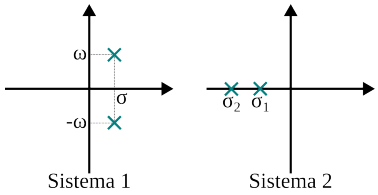
1: Responda las siguientes preguntas

- *¿Indique en que casos es conveniente usar un sistema de lazo abierto?*
  Los sistemas en lazo abierto se suelen usar en casos donde no se puede medir la salida del sistema (variable controlada). Por ejemplo:
  - *Lavadora de ropa*
  - *Tostadora de pan*
  - *Riego automático*
- *¿Cúal es la diferencia entre sistemas de lazo abierto y cerrado?*
  La diferencia principal es que en lazo cerrado es posible medir la salida del sistema y realimentar esta información para comparar con el valor deseado. Por otra parte, los sistemas en lazo abierto no suelen tener problemas de inestabilidad como los sistemas en lazo cerrado.
- *¿Cúal es la definición de función de transferencia?*
  La función de transferencia es la relación que existe entra la salida y entrada de un sistema en el espacio de Laplace, cuando se asumen condiciones iniciales cero
- *¿De dos casos en donde la representación en espacio de estados de un sistema es más ventajosa que usar la función de transferencia?*
  Se recomiendo usar la representación en espacio de estados por sobre la función de transferencia en los siguientes casos:
  - *Análisis en el dominio del tiempo*
  - *Interpretación física*
  - *Sistemas MIMO*
  - *Teoría de control moderan*
  - *Observabilidad y controlabilidad*

(25 %)

2: Para los sistemas descritos por los siguientes diagramas de polos y ceros



- *Dibuje la respuesta natural en tiempo de cada sistema; use como entrada* $f(t) = \delta(t)$.
- *¿Qué sistema se puede considerar inestable?.*

(25 %)

Previo al desarrollo del ejercicio es importante notar que en el diagrama de polos y ceros que el eje horizontal se representan valores reales, y en el eje vertical se posicionan números complejos. Por simplisidad se asumirá que la ganancia de la función de transferencia es $K = 1$. Para encontrar la respuesta natural de cada sistema, primero determinaremos la función de transferencia de cada sistema.

- Sistema 1: tiene dos polos en $\sigma \pm j\omega$, entonces,

$$F_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{\cancel{K}^{1}}{(s-\sigma+j\omega)(s-\sigma-j\omega)}$$

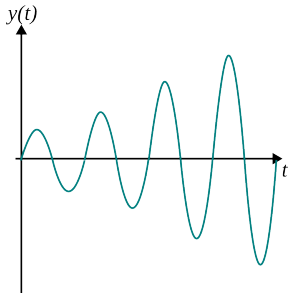
Si la entrada es $\delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$, por ende

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{1}{(s-\sigma+j\omega)(s-\sigma-j\omega)} \cdot \cancel{U(s)}^{1} \\ &= \frac{K_1}{(s-\sigma+j\omega)} + \frac{K_2}{(s-\sigma-j\omega)} \\ &= \frac{1}{-2j\omega(s-\sigma+j\omega)} + \frac{1}{2j\omega(s-\sigma-j\omega)} \\ &= \frac{1}{2j\omega}\left(\frac{1}{(s-\sigma-j\omega)} - \frac{1}{(s-\sigma+j\omega)}\right) \end{aligned}$$

Si aplicamos la transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2j\omega}\left(e^{(\sigma+j\omega)t} - e^{(\sigma-j\omega)t}\right) \\ &= \frac{e^{\sigma t}}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{j\omega t}}{2j}\right) \\ &= \frac{1}{\omega}e^{\sigma t}\left(\sin(\omega t)\right) \end{aligned}$$

En base a esta respueta en tiempo podemos dibujar la respuesta natural del sistema



Debido a que la respuesta natural del sistema no tiende a cero cuando $t \to \infty$ este sistema se puede considera como **inestable**

- Sistema 2: tiene dos polos en σ_1, σ_2, entonces,

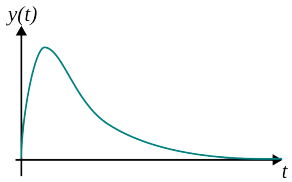
$$F_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{\cancel{K}^{1}}{(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)}$$

Similar al caso anterior, aplicando fracciones parciales y luego la transformada inversa de Laplace encontramos que la respuesta en tiempo del sistema 2 es

$$\begin{aligned} y_2(t) &= K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t} \\ &= \frac{1}{-\sigma_1+\sigma_2}\left(e^{-\sigma_1 t} - e^{-\sigma_2 t}\right) \end{aligned}$$

En esta caso, el bosquejo de la respuesta natural será

Debido a que la respuesta natural del sistema tiende a cero a medida que el tiempo se incrementa, este sistema se puede considerar como **estable**



3: Una entrada $r(t) = t, t \geq 0$ se aplica a una caja negra con función de transferencia $G(s)$. La respuesta del sistema, cuando las condiciones iniciales son cero es:

$$y(t) = e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$$

.

- *Determine la función de transferencia $G(s)$ del sistema.*

(25 %)

Para encontrar la función de transferencia debemos recordar que esta representa la relación entre la entrada y la salida del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

La respuesta del sistema la podemos encontrar mediante la transformada de Laplace:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2}$$

Por otra parte tenemos que la función de transferencia de la entrada es

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

Entonces, tenemos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = s^2Y(s) = \frac{s^2}{s+1} - \frac{s^2}{4(s+2)} - \frac{s}{4} + \frac{1}{2}$$

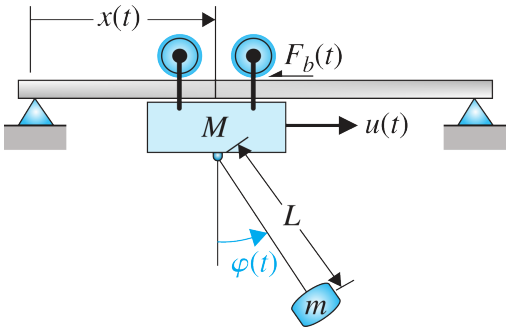
Recordando términos encontramos que

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

4: Considere la grúa colgante mostrada en la figura.

- *Determine la representación en espacio de estados mediante las matrices* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ *que describre el comportamiento del sistema.*
- *En base a la representación en espacio de estados, encuentre la función de transferencia del sistema.*

Considere como entrada $u(t)$ *y salida* $\varphi(t)$*. Note que la masa del carro es* M*, la masa de la carga es* m*, la masa* m *esta conectada al carro mediante una barra rígida de longitud* L *y masa despreciable. Considere que la fuerza de fricción se puede modelar como* $F_b(t) = -b\dot{x}(t)$*, donde* $x(t)$ *es la distancia recorrida por el carro.* ***(25 %)***



El desarrollo de este ejercicio es similar al enviado en el Control 2. Primero se debe obtener las ecuaciones diferenciales que describen el sistema; para ello se puede usar las leyes de Newton o principio de Lagrange. Si aplicamos leyes de Newton sobre el carro tendremos

$$M\ddot{x} = u - b\dot{x} - F\sin(\varphi)$$

Donde F representa la fuerza de reacción entre el carro y el péndulo. Por otra parte, realizando equilibrio de fuerzas en el péndulo

$$m\frac{d^2x + L\sin(\varphi)}{dt^2} = F\sin(\varphi)$$
$$m\frac{d^2(L\cos(\varphi))}{dt^2} = F\cos(\varphi) + mg$$

En base a este a análisis, el sistema de ecuaciones que describe el sistema es:

$$(m+M)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - mL\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) = u$$
$$mL^2\ddot{\varphi} + mgL\sin(\varphi) + mL\ddot{x}\cos(\varphi) = 0$$

Debido a que el sistema es no-lineal, debemo linealizarlo alrededor de un punto de equilibrio. En este caso se asume como punto de equilibrio a $\varphi_e = 0, \dot{\varphi}_e = 0$. Además, en el punto de equilibrio se espera que las variaciones de $\varphi, varphi$ sean muy pequeñas de tal forma que

$$\cos(\varphi_e + \delta\varphi) \approx 1$$
$$\sin(\varphi_e + \delta\varphi) \approx \delta\varphi$$

Abusando de la notación $\delta\varphi = \varphi$, tenemos que el sistema lineal se puede expresar como:

$$(m+M)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\varphi} = u$$
$$mL^2\ddot{\varphi} + mgL\varphi = -mL\ddot{x}$$

Si ordenamos los términos anteriores, tenemos:

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} - \frac{mg}{M}\varphi = \frac{u}{M}$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{M+m}{ML}g\varphi - \frac{b}{ML}\dot{x} = -\frac{u}{ML}$$

Con este nuevo sistema de ecuaciones, definimos las variables de estado como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Por ende, el modelo del proceso será:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mg}{M} & -\frac{b}{M} & 0 \\ 0 & -\frac{m+M}{ML}g & \frac{b}{ML} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{ML} \end{bmatrix} u(t)$$

Por otra parte, el modelo de salida será:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \cancelto{0}{\boldsymbol{D}} u(t)$$

En base a esta representación, la función de transferencia se podrá encontrar como:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

Primero determinaremos $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & s + \frac{b}{M} & 0 \\ 0 & \frac{m+M}{ML}g & -\frac{b}{ML} & s \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{E} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$, tal que:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} & e_{1,4} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & e_{2,4} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & e_{3,4} \\ e_{4,1} & e_{4,2} & e_{4,3} & e_{4,4} \end{bmatrix}$$

Debido a que nos interesa φ como respuesta, tendremos:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} & e_{1,4} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & e_{2,4} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & e_{3,4} \\ e_{4,1} & e_{4,2} & e_{4,3} & e_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{ML} \end{bmatrix} U(s)$$
$$= \begin{bmatrix} e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & e_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{ML} \end{bmatrix} U(s)$$
$$= \left(\frac{e_{2,3}}{M} - \frac{e_{2,4}}{ML} \right) U(s)$$

Notemos que la inversa de una matriz esta dada por

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\}}{\det\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\}}$$

Donde

$$\text{adj}\{\boldsymbol{sI - A}\} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n,1} & C_{n,2} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix}^T$$

$C_{i,j} = (-1)^{(i+j)} M_{i,j}$

$M_{i,j}$ es el menor complementario del elemento $a_{i,j}$ de : $[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]$

Los términos de la matriz adjunta que nos interesan son: $C_{3,2}, C_{4,2}$, tal que

$$e_{2,3} = \frac{C_{3,2}^T}{\det\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\}}$$
$$e_{2,4} = \frac{C_{4,2}^T}{\det\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\}}$$

Entonces,

$$C_{3,2} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{b}{ML} & s \end{bmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0\frac{b}{ML}s + 0) = \frac{b}{ML}s$$

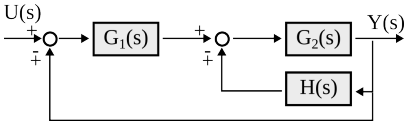
$$C_{4,2} = (-1)^{4+2} \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & s + \frac{b}{M} & 0 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 - (s + \frac{b}{M})s + 0) = (s + \frac{b}{M})s$$

Por otra parte,

$$\det\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\} = \frac{s(bg + Mgs + gms + MLs^3 + Lbs^2)}{ML}$$

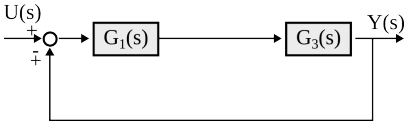
Entonces,

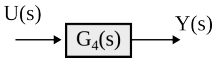
$$\begin{aligned} Y(s) &= \left(\frac{e_{2,3}}{M} - \frac{e_{2,4}}{ML}\right) U(s) \\ &= \frac{1}{\det\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\}} \left(\frac{C_{3,2}}{M} - \frac{C_{4,2}}{ML}\right) U(s) \\ &= \frac{ML}{s(bg + Mgs + gms + MLs^3 + Lbs^2)} \left(\frac{\frac{b}{ML}s}{M} - \frac{(s + \frac{b}{M})s}{ML}\right) U(s) \\ &= \frac{ML}{s(bg + Mgs + gms + MLs^3 + Lbs^2)} \left(\frac{-Ms^2}{M^2 L}\right) U(s) \\ &= -\frac{s}{bg + Mgs + gms + MLs^3 + Lbs^2} U(s) \end{aligned}$$



Bonus**: Determine la función de transferencia equivalente del siguiente diagrama de bloques.* ***(25 %)

Dado que no existen signos en el diagrama, se asume que la realimentación es negativa/positiva. El primer paso es encontrar la función de transferencia equivalente del lazo interno y luego la del lazo externo, como se muestra a continuación





$$G_3(s) = \frac{G_2(s)}{1 \pm G_2(s)H(s)}$$

$$G_4(s) = \frac{G_1(s)G_3(s)}{1 \pm G_1(s)G_3(s)}$$

$$G_4(s) = \frac{G_1(s)\frac{G_2(s)}{1 \pm G_2(s)H(s)}}{1 \pm G_1(s)\frac{G_2(s)}{1 \pm G_2(s)H(s)}}$$

$$\Rightarrow G_4(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 \pm G_2(s)H(s) \pm G_1(s)G_2(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 \pm (H(s) \pm G_1(s))G_2(s)}$$