Tema: Criterios de estabilidad de Nyquist y Bode

◁ *Guía de Ejercicios # 16* ▷

1. Considere la función de transferencia:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)s} \tag{1}$$

(a) Construya el diagrama de Nyquist e indique si la planta en *lazo cerrado* es estable.

Para realizar el diagrama de Nyquist:

i. Se reemplaza $s = j\omega$ en $F(s)$:

$$F(j\omega) = \frac{j\omega+2}{j\omega-\omega^2} \tag{2}$$
$$= \frac{j\omega+2}{\omega(j-\omega)} \tag{3}$$
$$= \frac{(j\omega+2)(-j-\omega)}{\omega(j-\omega)(-j-\omega)} \tag{4}$$
$$= \frac{-\omega-j(\omega^2+2)}{\omega(1+\omega^2)} \tag{5}$$

ii. $F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$

$$R(\omega) = -\frac{1}{1+\omega^2}$$
$$X(\omega) = -\frac{\omega^2+2}{\omega(\omega^2+1)}$$

iii. Para frecuencias $\omega \in [-\omega_h, \omega_h]$ se grafican en el plano $\mathbb{C}$ (complejo) pares $(R(\omega), X(\omega))$. Antes de empezar a graficar conviene hacerse algunas preguntas:

A. $\lim_{\omega\to+\infty}(R(\omega), X(\omega)) =?$
B. $\lim_{\omega\to-\infty}(R(\omega), X(\omega)) =?$
C. $\lim_{\omega\to0^+}(R(\omega), X(\omega)) =?$
D. $\lim_{\omega\to0^-}(R(\omega), X(\omega)) =?$
E. ¿Existe simetría con respecto a algún eje?

Las respuestas a cada una de estas preguntas para el sistema en cuestión son:

A. $\lim_{\omega\to+\infty}(R(\omega), X(\omega)) = (0, 0^-)$
B. $\lim_{\omega\to-\infty}(R(\omega), X(\omega)) = (0, 0^+)$
C. $\lim_{\omega\to0^+}(R(\omega), X(\omega)) = (1, -\infty)$
D. $\lim_{\omega\to0^-}(R(\omega), X(\omega)) = (1, +\infty)$
E. Es fácil ver que $R(\omega) = R(-\omega)$ y $X(\omega) = -X(-\omega)$. Por lo tanto, mientras la parte real es igual para frecuencias positivas o negativas, la parte compleja tiene valores con signos opuestos. Esto implica que la simetría se da con respecto al eje real.

A partir de estas observaciones se concluye que basta dibujar el digrama de Nyquist para valores $\omega > 0$ y luego se copia reflejado con respecto al eje horizontal. Calculando distintos valores se obtiene la curva que se muestra en la figura 1. *Nota: El cálculo de puntos de la curva se demuestra demuestra también en el archivo nyquist_tutorial_I2.m que se encuentra en la sección de ejemplos en la página web.*

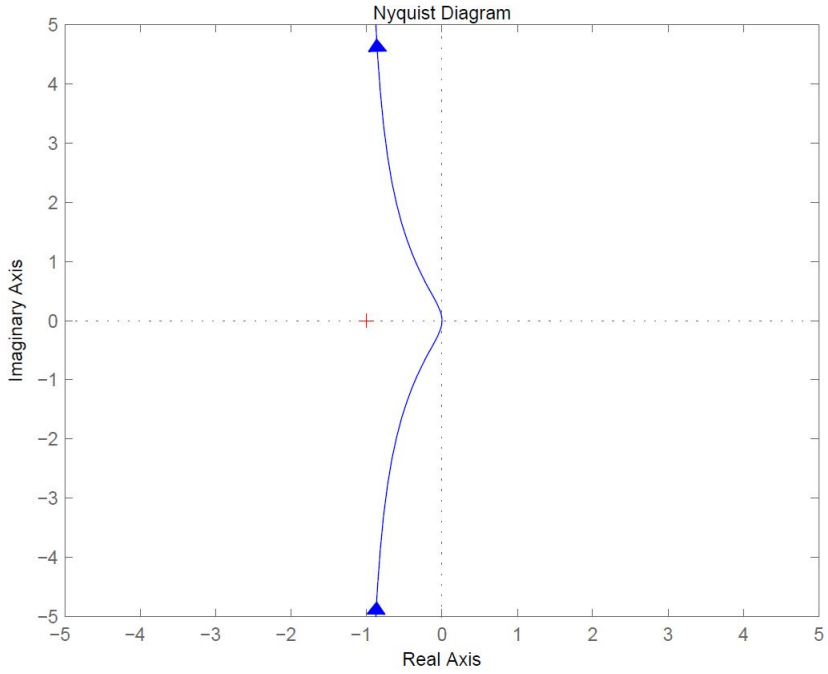


Figura 1: Diagram de Nyquist de la planta $F(s)$.

iv. Finalemente, se aplica el Teorema de Nyquist, el cual establece que:

$$Z = N + P$$

donde Z es el número de ceros z_i, $i = 1, \ldots, m$ tales que $Re(z_i) > 0$, P es el número de polos p_i, $i = 1, \ldots, n$ tales que $Re(p_i) > 0$, N es el número de veces que la curva de Nyquist rodea a -1. N es positivo si el giro es en sentido horario o negativo en caso anti-horario. Por lo tanto, para este ejemplo se tiene:

$$N = 0, P = 0 \Rightarrow Z = N + P = 0$$

lo cual permite concluir que el sistema en lazo cerrado es estable.

(b) Obtenga el margen de ganancia y el margen de fase.
Recordando que el margen de ganacia se calcula para la frecuencia ω_1 para la cual $\angle F(\omega_1) = -180°$, es decir para la cual se cumple que

$$\begin{aligned} \angle F(\omega_1) &= -\pi \\ \operatorname{atan}\left(\frac{X(\omega_1)}{R(\omega_1)}\right) &= -\pi \\ \frac{X(\omega_1)}{R(\omega_1)} &= \frac{0}{-|R(\omega_1)|} \end{aligned}$$

En la gráfica de Nyquist, el margen de ganacia se encuentra calculando la frecuencia ω_1 para la cual $X(\omega_1) = 0$ y calculando:

$$MG = -20 \log(\|F(\omega_1)\|)$$

Para este sistema

$$X(\omega_1) = 0$$

solo cuando $|\omega_1| = \infty$, en cuyo caso $\|F(\omega_1)\| = 0$, por lo tanto el margen de ganacia es:

$$MG = \infty$$

De la gráfica de Nyquist además se puede concluir que como el eje horizontal se corta en $s = 0$, no importa que tan grande sea la ganacia, el único punto donde la curva cortará al eje real será siempre cero, independiente de la ganancia estática K que se coloque en serie con la planta.

Es posible construir la tabla de R-H para verificar este resultado. En este caso, la ecuación característica del sistem realimentado estará dada por:

$$\bar{q}(s) = (s+1)s + K(s+2) = s^2 + (K+1)s + 2K$$

La tabla R-H, será entonces:

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 2K \\ s^1 & K+1 & 0 \\ s^0 & 2K & 0 \end{array}$$

Para la estabilidad del sistema se requiere que todos los elementos de la primera columna tengan el mismo signo. La segunda fila implica que $K + 1 > 0$, sin embargo la tercera requiere que $2K > 0$. Por lo tanto, el sistema será estable para cualquier valor de $K > 0$ sin una cota superior.

En cuanto al margen de fase, este corresponde a la diferencia entre el $\angle F(\omega_2)$, donde ω_2 es la frecuencia para la cual $\|F(\omega_2)\| = 1$.

En este caso:

$$\begin{aligned} \|F(\omega_2)\| &= 1 \\ \|\frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega^2+2}{\omega(\omega^2+1)}\| &= 1 \\ \omega^2 + (\omega^2+2)^2 &= \omega^2(\omega^2+1)^2 \\ \omega^2 + \omega^4 + 4\omega^2 + 4 &= \omega^6 + 2\omega^4 + \omega^2 \\ -\omega^6 - \omega^4 + 4\omega^2 + 4 &= 0 \\ \omega &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

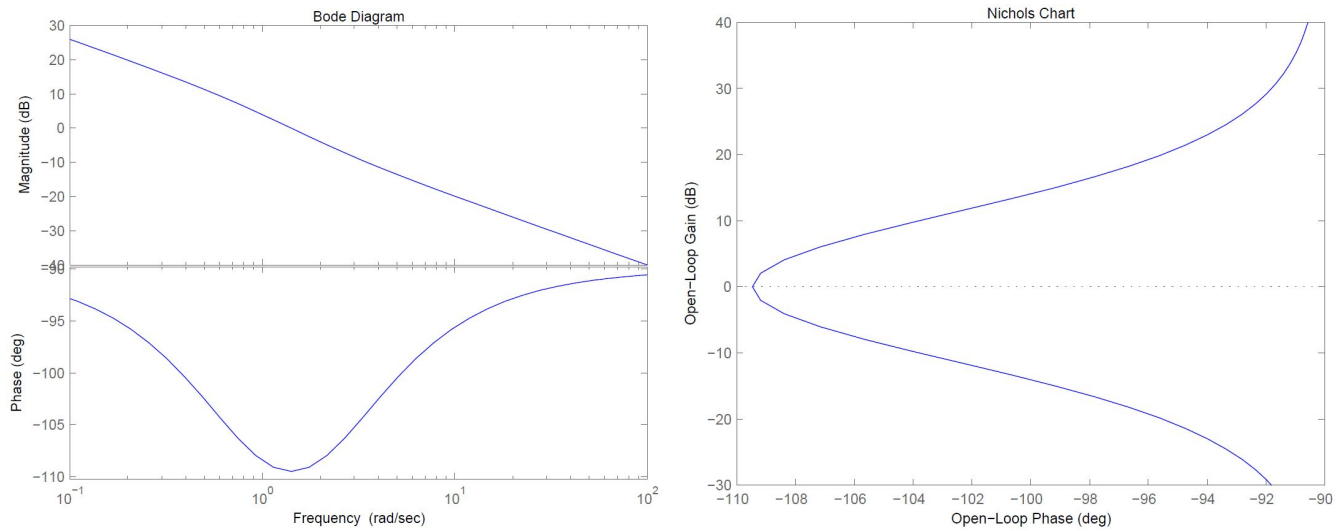
Luego:

$$\begin{aligned} MF &= \pi - \text{atan2}\left(\frac{X(\omega_2)}{R(\omega_2)}\right) \\ &= \pi - \text{atan2}\left(\frac{2\sqrt{2}/3}{-1/3}\right) \\ &= \pi - 1.9106 \\ &= 70.53^\circ \end{aligned}$$

(c) Grafique los diagramas de Bode.

Los diagramas de Bode para la planta son:

De ambos se puede obtener el margen de fase con facilidad. El margen de ganancia es infinito, y por lo tanto en ninguno de los dos diagramas existe un corte del eje horizontal, para ángulos de -180°.

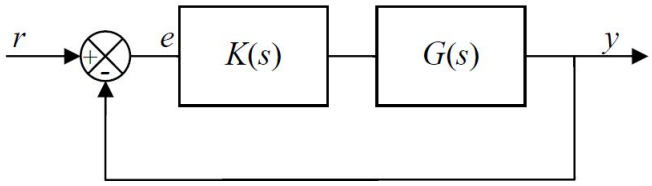


(a) Diagram de Nyquist de la planta $F(s)$.

(b) Diagram de Nichols de la planta $F(s)$.

Figura 2: Diagramas

2. Construir el diagrama de Nyquist para el siguiente sistema realimentado:

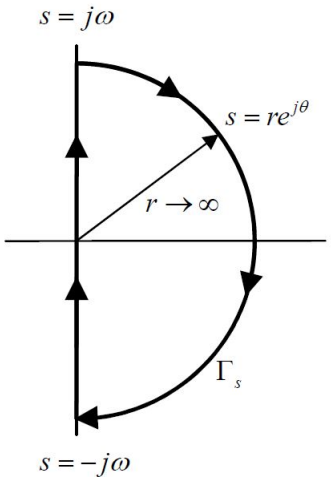


En donde se tiene que:

$$K(s) = K \qquad\qquad G(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 2}$$

Solucíon

Para la construcción del diagrame de Nyquist, se debe transformar un contorno que encierre por completo el semiplano derecho.



A este contorno Γ_s lo denominaremos el contorno de Nyquist. El criterio de estabilidad de Nyquist dice que *Para el contorno $\Gamma_p = P(\Gamma_s)$, el número de vueltas al punto (-1,0) en el sentido de los punteros del reloj N cumple que*

$$N = Z - P$$

Donde P es el número de polos en el semiplano derecho de $P(s)$, y $Z = 0$ para que el sistema O sea, $N = -P$ vueltas en torno a $(-1, 0)$ en el sentido de las agujas del reloj nos da un sistema estable.
El contorno Γ_p se obtiene como la transformación bajo $P(s)$ del contorno Γ_s, cuando la ecuación características del sistema se escribe como $q(s) = 1 + P(s)$.
Como puede verse del gráfico del contorno Γ_s, para realizar la transfor mación se debe separar el contorno en la parte recta y la parte semicircular. Es importante mencionar que el contorno Γ_s no debe pasar sobre ningún polo o cero. En caso de haber polos o ceros en el origen, se debe incluir el trazo $s = \epsilon e_{j\theta}$, con $\epsilon \to 0$, para evitar el problema.
Para el caso del sistema realimentado dado, tenemos que $P(s) = KG(s)$. Transformaremos ahora la recta desde $s = 0$ a $s = j\omega$, cuando $\omega \to \infty$. Para ver que punto y con qué ángulo tiende el diagrama, escribimos la planta de la siguiente forma

$$P(s) = KG(s) = K\frac{s+1}{s^2 - 2s + 2} = K'(\tau s + 1).\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}$$

Con esto, reemplazamos $s = j\omega$, encontrando

$$\lim_{\omega\to+\infty} P(j\omega) = \lim_{\omega\to+\infty} K'(j\omega\tau + 1).\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\omega\omega_n\zeta + \omega_n^2}$$

Escribiendo esto en módulo y fase, queda

$$\lim_{\omega\to+\infty} K'\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\frac{\omega_n^2}{\sqrt{4\zeta^2\omega^2\omega_n^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2}}\angle|tan^{-1}(\omega\tau)| + \left[-90signo(\zeta\omega\omega_n) - tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{2\zeta\omega\omega_n}\right)\right]$$

Es decir, separamos la planta en componentes básicos de primer y segundo orden, y calculamos su magnitud y fase como la multiplicación de las magnitudes y la suma de las fases, respectivamente[1]. Tomando el límite, obtenemos

$$\lim_{\omega\to+\infty} P(j\omega) = 0\angle 90signo(\tau) - 180signo(\zeta\omega_n)$$

Identificando parámetros, tenemos que $\tau = 1$, $\omega_n = \sqrt{2}$, $\zeta - \sqrt{2}/2$, y $K' = K/2$. Con esto, finalmente, tenemos que cuando $\omega \to \infty$, el contorno $\Gamma_p \to 0\angle 270°$. Tomando el otro límite, es claro que

$$\lim_{\omega\to+\infty} P(j\omega) = 0\angle - 90signo(\tau) + 180signo(\zeta\omega_n)$$

Por tanto, tenemos que en este caso $\Gamma_p \to 0\angle - 270°$.
El punto $s = 0$ se transforma en

$$\lim_{\omega\to+\infty} K'\frac{\omega_n^2\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}{\sqrt{4\zeta^2\omega^2\omega_n^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2}}\angle|tan^{-1}(\omega\tau)| + \left[-90signo(\zeta\omega\omega_n) - tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{2\zeta\omega\omega_n}\right)\right]$$

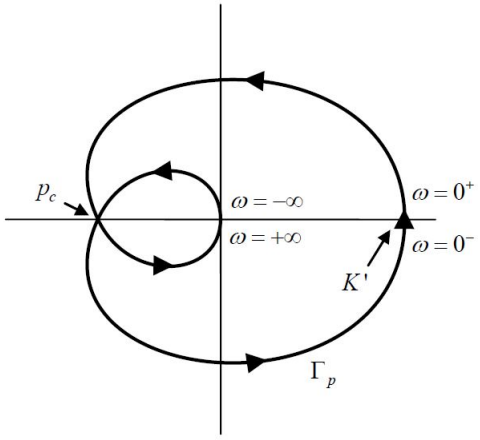
$$= \quad = K'\angle 0$$

Ahora, encontraremos la transformación del contorno $s = re_{j\theta}$. Reemplazando esto en la planta genérica, tenemos.

[1] La magnitud y fase de los componentes básicos se debe conocer de memoria, eso facilita encontrar la magnitud y fase de cualquier sistema

$$\lim_{r\to+\infty} K' \frac{(\tau r e^{j\theta}+1)\omega_n^2}{r^2 e^{j2\theta}+2\omega_n\zeta r e^{j\theta}+\omega_n^2} = \lim_{r\to+\infty} K' \frac{\omega_n^2 \tau r e^{j\theta}}{r^2 e^{j2\theta}} = \lim_{r\to+\infty} K' \frac{\omega_n^2 \tau}{r} e^{-j\theta} = 0\angle -\theta$$

Como se puede ver, cuando estamos en el extremo superior $+j\omega$, con $\theta = 90°$, obtenemos que el contorno está en $0\angle -90°$. A su vez, en el extremo $-j\omega$, con $\theta = -90°$, el contorno está en $0\angle 90°$.
Con estos datos, ya podemos bosquejar el diagrama de Nyquist, como se ve en la siguiente figura.



Para ver la estabilidad, debemos encontrar el punto de cruce por el eje real del lado izquierdo, p_c. Se aprecia que esto ocurre cuando la fase es $180°$. Resolviendo, tenemos

$$tan^{-1}(\omega) + 90 + tan^{-1}\left(\frac{\omega^2-2}{2\omega}\right) = 180$$

De lo que se obtiene que $\omega = 2$. La magnitud cuando $\omega = 2$ es

$$\left[K' \frac{2\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{\omega^4+4}}\right]_{\omega=2} = K'$$

Entonces, el punto $p_c = K'\angle 180°$. Según el criterio de Nyquist, como tenemos que $P = 2$, entonces se deben dar $N = -2$ vueltas en sentido de las agujas del reloj. Viendo sto en el diagrama de Nyquist, se puede conluir que para el sistema de 2 vueltas en contra de los punteros del reloj en torno al punto $(-1, 0)$, entonces $p_c < -$, con lo que

$$K' > 1$$

Y como$K' = K/2$, queda que el sistema es estable si $K > 2$, el mismo resultado que

3. Una planta estable en lazo abierto, se le excita con una entrada sinusoidal de frecuencias entre 0 y $+\infty[\frac{rad}{seg}]$, obteniéndose la respuesta de amplitud en frecuencia de la figura 3 . También se registró la respuesta en el tiempo para 3 frecuencias distintas que se presentan en las figuras 4 , 5 y 6. Identifique la planta completa.

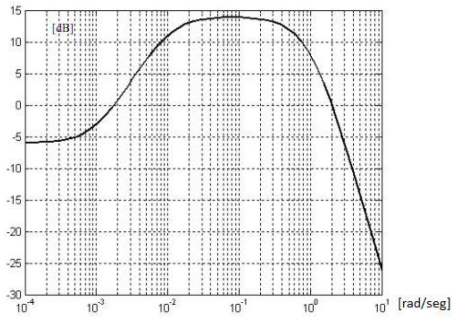


Figura 3: Respuesta de amplitud en frecuencia.

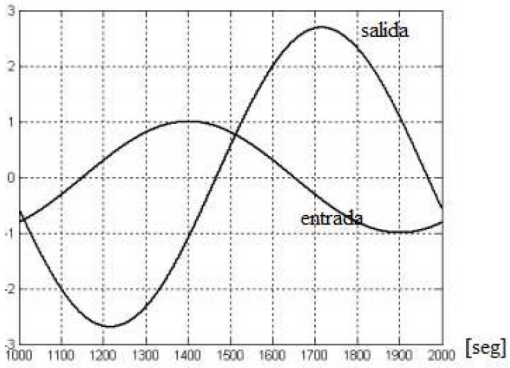


Figura 4: Respuesta en el tiempo

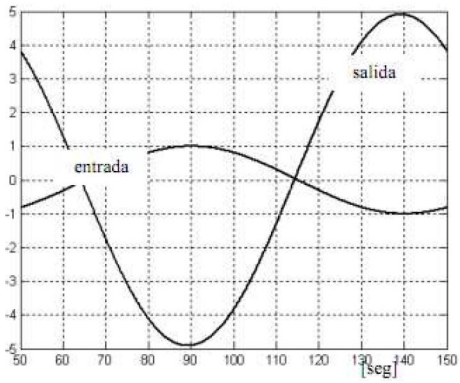


Figura 5: Respuesta en el tiempo

Solución

De la figura 3, se obtienen las asíntotas aproximadas:

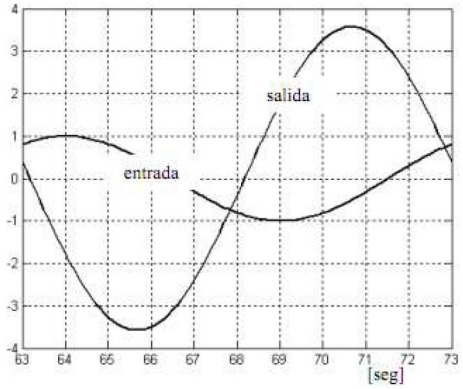
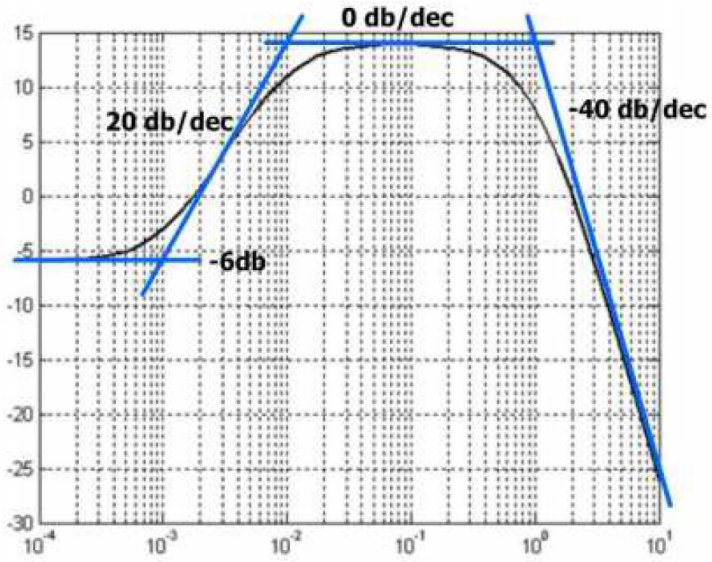


Figura 6: Respuesta en el tiempo



De donde se pueden obtener los siguientes valores aproximados:
Ganancia Estática:

$$GE = -6dB \Rightarrow K = 0.5$$

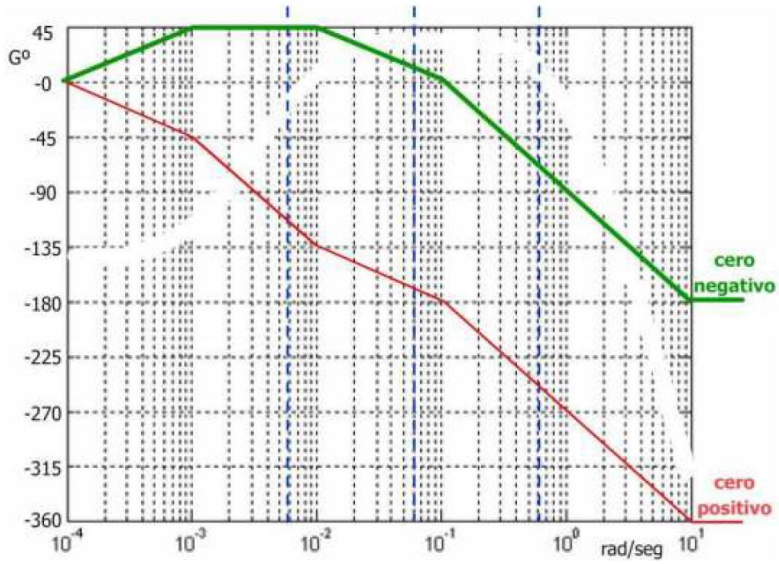
Ceros en $\omega = \pm 10^{-3}[\frac{rad}{seg}]$ (Ojo con el $\pm$, el cero puede estar en el semiplano real positivo, hay que revisar la fase).
Polo en $\omega = -10^{-2}[\frac{rad}{seg}]$
2 Polos en $\omega = -1[\frac{rad}{seg}]$, sin sobreoscilación, por lo que $\xi > 0.7$, por ejemplo $\xi = 1$

$$G(s) = \frac{0.5\left(1 \pm \frac{s}{10^{-3}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{10^{-2}}\right)\left(s^2 + 2\xi s + 1\right)}$$

De las figuras 4 , 5 y 6 se puede obtener la siguiente información (aprox):

Donde las ganancias coinciden con el diagrama de magnitud de Bode. Ahora, si se analizan las asíntotas de la fase para los casos de cero negativo y positivo:

Figura	T[seg]	ω[milirad/seg]	Ganancia	Desfase
2	1000	6.28	Un:2.7 dB:8.63	Seg: -300 ó 700 Rad: -108 ó 252
3	100	62.83	Un: 5 dB:13.98	Seg: ± 50 Rad: ± 180
4	10	628.32	Un:3.5 dB:10.88	Seg: 3.5 ó -6.5 Rad: 126 ó 234



Se aprecia que el cero positivo coincide con la fase.
Por lo tanto la planta es:

$$G(s) = \frac{0.5\left(1 - \frac{s}{10^{-3}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{10^{-2}}\right)\left(s^2 + 2\xi s + 1\right)}$$