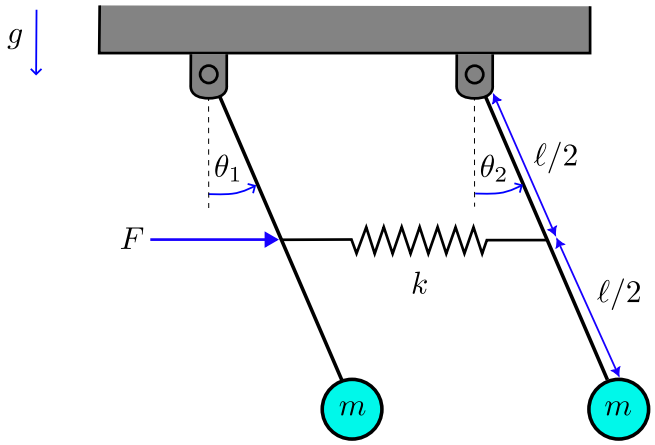
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

# Pauta – Interrogación 1

IEE2613 – CONTROL AUTOMÁTICO (S2-2024)

**Profesor:** Alejandro Maass **Fecha:** 09/09/2024 (17:30–19:30)

**P1 (25pts)** Considere dos péndulos acoplados por un resorte como ilustra la figura.




Un modelo no lineal para este sistema está dado por

$$\begin{aligned} m\ell^2\ddot{\theta}_1(t) + mg\ell\sin(\theta_1(t)) - \frac{k\ell^2}{4}(\theta_2(t) - \theta_1(t)) &= \frac{\ell}{2}F(t) \\ m\ell^2\ddot{\theta}_2(t) + mg\ell\sin(\theta_2(t)) + \frac{k\ell^2}{4}(\theta_2(t) - \theta_1(t)) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\ell$ es el largo de cada péndulo, $g$ la aceleración de gravedad, $m$ la masa, $k$ la constante del resorte, $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ los ángulos de desplazamiento con respecto a la vertical, y $F(t)$ la fuerza externa.

$(a)$ **[5pts]** Defina un vector de estados apropiado $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top$, y escriba (1) de la forma estándar

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2}$$

donde la entrada $u(t)$ corresponde a la fuerza externa $F(t)$.

$(b)$ **[10pts]** Obtenga un modelo linealizado en variables de estados, en base a (2), alrededor del punto de equilibrio $\theta_{1Q} = \theta_{2Q} = u_Q = 0$.

$(c)$ **[10pts]** Asuma que la ecuación diferencial del modelo linealizado, para ciertos valores de $(m, \ell, k, g)$, se puede escribir como

$$\begin{aligned} 4\ddot{\theta}_1(t) + 21\theta_1(t) - \theta_2(t) &= F(t) \\ 4\ddot{\theta}_2(t) + 21\theta_2(t) - \theta_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

Obtenga la función de transferencia $H(s) = \dfrac{\Theta_2(s)}{U(s)}$, donde $\Theta_2(s) = \mathcal{L}\{\theta_2(t)\}$ y $U(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$.

**Solución:**

$(a)$ Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top$ con $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$ y $x_4 = \dot{\theta}_2$, y sea $u = F$. Entonces podemos escribir

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) + \frac{k}{4m}(x_3 - x_1) + \frac{1}{2m\ell}u \\ x_4 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_3) - \frac{k}{4m}(x_3 - x_1) \end{bmatrix}$$

$(b)$ Sea $\Delta x = x - x_Q$, $\Delta u = u - u_Q$, donde $x_Q = 0$ y $u_Q = 0$. Entonces, el modelo linealizado en espacio de estados está dado por

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

donde

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_Q,u_Q)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{\ell} - \frac{k}{4m} & 0 & \frac{k}{4m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{4m} & 0 & -\frac{g}{\ell} - \frac{k}{4m} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_Q,u_Q)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2m\ell} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(c)$ Aplicando Laplace a las ecuaciones

$$4\ddot{\theta}_1(t) + 21\theta_1(t) - \theta_2(t) = F(t)$$
$$4\ddot{\theta}_2(t) + 21\theta_2(t) - \theta_1(t) = 0$$

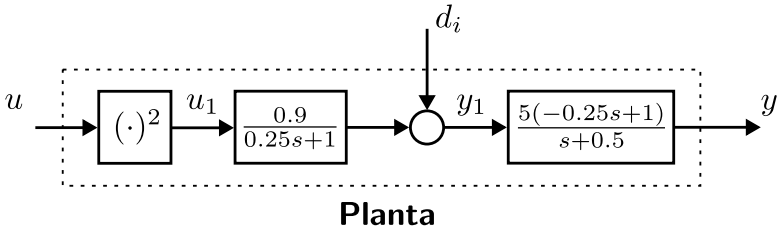
obtenemos

$$4s^2\Theta_1(s) + 21\Theta_1(s) - \Theta_2(s) = U(s)$$
$$4s^2\Theta_2(s) + 21\Theta_2(s) - \Theta_1(s) = 0$$

La segunda ecuación implica que $\Theta_1(s) = \Theta_2(s)(4s^2 + 21)$, y por ende, reemplazando en la primera, obtenemos

$$(4s^2 + 21)^2\Theta_2(s) - \Theta_2(s) = U(s)$$
$$\iff \frac{\Theta_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{(4s^2 + 21)^2 - 1} = \frac{1}{16s^4 + 168s^2 + 440}$$

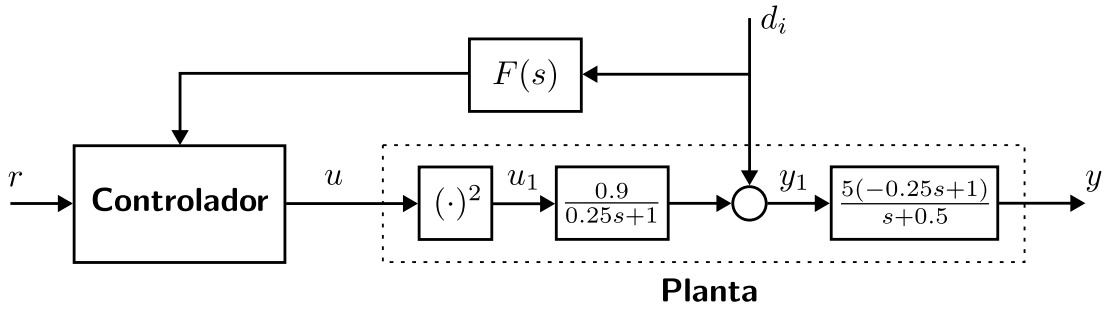
**P2 (20pts)** El modelo de una planta está representado por el diagrama de bloques que se muestra en la siguiente figura:




Los objetivos de control que se buscan son los siguientes:

1. La salida de la planta $y$ debe seguir una referencia $r \geq 0$ de tipo escalón unitario en estado estacionario.
2. La salida $y$ debe ser inmune a perturbaciones $d_i$ constantes, en estado estacionario.

Para alcanzar los objetivos de control mencionados, se propone un esquema de control en lazo abierto, tal como se muestra en la siguiente figura:



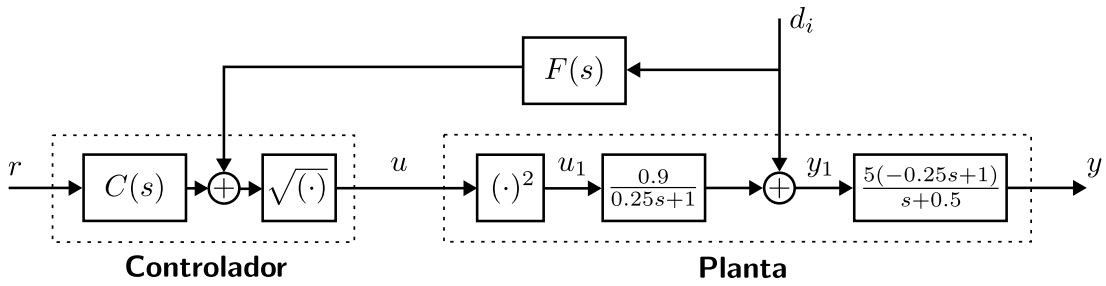

A partir de lo anterior, responda las siguientes dos preguntas:

$(a)$ **[10pts]** Diseñe el bloque "**Controlador**" para cumplir con el objetivo 1.

$(b)$ **[10pts]** Diseñe la función de transferencia $F(s)$ para cumplir con el objetivo 2.

**Solución:**

$(a)$ El bloque del controlador debiese tener la siguiente estructura para poder tratar de cumplir los objetivos:




Ahora, para lograr el objetivo 1, nos concentraremos en diseñar la componente $C(s)$ del controlador, dado que la nolinealidad $(\cdot)^2$ se "cancela" con el bloque de la raíz cuadrada $\sqrt{(\cdot)}$. Al eliminarse las no linealidades, queda un esquema de control lineal, en donde superposición se puede aplicar. Por ende, para el primer objetivo de control, hacemos $d_i = 0$, y vemos que la salida depende de la referencia de la forma:

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)C(s) = \frac{5(-0.25s+1)}{s+0.5}\frac{0.9}{0.25s+1}C(s)$$

donde $G_1(s) = \frac{5(-0.25s+1)}{s+0.5}$ y $G_2(s) = \frac{0.9}{0.25s+1}$. Podemos ver entonces, que para seguir a la referencia constante en estado estacionario, basta que $C(s)$ cumpla con

$$C(0) = \frac{1}{G_1(0)G_2(0)} = \frac{1}{9}$$

Sin embargo, **no** podemos invertir el cero de fase no mínima. Entonces, basta proponer un $C(s)$ de la forma

$$C(s) = \frac{(0.25s+1)(s+0.5)}{4.5(\tau s+1)^2}$$

donde los polos en $s = -1/\tau$ se agregan para hacer el controlador implementable, con un $\tau > 0$ pequeño. **Note que acá la solución no es única, y sirve cualquier controlador estable e implementable que cumpla con** $C(0) = 1/9$**.**

$(b)$ Para lograr el segundo objetivo, basta ver como se relaciona la salida de la planta con la perturbación $d_i$. Haciendo $r = 0$, notamos que

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)D_i(s) + G_1(s)G_2(s)F(s)D_i(s) \\ &= G_1(s)(1 + G_2(s)F(s))D_i(s) \end{aligned}$$

Por ende, dado que la perturbación es constante, nos gustaría que

$$(1 + G_2(0)F(0)) = 0 \iff F(0) = \frac{-1}{G_2(0)} = \frac{-1}{0.9}$$

Es decir, basta proponer un $F(s)$ de la forma

$$F(s) = \frac{-(0.25s+1)}{0.9(\beta s+1)}$$

donde escogemos un $\beta > 0$ suficientemente pequeño. **También sirve un** $F(s) = -10/9$ **constante.**

**P3 (30pts)** Considere una planta con entrada $u$ y salida $y$, modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + (1+\varepsilon)u^2(t)$$

donde $\varepsilon \geq 0$.

$(a)$ **[10pts]** Obtenga un modelo linealizado, en espacio de estados, de la planta para el punto de equilibrio determinado por $u_Q = 1/2$.

$(b)$ **[10pts]** Obtenga la función de transferencia que relaciona la entrada y la salida del modelo linealizado.

$(c)$ **[5pts]** Calcule la respuesta a escalón unitario de la función de transferencia obtenida.

$(d)$ **[5pts]** ¿Para qué valor de $\varepsilon$ la respuesta a escalón unitario decae igual o más rápido que la señal $e^{-2t}$?

**Solución:**

$(a)$ Definimos los estados $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y} - u$. Entonces,

$$\dot{x}_1 = x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} - \dot{u} = -3\dot{y} - 2y + \dot{u} + (1+\varepsilon)u^2 - \dot{u} = -3(x_2+u) - 2x_1 + (1+\varepsilon)u^2$$

Entonces, en la forma estándar, el sistema no lineal queda escrito como

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 + u \\ -2x_1 - 3x_2 - 3u + (1+\varepsilon)u^2 \end{bmatrix}$$

La salida del sistema es $y$, la cual es igual a $y = x_1$ por definición. Resta linealizar. Primero, encontremos el punto de operación cuando $u_Q = 1/2$. Tenemos que

$$2y_Q = (1+\varepsilon)u_Q^2 \Longrightarrow x_{1Q} = \frac{1+\varepsilon}{8},$$

aunque veremos que no es necesario utilizarlo. Sea $\Delta x = x - x_Q$ y $\Delta u = u - u_Q$. Entonces, el modelo linealizado, en espacio de estados, está dado por

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x$$

donde

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_Q,u_Q)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_Q,u_Q)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2+\varepsilon \end{bmatrix}$$

$(b)$ Podemos obtener la función de transferencia de dos formas, usando la fórmula $G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$, o mirando la ecuación diferencial lineal, la cual está dada por

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + (1+\varepsilon)u$$

De ambas formas, obtendremos

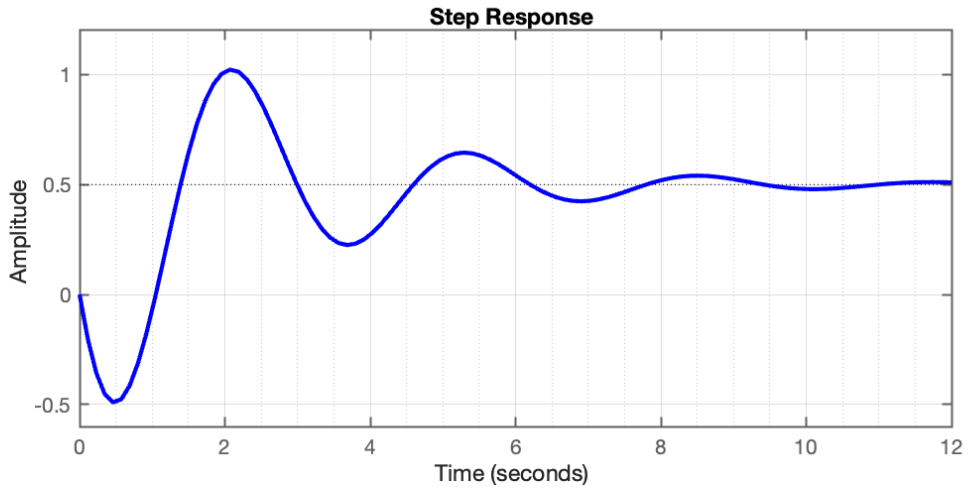
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1+\varepsilon}{s^2+3s+2}$$

$(c)$ La respuesta a escalón unitario está dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1+\varepsilon}{s^2+3s+2} \times \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1+\varepsilon}{(s+1)(s+2)s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1+\varepsilon}{2(s+2)} - \frac{\varepsilon}{s+1} + \frac{1+\varepsilon}{2s}\right\}$$
$$= \frac{-1+\varepsilon}{2}e^{-2t} - \varepsilon e^{-t} + \frac{1+\varepsilon}{2}$$

$(d)$ Note que para que la respuesta a escalón unitario calculada anteriormente decaiga igual o más rápido que $e^{-2t}$, basta tomar $\varepsilon = 0$, y así matamos el modo $e^{-t}$ de la respuesta.

**P4 (25pts)** La figura muestra la respuesta a escalón unitario de un sistema lineal e invariante en el tiempo, con condiciones iniciales iguales a cero. En base a este gráfico, responda lo siguiente:




$(a)$ **[10pts]** Proponga una estructura para la función de transferencia $H(s)$ del sistema.

$(b)$ **[15pts]** Obtenga de manera aproximada los parámetros del $H(s)$ propuesto. Explique cómo los obtuvo.

**Solución:**

$(a)$ De la figura podemos observar un undershoot, lo que indica que la planta tiene un cero de fase no mínima. Además, observamos que claramente tiene un comportamiento de segundo orden, es decir, dos polos complejos conjugados. Por ende, una estructura válida para la figura es

$$H(s) = \frac{-s + c}{s^2 + 2\psi\omega_n s + \omega_n^2}$$

con $c > 0$.

$(b)$ Del gráfico podemos extraer bastante información. Por ejemplo:

- $y_\infty = 0.5 = H(0) = \frac{c}{\omega_n^2}$
- El tiempo en que ocurre el overshoot es aproximadamente $t_p \approx 2 = \frac{\pi}{\omega_d}$

$$\implies \boxed{\omega_d \approx \frac{\pi}{2} = \omega_n\sqrt{1-\psi^2}}$$

- La constante de tiempo es $\tau = \frac{1}{\psi\omega_n} \approx 2 \implies \boxed{\psi \approx \frac{1}{2\omega_n}}$

Por ende, podemos escribir

$$\frac{\pi}{2} \approx \omega_n\sqrt{1-\psi^2} = \omega_n\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_n^2 - 1} \implies \pi^2 = 4\omega_n^2 - 1 \implies \boxed{\omega_n \approx \sqrt{\frac{\pi^2+1}{4}} \approx 1.64}$$

Y así, $\boxed{\psi \approx \frac{1}{2\omega_n} \approx 0.3}$. Lo que nos lleva a calcular el cero de la planta $\boxed{c = H(0)\omega_n^2 \approx 0.5 \times 1.64^2 \approx 1.34}$.
Es decir, la planta que genera la respuesta de la figura es, aproximadamente, igual a

$$H(s) = \frac{-s + 1.34}{s^2 + 0.98s + 2.69}$$

**Esta no es la única forma de resolver la pregunta! Hay diferentes estructuras de $H(s)$ que pueden ser válidas, y por ende, los parámetros pueden tener valores diferentes.**