PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Pauta Interrogación 2

IEE2613 – CONTROL AUTOMÁTICO (S2-2024)

Profesor: Alejandro Maass **Fecha:** 21/10/2024 (17:30–19:30)

P1 (20pts) En un lazo de control como el de la Figura 1, se tiene que

$$G_o(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}, \qquad T_o(s) = \frac{1}{\tau s+1}$$

donde τ es un número positivo muy pequeño. Haga un gráfico cualitativo de la actuación $u(t)$ cuando la referencia $r(t)$ es un escalón unitario. (Suponga que $d_i = d_o = 0$).

Solución: Nos interesa dibujar la actuación, por ende, debemos considerar la función de sensibilidad que relaciona la referencia con la actuación, es decir,

$$\frac{U(s)}{R(s)} = S_{uo}(s) = \frac{T_o(s)}{G_o(s)} = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(\tau s+1)}$$

Por ende, cuando $R(s) = 1/s$ (escalón unitario), tenemos que

$$U(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(\tau s+1)} \times \frac{1}{s}$$

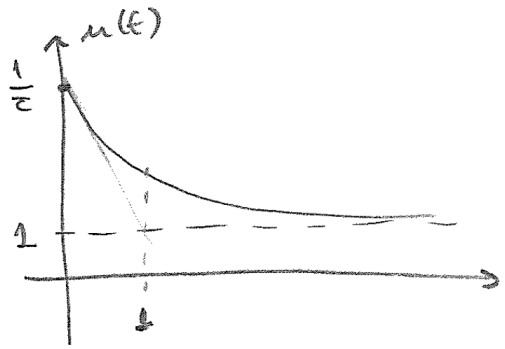
Acá tenemos opciones, usamos fracciones parciales o teoremas del valor inicial y final. Por ejemplo, en el tiempo, sabemos que la actuación se calcula como

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s+1)(\tau s+1)} \times \frac{1}{s}\right\} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{\tau s+1} \end{aligned}$$

Vemos que la respuesta está dominada por el polo "lento" en $s = -1$ y el polo rápido en $s = -1/\tau$ no afecta. Podríamos calcular A, B, C, pero dado que se sabe que, cualitativamente, la respuesta es de primer orden, basta usar el teorema del valor inicial y final para calcular $u(0)$ y u_∞, esto es:

$$\begin{aligned} u(0) &= \lim_{s\to\infty} sU(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+s+1}{(s+1)(\tau s+1)} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+s+1}{\tau s^2+(1+\tau)s+1} = \frac{1}{\tau} \\ u_\infty &= \lim_{s\to 0} sU(s) = 1 \end{aligned}$$

El gráfico cualitativo entonces está dado por



P2 (20pts) En un lazo de control como el de la Figura 1, se tiene que

$$G_o(s) = \frac{-s+2}{s^2+s+1}, \qquad S_o(s) = \frac{s}{s+1}$$

Determine si el lazo es internamente estable. Justifique adecuadamente su respuesta. (Acá $r(t)$, $d_i(t)$ y $d_o(t)$ pueden ser **distintos** de cero).
Solución: Podemos notar varias cosas a priori

- El orden del denominador de $S_o(s)$ es menor que el de la planta, por ende, hay cancelaciones
- Sin embargo, no conocemos el controlador $C(s)$, entonces no sabemos si se canceló el cero de fase no mínima de la planta en $s = 2$, lo cual generaría un lazo inestable

Por ende, para verificar que el lazo cerrado es internamente estable, debemos mirar todas las sensibilidades

- $S_o = \frac{s}{s+1}$ es estable ya que tiene un polo en $s = -1$
- $T_o(s) = 1 - S_o(s) = \frac{1}{s+1}$ también es estable
- $S_{io}(s) = S_o(s)G_o(s) = \frac{s(-s+2)}{(s^2+s+1)(s+1)}$ también es estable
- $S_{uo}(s) = \frac{T_o(s)}{G_o(s)} = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(-s+2)}$ es **inestable!**. Se ve que en efecto había una cancelación inestable ya que el cero de fase no mínima aparece en $S_{uo}(s)$, haciendo todo el lazo inestable.

P3 (20pts) En un lazo de control como el de la Figura 1, se tiene que

$$G_o(s) = \frac{1}{(s+a)^4}, \qquad C(s) = K_p$$

donde $a > 0$. Determine, si es que existen, las condiciones sobre K_p que generan oscilaciones sostenidas en el lazo, y calcule la frecuencia de dichas oscilaciones.

Solución: Este problema se puede resolver por LGR o Routh-Hurwitz. En esta pauta lo haremos por Routh.

El polinomio de lazo cerrado está dado por

$$A_{cl}(s) = \text{num}\left\{1 + G_o(s)C(s)\right\} = (s+a)^4 + K_p = s^4 + 4as^3 + 6a^2s^2 + 4a^3s + (a^4 + K_p)$$

El arreglo de Routh está dado por

s^4	1	$6a^2$	$a^4 + K_p$
s^3	$4a$	$4a^3$	0
s^2	$\frac{24a^3 - 4a^3}{4a} = 5a^2$	$a^4 + K_p$	
s^1	$\frac{16a^3 - 4K_p/a}{5}$	0	
s^0			

Vemos que para que exista una oscilación sostenida en el lazo cerrado, basta que exista una fila completa en el arreglo de Routh igual a cero. Esto se cumple cuando

$$\frac{16a^3 - 4K_p/a}{5} = 0 \iff K_p = 4a^4$$

La frecuencia asociada a dicha oscilación se obtiene del hecho que, al haber una fila completa igual a cero, el polinomio de lazo cerrado se puede factorizar como

$$A_{cl}(s) = p_a(s)(5a^2s^2 + a^4 + K_p)$$

donde $p_a(s)$ es algún polinomio que no influye en esta frecuencia, ya que de acá vemos que los polos complejos conjugados que generan esta oscilación sostenida son

$$s = \pm ja$$

es decir, la frecuencia de oscilación es $\omega_c = a$ [rad/s].

P4 (20pts) En un lazo de control como el de la Figura 1, se tiene que

$$G_o(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \qquad C(s) = 2 + \frac{\alpha}{s}$$

(a) **[10pts]** Dibuje el LGR para $\alpha > 0$ y determine si existe algún valor de α que estabilice el lazo cerrado.

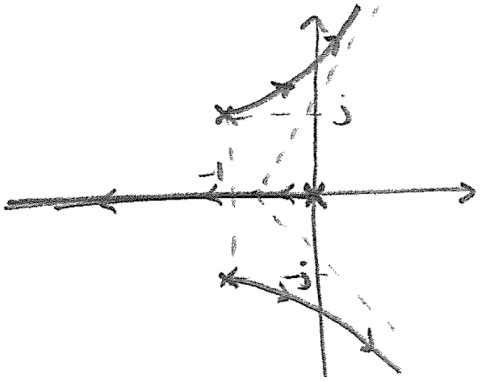
(b) **[10pts]** Dibuje el LGR para $\alpha < 0$ y determine si existe algún valor de α que estabilice el lazo cerrado.

(Solo basta decir si existe o no un α estabilizante. ¡No es necesario calcularlo!)
Solución: El polinomio de lazo cerrado está dado por

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) = s^2(s+2) + (2s+\alpha) = s^3 + 2s^2 + 2s + \alpha = 0 \\ = 1 + \alpha \underbrace{\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s}}_{F(s)} \end{aligned}$$

Hay $n = 3$ polos $s = 0$ y $s = -1 \pm j$ y $m = 0$ ceros

LGR para $\alpha > 0$



- $n - m = 3$ asíntotas
- Centroide

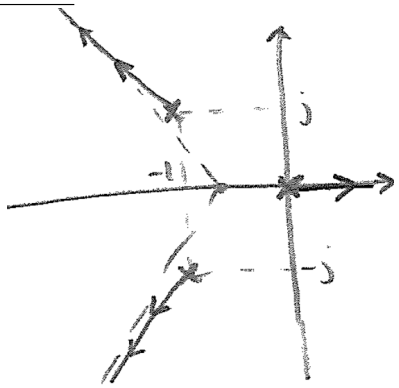
$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum c_i}{n - m} = \frac{-2}{3}$$

- Ángulo asíntotas

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \\ \phi_2 &= -60^\circ \\ \phi_3 &= 180^\circ \end{aligned}$$

Se puede apreciar del LGR que si existe un $\alpha > 0$ que haga el lazo estable, dado que el LGR cruza el eje imaginario y se puede escoger un α (que no era necesario calcular en esta interrogación) de tal forma que todas las raíces estén en el semiplani izquierdo abierto.

LGR para $\alpha < 0$

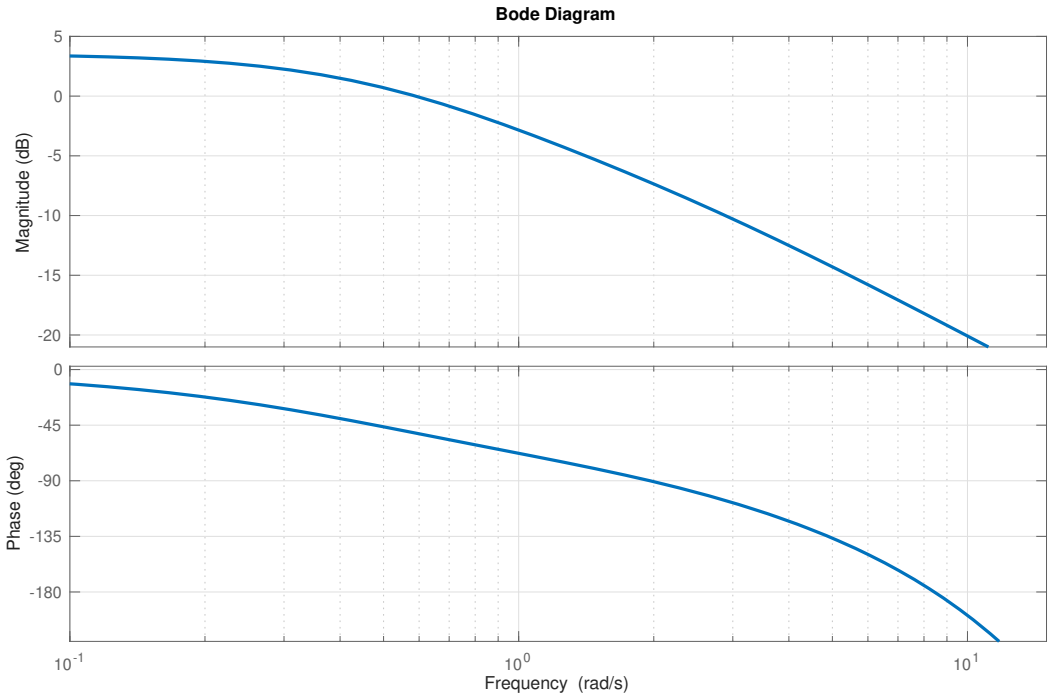


- $n - m = 3$ asíntotas
- Centroide no cambia $\sigma = \frac{-2}{3}$
- Ángulo asíntotas

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0^\circ \\ \phi_2 &= 120^\circ \\ \phi_3 &= 240^\circ \end{aligned}$$

Se puede apreciar del LGR que no existe ningún $\alpha < 0$ que logre estabilizar el lazo, ya que siempre habrá una raíz que se encuentre en el semiplano derecho.

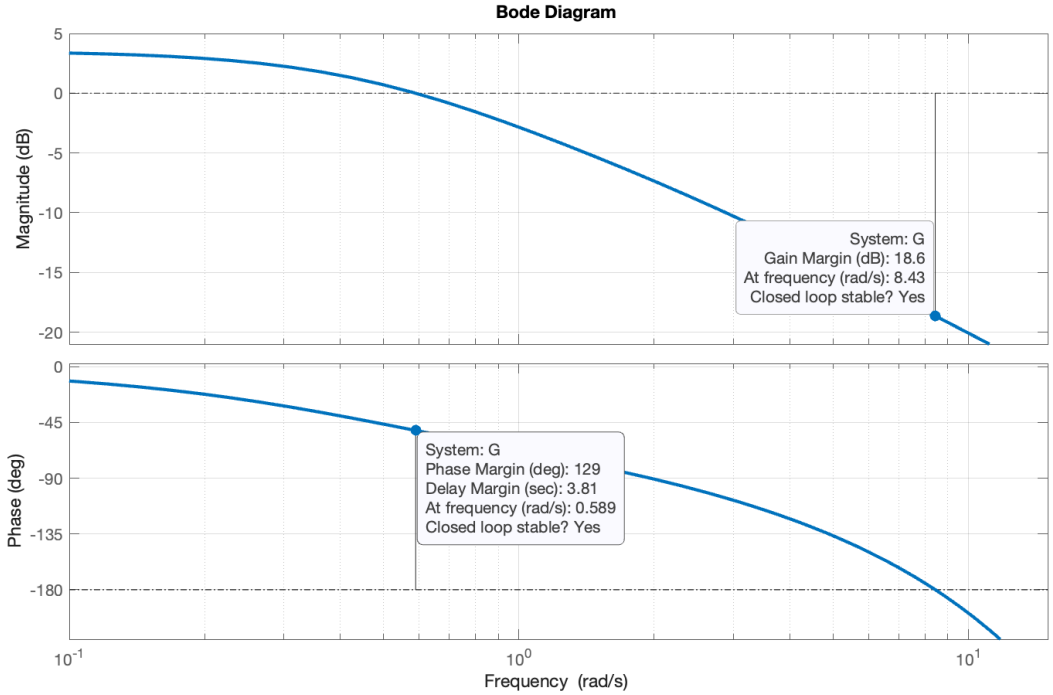
P5 (20pts) La figura muestra el diagrama de Bode de una transferencia de lazo abierto $G_o(s)C(s)$ que no tiene cancelaciones inestables ni polos en el semiplano derecho abierto.



(a) **[10pts]** Calcule, de manera aproximada, los márgenes de ganancia y fase.

(b) **[10pts]** ¿Cuál es el máximo retardo que se puede agregar a $G_o(s)C(s)$ antes de inestabilizar el lazo cerrado?

Solución:



(a) Los márgenes se pueden calcular a partir del diagrama de Bode. El margen de ganancia ocurre en la frecuencia donde la fase es $-180°$, lo cual aproximadamente en $\omega_g \approx 8$ [rad/s]. En el Bode de ganancia, para esta frecuencia, vemos que el margen de ganancia es aproximadamente $M_g \approx 18$.

El margen de fase ocurre en la frecuencia donde el Bode de ganancia es igual a 0 dB. Esto ocurre en $\omega_f \approx 0.6$. Para esta frecuencia, el Bode de fase nos dice que el margen de fase es approximadamente $M_f \approx -45 + 180 \approx 135$.

(b) Como se planteó en la guía de ejercicios para la I2, el máximo retardo τ que se puede agregar al lazo cerrado está relacionado con M_f, y de la forma $\tau = M_f[rad]/\omega_f$, lo cual nos da un máximo retardo de $\tau \approx \frac{135\pi}{180\times 0.6} \approx 4$ [seg].