Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 7

Z-N y PID

18 de Octubre 2024

Rodrigo Molina - rodrigo.molina@uc.cl

Problema 1

Considere la planta

$$G_o(s) = \frac{-s+1}{(s+1)(s+a)}$$

donde $a > 0$. Si se aplica el método de oscilación de Ziegler y Nichols, determine el valor de la ganancia crítica K_c y del período de oscilación P_c obtenidos del experimento. Ajuste los parámetros de un PID en base a K_c y P_c obtenidos, usando la tabla de Z-N:

	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_c$		
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$P_c/8$

Solución:

El método de oscilación se aplica a plantas estables, cerrando el lazo con un controlador proporcional $C(s) = K_p$ y aumentando la ganancia hasta que el lazo muestre una oscilación sostenida. Para determinar la ganancia crítica a la que se presenta la oscilación obtenemos primero el polinomio de lazo cerrado:

$$A_{cl}(s) = (s+1)(s+a) + K_p(-s+1) = s^2 + (a+1-K_p)s + (a+K_p)$$

Para que haya oscilación sostenida basta que $a+1-K_p = 0$, lo que implica una ganancia crítica de $K_c = a+1$. Esto implica, a su vez, que

$$A_{cl}(s) = s^2 + a + K_p = s^2 + 2a + 1$$

por lo que se desprende que los polos cruzan el eje real en $\pm j\sqrt{2a+1}$, y así la frecuencia crítica de la oscilación sostenida es $\omega_c = \sqrt{2a+1}$. Por lo tanto, el período de la oscilación es $P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{2a+1}}$. Los parámetros del PID son

$$K_p = 0.6(a+1), \quad T_i = \frac{\pi}{\sqrt{2a+1}}, \quad T_d = \frac{\pi/4}{\sqrt{2a+1}}$$

Pregunta 2

Para una planta estable, con modelo $G_o(s)$, se aplica el método de oscilación de Ziegler-Nichols para sintonizar un controlador PI. Se obtienen $K_p = 2$ y $T_i = 1.5$. ¿Cómo se ajustarían esos parámetros si el modelo de la planta fuese $0.5\,G_o(s)$?

Solución:

Al aumentar la ganancia de $G_o(s)$, no cambia el valor de la frecuencia a la cual el LGR cruza el eje imaginario, por lo cual P_c permanece invariante. Sin embargo, si cambia la ganancia crítica en un factor 2. Por lo tanto, T_i no se modifica, pero K_p aumenta al doble, es decir, $K_p = 4$.

Pregunta 3

Una planta tiene una función de transferencia $G_o(s) = 3/(s-2)$. Calcule los parámetros de un controlador PI de modo que los modos naturales del lazo decaigan al menos tan rápido como e^{-4t}.

Solución:

El problema se puede resolver por asignación de polos, algo que veremos pronto en el curso, y en esta ayudantía se ve un caso sencillo para entender en que consiste. Dado que el controlador es un PI, entonces tiene la estructura

$$C(s) = K_p + \frac{K_p}{T_i\, s}$$

y el polinomio de lazo cerrado está dado por

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= \text{num}\left\{1 + \frac{3}{s-2}K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\right\} \\ &= T_i s(s-2) + 3K_p(T_i s + 1) \\ &= T_i s^2 + T_i(3K_p - 2)s + 3K_p \end{aligned}$$

Los polos de lazo cerrado entonces resultan de

$$s^2 + (3K_p - 2)s + 3K_p/T_i = 0$$

Por otro lado, para que los polos decaigan al menos tan rápido que e^{-4t}, debemos fijar un polo dominante en $s = -4$, por ejemplo, y el resto pueden ser polos más rápidos. Un polinomio de lazo cerrado de grado 2 que logra esto sería

$$A_{cl}(s) = (s + 4)(s + 10) = s^2 + 14s + 40$$

Entonces, basta igualar coeficientes para encontrar los parámetros del PI, es decir,

$$\begin{aligned} 3K_p - 2 &= 14 \\ \frac{3K_p}{T_i} &= 40 \end{aligned}$$

Lo que resulta en $K_p = 16/3$ y $T_i = 2/5$. Note que el valor del polo rápido en este ejemplo fue $s = -10$, pero pudo haber sido distinto siempre y cuando cumpla con que sea menor que el valor del polo dominante. Así, se obtendrán distintos controladores PI dependiendo del valor de este polo rápido escogido.