# Tema: Solución de ecuaciones diferenciales empleando la transformada de Laplace

◁ *Guía de Ejercicios # 7* ▷

1. Un parlante puede modelarse como muestra la figura 1. El imán permanente establece un campo radial en el espacio cilíndrico entre los polos del imán. La fuerza en el conductor de la bobina causa el movimiento del enrollado, provocando el sonido.

   El cono con aire se puede modelar con una masa equivalente M y un coeficiente de roce viscoso b,

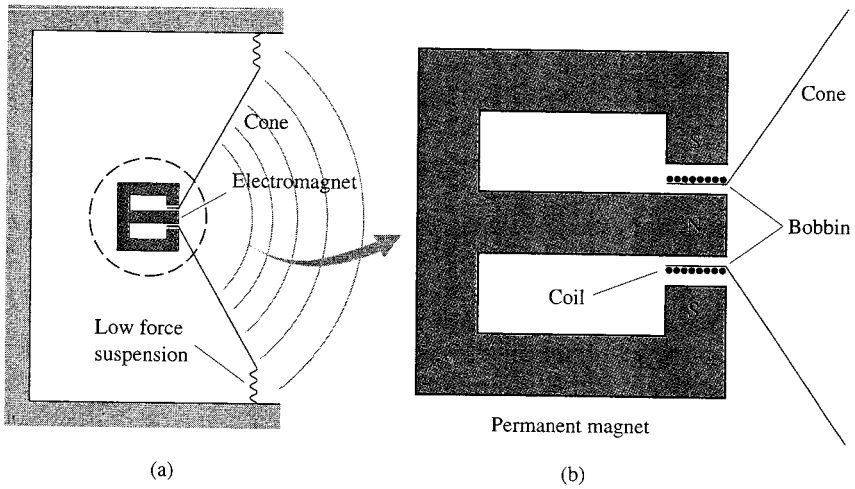



Figura 1: An example of an invisible figure.

asumiendo que el imán establece un campo uniforme de 0,5 T y que la bobina tiene 20 vueltas con un diámetro de 2 cm, se pide:

(a) Escribir las ecuaciones de movimiento del artefacto.
Se aplica la ley de motores $F = B.l.i$, ya que la corriente es perpendicular al campo, además la fuerza es perpendicualar al plano de $i$ y $B$. Sabemos que:

$$\begin{aligned} B &= 0,5 tesla \\ l &= 20\frac{2\pi}{100} metros = 1,26 metros \end{aligned}$$

Por lo tanto la fuerza resultante es:

$$\begin{aligned} F &= 0,5 \times 1,26 \times i \\ &= 0,63i[N] \end{aligned}$$

Aplicando las leyes de Newton:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = 0,63i$$

Esta es la ecuación diferencial de $2^{\circ}$ orden que describe el movimiento del cero del parlante en función de la corriente de entrada $i$.

Para escribir esta ecuación con variables de estado usamos:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,63/M \end{bmatrix} i$$

Por otro lado, la función de transferencia estará dada por:

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{0,63/M}{s(s+b/M)}$$

Pues:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,63/M \end{bmatrix} i$$

$$\ddot{x} = -\frac{b}{M}\dot{x} + \frac{0,63}{M} i$$

aplicando Laplace

$$\begin{aligned} s^2X(s) + sx(0) + x'(0) &= -\frac{b}{M}sX(s) + \frac{0,63}{M}I(s) \\ X(s)\left[s\left(s+\frac{b}{M}\right)\right] &= \frac{0,63}{M}I(s) \\ \frac{X(s)}{I(s)} &= \frac{0,63/M}{s(s+b/M)} \end{aligned}$$

(b) Para el parlante anterior, la figura 2 muestra el circuito de driver, encuentre las ecuaciones que relacionan el voltaje de entrada con el desplazamiento del cono . Asuma que la resistencia del circuito es $R$ y que la inductancia es $L$.
Se usa la Ley de Generadores $e(t) = B.l.v[volts]$, pues es conductor de $l$ metros mueve un campo magnético de B teslas a una velocidad de $v$ metros por segundo y son ortogonales, estableciendo un voltaje electrico. Utilizando esta expresión:

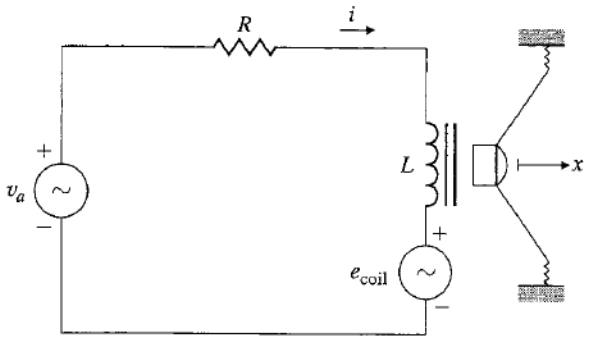



Figura 2: Circuito de driver del parlante

$$e = B.l.\dot{x} = 0,63\dot{x}$$

Usando esta expresión, y con Leyes de Kirchoff, se tiene:

$$\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri &= v_a - 0,63\dot{x} \\ \Rightarrow \frac{di}{dt} &= -\frac{0,63}{L}\dot{x} - \frac{R}{L}i + \frac{v_a}{L} \end{aligned}$$

Entonces, usando el vector de variables de estado:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/M & 0,63/M \\ 0 & -0,63/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} V_a$$

Cuya función de transferencia es: (resolviendo de manera análoga a parte a)

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0,63}{s[(Ms+b)(Ls+R) + (0,63)^2]}$$