformada Z

| | Time domain $x[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ | Z domain $X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\}$ | Region of convergence |
|---|---|---|---|
| 11 | $a^k u[k]$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| 12 | $-a^k u[-k-1]$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\| < \|a\|$ |
| 13 | $ka^k u[k]$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| 14 | $-ka^k u[-k-1]$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\|z\| < \|a\|$ |
| 15 | $k^2 a^k u[k]$ | $\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| 16 | $-k^2 a^k u[-k-1]$ | $\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$ | $\|z\| < \|a\|$ |
| 17 | $\cos(\omega_0 k)u[k]$ | $\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$ | $\|z\| > 1$ |
| 18 | $\sin(\omega_0 k)u[k]$ | $\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$ | $\|z\| > 1$ |
| 19 | $a^k\cos(\omega_0 k)u[k]$ | $\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| 20 | $a^k\sin(\omega_0 k)u[k]$ | $\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |

# Resumen de Transformadas de Laplace - Transformadas Z

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ | $F(z) = \mathcal{Z}\{f[k]\}$ |
|---|---|---|
| $\delta(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$ | $e^{-t_0 s}$ | $z^{-k_0}$, for $t_0 = k_0 T$ |
| $u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$ | $\frac{e^{-t_0 s}}{s}$ | $\frac{z^{1-k_0}}{z-1}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| $\frac{t^2}{2!}$ | $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{T^2}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$ |
| $\frac{t^3}{3!}$ | $\frac{1}{s^4}$ | $\frac{T^3}{6}\left[\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}\right]$ |
| $\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} = \lim_{a\to 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} e^{-at}}{\partial a^{m-1}}$ | $\frac{1}{s^m}$ | $\lim_{a\to 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |
| $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $Te^{-aT}z\frac{1}{(z-e^{-aT})^2}$ |
| $\frac{t^2}{2}e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^3}$ | $\frac{T^2}{2}e^{-aT}z\frac{z+e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^3}$ |
| $\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-at} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} e^{-at}}{\partial a^{m-1}}$ | $\frac{1}{(s+a)^m}$ | $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$ |
| $1-e^{-at}$ | $\frac{a}{s(s+a)}$ | $\frac{z\left(1-e^{-aT}\right)}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ |

Note: Here, $f[k] = f(kT)$, for $k \in \mathbb{Z}$, denotes the discrete version of $f$; i.e. $f$ sampled at $t = kT$.

# Resumen de Transformadas de Laplace - Transformadas Z

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ | $F(z) = \mathcal{Z}\{f[k]\}$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{a}\left(at-1+e^{-at}\right)$ | $\frac{a}{s^2(s+a)}$ | $\frac{z\left[\left(aT-1+e^{-aT}\right)z+\left(1-e^{-aT}-aTe^{-aT}\right)\right]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$ |
| $1-e^{-at}-ate^{-at}$ | $\frac{a^2}{s(s+a)^2}$ | $\frac{z\left[\left(1-e^{-aT}-aTe^{-aT}\right)z+\left(aT-1+e^{-aT}\right)e^{-aT}\right]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$ |
| $(1-at)e^{-at}$ | $\frac{s}{(s+a)^2}$ | $\frac{z\left[z-(1+aT)e^{-aT}\right]}{(z-e^{-aT})^2}$ |
| $e^{-at}-e^{-bt}$ | $\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{z\left(e^{-aT}-e^{-bT}\right)}{(z-e^{-aT})\left(z-e^{-bT}\right)}$ |
| $be^{-bt}-ae^{-at}$ | $\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{z\left[(b-a)z-\left(be^{-aT}-ae^{-bT}\right)\right]}{(z-e^{-aT})\left(z-e^{-bT}\right)}$ |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ | $\frac{z\sin(aT)}{z^2-2\cos(aT)z+1}$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\frac{z(z-\cos(aT))}{z^2-2\cos(aT)z+1}$ |
| $e^{-at}\sin(bt)$ | $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ | $\frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2-2e^{-aT}\cos(bT)z+e^{-2aT}}$ |
| $e^{-at}\cos(bt)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$ | $\frac{z\left(z-e^{-aT}\cos(bT)\right)}{z^2-2e^{-aT}\cos(bT)z+e^{-2aT}}$ |
| $1-e^{-at}\left(\cos(bt)+\frac{a}{b}\sin(bt)\right)$ | $\frac{a^2+b^2}{s((s+a)^2+b^2)}$ | $\frac{z(\alpha z+\beta)}{(z-1)(z^2-2e^{-aT}\cos(bT)z+e^{-2aT})}$ |
| | | $\alpha = 1-e^{-aT}\cos(bT)-\frac{a}{b}e^{-aT}\sin(bT)$ |
| | | $\beta = e^{-2aT}+\frac{a}{b}e^{-aT}\sin(bT)-e^{-aT}\cos(bT)$ |

Note: Here, $f[k]=f(kT)$, for $k\in\mathbb{Z}$, denotes the discrete version of $f$; i.e. $f$ sampled at $t=kT$.

Las ecuaciones de diferencia equivalen en sistemas discretos a las ecuaciones diferenciales en sistemas de tiempo continuo. En el caso general, las ecuaciones de diferencia son de la forma:

$$\begin{aligned} y_k =& a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots + a_n y_{k-n} \\ &+ b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m} \end{aligned}$$

Aplicando la transformada $\mathcal{Z}$:

$$\frac{b(z)}{a(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_m z^{n-m}}{z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n}$$

Los ceros de la función de transferencia son las raíces de:

$$b(z) = 0$$

Los polos de la función de transferencia son las raíces de:

$$a(z) = 0$$

Asumiendo $a_i = b_i = 0$, excepto $b_1 = 1$:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{n-1}}{z^n} = z^{-1}$$

Aplicando la transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ se tiene la ecuación de diferencia:

$$y_k = u_{k-1}$$

es decir, la salida es igual a la entrada retrasada en un período. Luego, $z^{-1}$ es un retardo equivalente a un período.

# Ejemplo 2.9: Control de Nivel de Estanque - Func. Transferencia

La ecuación de diferencia del modelo discreto del estanque esá dada por:

$$h_k = 0.9h_{k-1} + 0.2u_{k-1}$$

Aplicando transformada $\mathcal{Z}$:

$$H(z) = 0.9z^{-1}H(z) + 0.2z^{-1}U(z)$$

Por lo tanto,

$$H(z) = \frac{0.2}{z - 0.9}U(z)$$

# Teorema del Valor Final para Sistemas Discretos

Para sistemas estables, es decir para aquellos que cumplan con:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) < \infty,$$

o equivalentemente, tales que todos los polos de $(z-1)Y(z)$ satisfacen $\|z\| < 1$, se cumple que:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z)}$$

# Ejemplo 2.9: Control de Nivel de Estanque - TVF

Considerando el modelo de tiempo discreto del estanque:

$$h_k = 0.9h_{k-1} + 0.2u_{k-1}$$

cuya función de transferencia se obtiene aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ a la ecuación de diferencia como:

$$H(z) = 0.9z^{-1}H(z) + 0.2z^{-1}U(z)$$

$$\frac{H(z)}{U(z)} = \frac{0.2}{z - 0.9}$$

La aplicación del TVF, permite obtener el valor del nivel de líquido en el estanque para un escalón de magnitud $\bar{u}$ como:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} h_k &= \lim_{z\to 1}(z-1)H(z) \\
&= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{0.2}{z-0.9}U(z) \\
&= \lim_{z\to 1}\cancel{(z-1)}\frac{0.2}{z-0.9}\frac{\bar{u}z}{\cancel{z-1}} = 2\bar{u} \rightarrow \textit{¡Mismo valor que antes!}
\end{aligned}$$

# Teorema del Valor Inicial para Sistemas Discretos

Para cualquier sistema (estable o no) se cumple que:

$$\boxed{y(0) = \lim_{z \to \infty} Y(z)}$$

# Discretización de Sistemas Continuos

- La transformada $\mathcal{Z}$ juega un rol fundamental en la discretización de sistemas continuos, es decir, en encontrar un modelo de tiempo discreto que describe el comportamiento de la planta continua.
- El problema de encontrar una representación discreta de un proceso continuo puede formularse como el problema de encontrar una expresión $F(z)$, tal que:

$$s \leftrightarrow F(z),$$

luego, para un modelo continuo en el dominio de Laplace, la expresión discreta en el dominio $\mathcal{Z}$, puede encontrarse reemplazando $F(z)$ en cada ocurrencia de $s$ en la función de transferencia.

# Discretización Mediante Integración Numérica Trapezoidal

Una manera de tratar la discretización es enfocando el problema como uno de integración numérica. Supongamos que el controlador analógico de un sistema en lazo cerrado está dado por un integrador, es decir, la variable manipulada se ajusta en proporción al error acumulado en el tiempo:

$$u(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$$

Sin embargo, en un computador digital no es posible calcular la integral continua, y deberá utilizarse su aproximación discreta, recordando que:

$$u(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau = \lim_{T\to 0} \sum_{n=0}^{k} e(nT)T.$$

Luego,

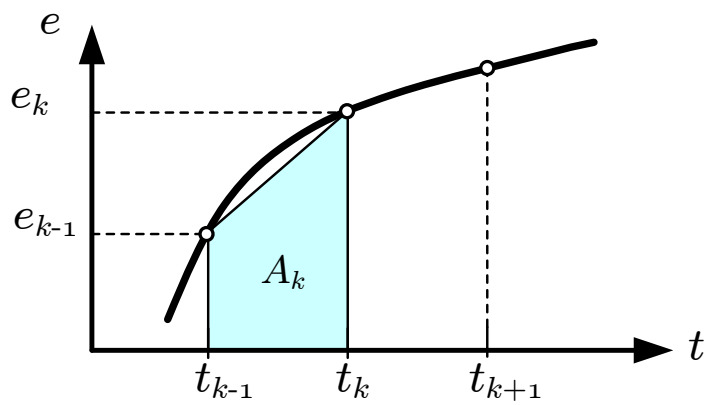
$$u_k = u(kT) \approx \sum_{n=1}^{k} e_n T,$$

para un intervalo $T << \infty$ muy pequeño (infinitesimal).

# Discretización Mediante Integración Numérica Trapezoidal

En un computador digital, la operación de integración mediante una aproximación trapezoidal cada $T$ unidades de tiempo se representa gráficamente como se muestra en la siguiente figura.

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{n=0}^{k} A_n \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} A_n + A_k \\ &= u_{k-1} + A_k \end{aligned}$$




donde $u_k$ es la integral bajo la curva en $k$, es decir, en $t = t_k = kT$, calculada como la suma de las áreas $A_n$, correspondientes al instante $t_n = nT$, donde $T = t_k - t_{k-1}$ es el periodo de muestreo y donde el área $A_k$ está dada por:

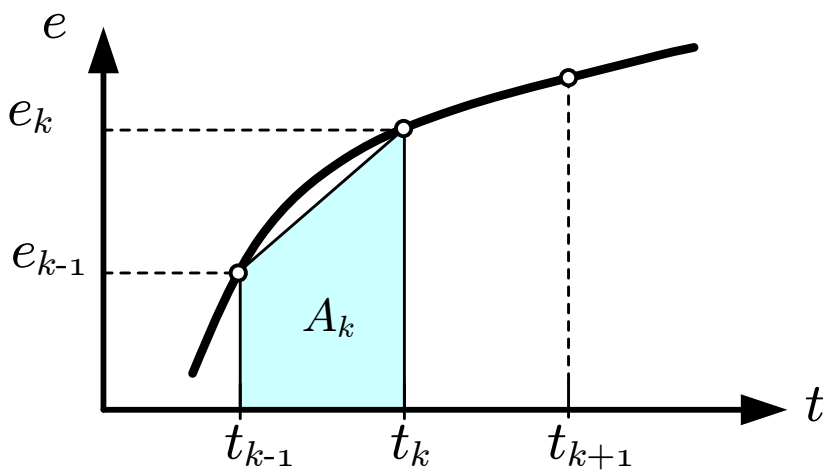
$$\begin{aligned} A_k &= Te_{k-1} + \frac{1}{2}T(e_k - e_{k-1}) \\ &= \frac{T}{2}(2e_{k-1} + e_k - e_{k-1}) = \frac{T}{2}(e_{k-1} + e_k) \end{aligned}$$

# Discretización Mediante Integración Numérica Trapezoidal

Luego, en un computador digital la integral puede calcularse como el error acumulado hasta el instante de muestreo anterior, $u_{k-1}$, más el área del error actual $A_k$:

$$u_k = u_{k-1} + A_k$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2}(e_{k-1} + e_k)$$

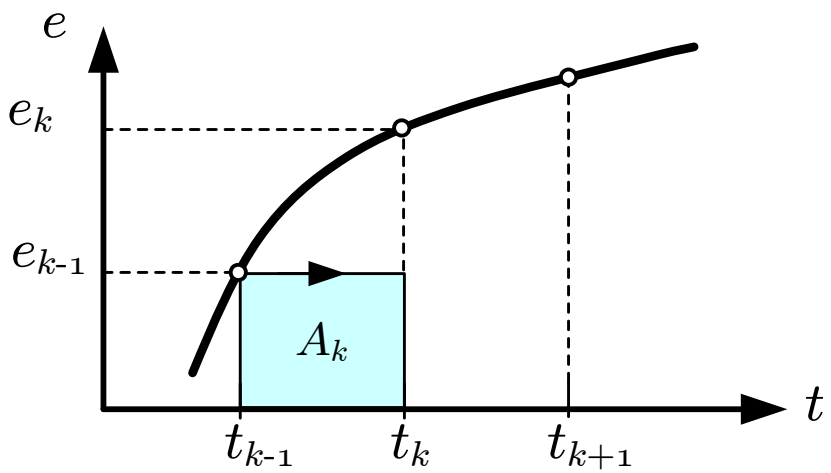



Esta aproximación mediante integración trapezoidal también es conocida como aproximación de Tustin.

# Aproximación Mediante Integración Rectangular Hacia Adelante

De manera similar, es posible calcular la integral mediante aproximaciones rectangulares de área. En la figura se muestra el área calculada “ “proyectando el error anterior hacia adelante”.

$$
\begin{aligned}
u_k &= u_{k-1} + A_k \\
u_k &= u_{k-1} + T e_{k-1}
\end{aligned}
$$

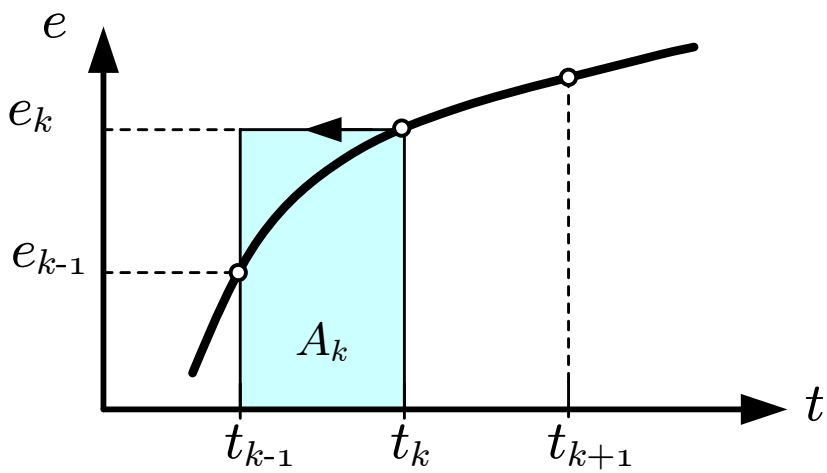


# Aproximación Mediante Integración Rectangular Hacia Atrás

Otra manera de calcular el área rectangular $A_k$ en el instante $k$ consiste en "proyectar el error actual hacia atrás".

$$u_k = u_{k-1} + A_k$$

$$u_k = u_{k-1} + Te_k$$



# Transformada Z - Ejemplo: Integración Trapezoidal

Aplicando transformada $\mathcal{Z}$ a:

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2}(e_{k-1} + e_k)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k} + \frac{T}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} e_{k-1} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-(k-1)} + \frac{T}{2}\left(z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} e_{k-1} z^{-(k-1)} + \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k}\right)$$

$$\Rightarrow U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}\left(z^{-1}E(z) + E(z)\right)$$

# Transformada Z - Ejemplo: Integración Trapezoidal

Luego, la transformada $\mathcal{Z}$ de:

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2}(e_{k-1} + e_k)$$

es:

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}(z^{-1}E(z) + E(z))$$

Reagrupando términos se obtiene la función de transmitancia (equivalente a la función de transferencia en sistemas continuos):

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}.$$

Recordando que la versión analógica del integrador tiene función de transferencia:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s} \leftrightarrow \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s \leftrightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

# Transformada Z - Ejemplo: Integración Rectangular

De manera similar, es posible calcular la transformada $\mathcal{Z}$ de las aproximaciones rectangulares anteriores. Para la aproximación rectangular hacia adelante se tiene:

$$u_k = u_{k-1} + Te_{k-1} \xrightarrow{\mathcal{Z}} U(z) = z^{-1}U(z) + Tz^{-1}E(z)$$

Por lo tanto:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1} \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s \leftrightarrow \frac{1}{T}(z-1)}$$

Mientras que para la aproximación rectangular hacia atrás se tiene que:

$$u_k = u_{k-1} + Te_k \xrightarrow{\mathcal{Z}} U(z) = z^{-1}U(z) + TE(z)$$

Por lo tanto:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Tz}{z-1} \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s \leftrightarrow \frac{1}{T}\frac{z-1}{z}}$$

# Notas sobre la discretización mediante aproximaciones

- ¡La discretización de sistemas continuos mediante las aproximaciones a la integral vistas son sólo aproximaciones!.
- Los equivalentes discretos *exactos* correspondientes a modelos continuos serán vistos más adelante.
- La discretización mediante aproximaciones es útil porque:
  - Actualmente los controladores digitales (en un computador o microprocesador) son más comunes que los analógicos, y el diseño de controladores digitales requiere de aproximaciones de tiempo discreto tanto del controlador como del modelo de la planta.
  - Es más sencilla de realizar que la discretización exacta.

# Ejemplo: Discretización de Sistemas Continuos de Primer Orden

Considere un sistema continuo de primer orden representado por su función de transferencia:

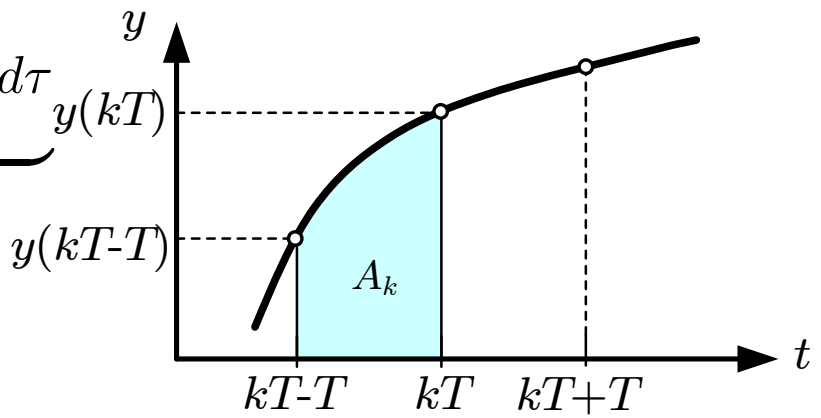
$$F(s) = \frac{a}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{y} + ay = au.$$

Luego

$$y(t) = \int_0^t -ay(\tau) + au(\tau)d\tau.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y(kT) &= \int_0^{kT-T} -ay(\tau) + au(\tau)d\tau + \int_{kT-T}^{kT} -ay(\tau) + au(\tau)d\tau \\ &= y(kT-T) + \underbrace{\int_{kT-T}^{kT} -ay(\tau) + au(\tau)d\tau}_{\text{área } A_k} \end{aligned}$$

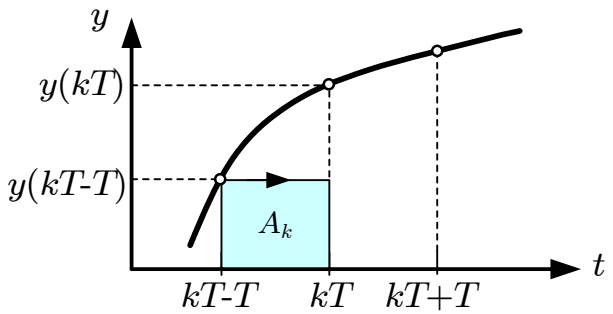



donde $T$ es el período del sistema discreto.

# Ejemplo: Discretización de Sistemas Continuos de Primer Orden

Utilizando la aproximación rectangular hacia delante de la integral:

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + T(-ay_{k-1} + au_{k-1}) \\ &= (1 - aT)y_{k-1} + aTu_{k-1} \end{aligned}$$




Aplicando la transformada $\mathcal{Z}$, se tiene entonces:

$$Y(z) = (1 - aT)z^{-1}Y(z) + aTz^{-1}U(z)$$

Luego,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{aT}{z - (1 - aT)} = \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a} \leftrightarrow \frac{a}{s + a}$$

es decir,

$$s \leftrightarrow \frac{z - 1}{T}$$

*¡Exactamente el mismo resultado obtenido anteriormente para la aproximación rectangular hacia adelante de la integral!*

Considere el modelo linealizado del estanque:

$$\dot{\Delta x_1} = -a\Delta x_1 + b\Delta u$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{A_s}{A_e}\frac{g}{\sqrt{2gx_1^e}} \\ b &= \frac{k_v}{A_e} \end{aligned}$$

La función de transferencia:

$$\frac{\Delta x_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b}{s+a}$$

La discretización empleando la aproximación de Tustin será entonces:

$$\frac{\Delta x_1(z)}{\Delta U(z)} = \frac{b}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + a} = \frac{bT(z+1)}{2(z-1) + aT(z+1)}$$
$$= \frac{bT(z+1)}{(2+aT)z + (aT-2)}$$

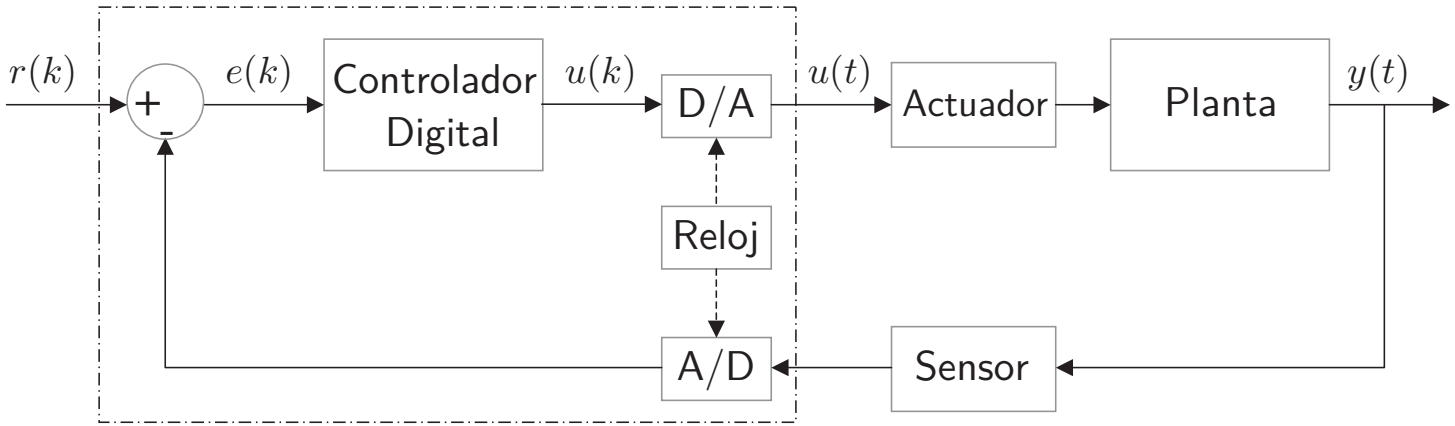
¿Cuál es el rango de valores de $T$ que garantiza que el sistema sea estable?

$$\|z\| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2-aT}{2+aT} < 1$$

La desigualdad anterior se satisface para cualquier $T > 0$.

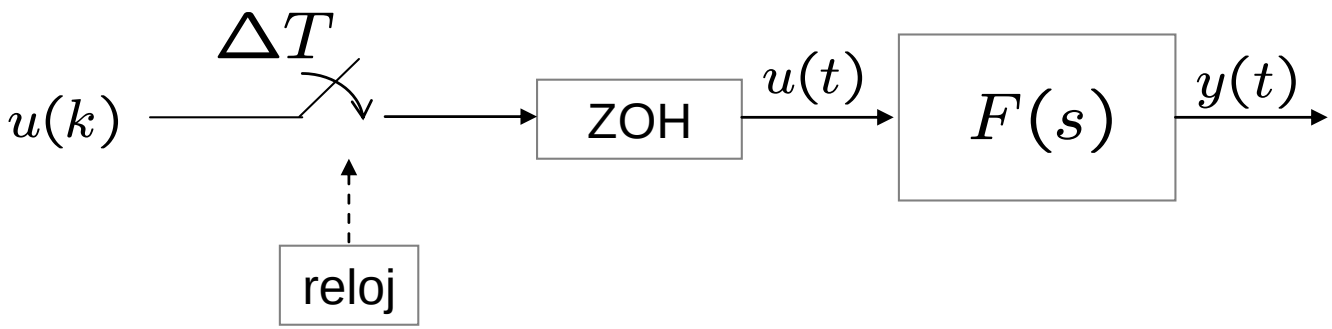
¿Cuál es el rango de valores de $T$ que aseguran la estabilidad de la versión discretizada si se emplea la aproximación rectangular hacia adelante? ¿Qué concluye?

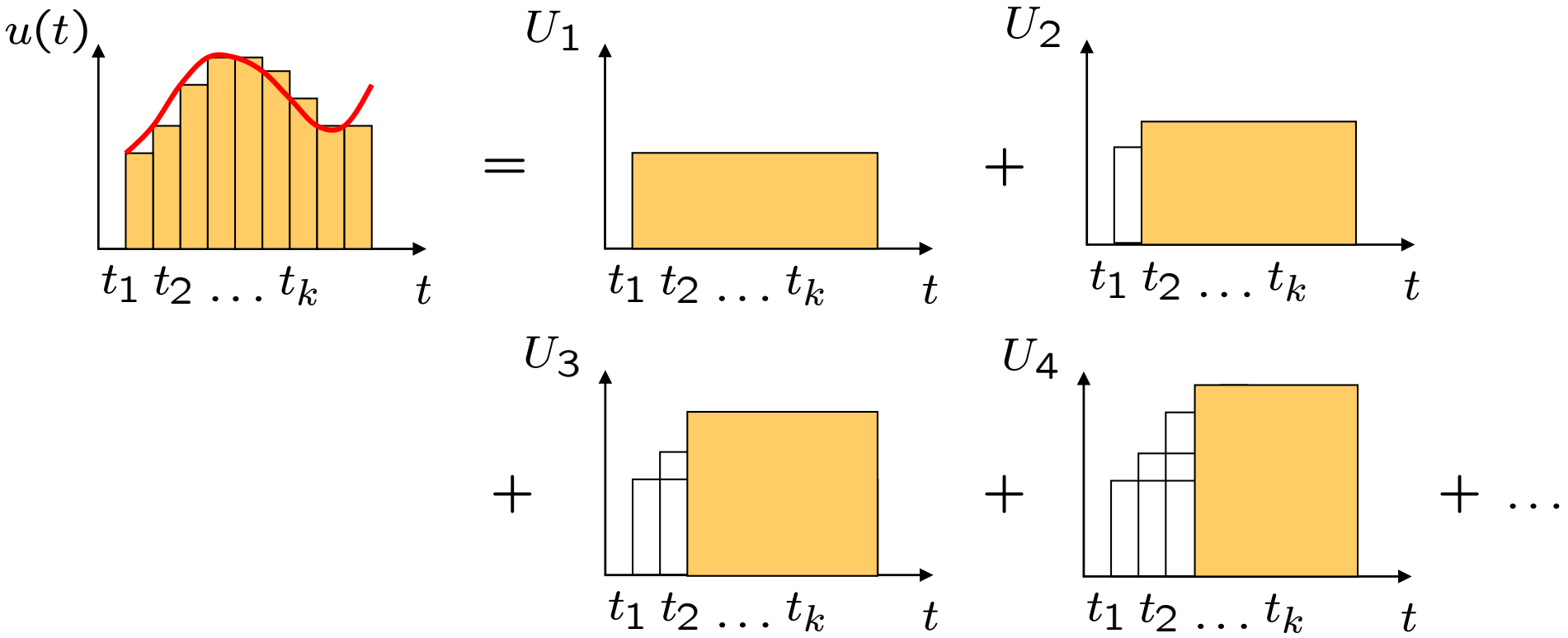
# Equivalentes Discretos Exactos de Sistemas Continuos




- Los conversores A/D y D/A realizan la operación de conversión en períodos discretos según la frecuencia del reloj.
- En cada período, el valor convertido se mantiene constante a la salida del conversor, esta operaicón se conoce con el nombre de ***sample and hold***.
- Por esta razón en sistemas de control el conversor D/A se representa mediante un bloque denominado **ZOH** (zero-order hold) o retención de orden cero (orden cero porque no introduce un retardo $z^{-1}$).

# Equivalentes Discretos Exactos de Sistemas Continuos



# Equivalentes Discretos Exactos de Sistemas Continuos

La salida se puede reconstruir por superposición de pulsos (resta de escalones de igual magnitud desplazados un período):

$$\Delta Y_1 = \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_0}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_1}{s}\right\}\underbrace{\left(1-z^{-1}\right)}z^{-1}$$

Notar que tiene la forma del derivador aprox. rectangular hacia atrás con periodo $T=1$.

$$\Delta Y_2 = \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_2}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_1}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_2}{s}\right\}\left(1-z^{-1}\right)z^{-2}$$

$$\vdots$$

$$\Delta Y_k = \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_k}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_{k-1}}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{F(s)\frac{U_k}{s}\right\}\left(1-z^{-1}\right)\underbrace{z^{-k}}$$

Porque $\Delta Y_k$ ocurre en instánte $k$-ésimo y no en $k=0$. Luego es necesario retrasar la respuesta en $k$ periodos.

# Equivalentes Discretos Exactos de Sistemas Continuos

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta Y_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}\left\{ F(s)\frac{U_k}{s} \right\} z^{-k}\left(1-z^{-1}\right) \\
&= \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} U_k z^{-k} \\
&= \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} U(z)
\end{aligned}
$$

Luego el equivalente discreto exacto de la planta estará dado por:

$$
\boxed{F_{ZOH}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}}
$$

# Ejemplo 2.9: Control de Nivel de Estanque - Discretización ZOH 1/3

Considere el modelo linealizado del estanque:

$$\dot{\Delta x_1} = -a\Delta x_1 + b\Delta u$$

donde

$$a = \frac{A_s}{A_e}\frac{g}{\sqrt{2gx_1^e}}$$

$$b = \frac{k_v}{A_e}$$

La función de transferencia:

$$\frac{\Delta x_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b}{s+a}$$

# Ejemplo 2.9: Control de Nivel de Estanque - Discretización ZOH 2/3

Aplicando ZOH a:

$$F(s) = \frac{\Delta x_1(s)}{U(s)} = \frac{b}{s+a}$$

La función de transferencia:

$$\begin{aligned}
F_{ZOH}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} \\
&= \frac{b}{a}\left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\frac{a}{(s+a)s}\right\} \\
&= \frac{b}{a}\left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right\} \\
&= \frac{b}{a}\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{aT}}\right) \\
&= \frac{b}{a}\left(\frac{z-e^{aT}}{z-e^{aT}} - \frac{z-1}{z-e^{aT}}\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1-e^{aT}}{z-e^{aT}}
\end{aligned}$$

Nótese la diferencia entre la discretización exacta mediante ZOH y la aproximación de Tustin:

$$F_{ZOH}(z) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{aT}}{z - e^{aT}}$$

$$F_{Tustin}(z) = \frac{bT(z+1)}{(2+aT)z + (aT-2)}$$

# Referencias adicionales


- G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems.* $4^a$ ed. ($1^a$ ed. 1986), Prentice Hall, 2002.

- R. J. Mayhan. *Discrete-Time and Continuous-Time Linear Systems.* Addison Wesley, 1984

- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, M.E. Salgado. *Control System Design.* Prentice Hall, 2001.