Información Importante

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \begin{cases} \sigma_d = \zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} = \frac{y_{max} - y_{final}}{y_{final}}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad \omega_n t_r = 1.76\zeta^3 - 0.417\zeta^2 + 1.039\zeta + 1$$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) \qquad E(s) = R(s) - Y(s)$$

Lugar geométrico de las raíces

1. Preparar la ecuación característica: $1 + KF(s)$
2. Determinar los segmentos del eje real donde existe el LGR.
3. Determinar los ceros en el infinito, si existe, mediante las asíntotas centradas en σ_A con ángulo ϕ_A, e

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} \qquad \phi_k = \frac{2k-1}{n-m}180°, k = 1, 2, \ldots, n-m$$

4. Determinar los puntos donde el LGR cruza el eje imaginario (si lo hace)
5. Determinar el punto de quiebre, en caso de existir: $K = p(s) \Rightarrow \frac{dp(s)}{ds}$
6. Determine los ángulos de partida y llegada: $\lambda\phi_k^{sal} = \sum_{j=1}^{m} \psi_j - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \phi_i - 180° - 360°(k-1)$

1: En la Figura 1 (a) se muestra una leva tridimensional para generar una función de dos variables. Tanto x como y pueden ser controlados utilizando un sistema de control de posición. El control de x se puede lograr con un motor de corriente continua (DC) y una retroalimentación de posición como se muestra en la Figura 1 (b). Si el proceso se puede representar por

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)(s+4)}$$

donde $K = 2$ y $p = 1$. Determine las constantes K_p, K_D de un controlador proporcional derivativo

$$G_c(s) = K_P + K_D s$$

para alcanzar un $\%OS \leq 5\%$ a una entrada paso y un tiempo de establecimiento $t_s \leq 2$ s. ***(25 %)***

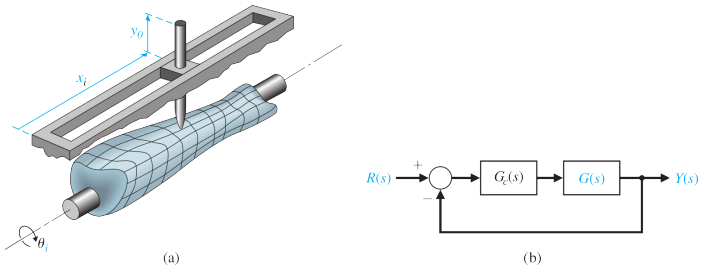


Figure 1: Sistema 1

Notemos que la planta y el controlador están dados por

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+4)} \qquad G_c(s) = K_d s + K_P$$

Dado que el sistema tiene un lazo de retroalimentación unitario, podemos escribir la ecuación característica como

$$s^3 + 5s^2 + (4 + 2K_D)s + 2K_P = 0$$

Es importante notar que no podemos asumir que el sistema se comportará como uno de segundo orden ya que desconocemos la ubicación de los polos en lazo cerrado. No obstante, si tenemos en cuenta que la ecuación característica deseada se expresa como

$$(s+a)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = s^3 + (2\zeta\omega_n + a)s^2 + (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n a)s + a\omega_n^2 = 0$$

Podremos igualar los términos de la ecuación característica y la actual

$$2\zeta\omega_n + a = 5, \qquad \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n a = 4 + 2K_D, \qquad a\omega_n^2 = 2K_P$$

Los valores de ζ, ω_n los podemos enontrar en base a $\%OS$ y t_s, específicamente encontramos que:

$$\zeta \geq 0.69 \qquad \omega_n \geq 2.89$$

Si escogemos $\zeta = 0.7, \omega_n = 3$ para cumplir con las condiciones de diseño; entonces, tendremos un sistema de 3 ecuaciones y 3 variables. Resolviendo el sistema encontramos que:

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n + a = 5 \\ \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n a = 4 + 2K_D \\ a\omega_n^2 = 2K_P \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 0.8 \\ K_D &= 4.18 \\ K_P &= 3.6 \end{aligned}$$

2: Considere el sistema mostrado en la Figura 2. Se desea un sistema estable y un error en estado estable a una entrada paso menor o igual a 0.05.

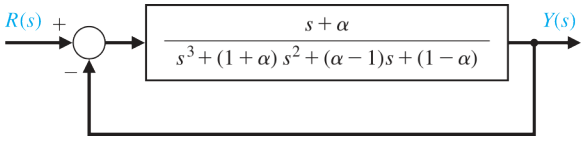


Figure 2: Sistema 2

- *Seleccione un valor de* α *que cumpla con ambos requrimientos*

(25 %)

La condición de estabilidad la podemos evaluar mediante el criterio de Routh-Hurwitz, mientras que el error en estado estable mediante la ecuación del error de posición.

Antes de analizar la condición de error garantizaremos la estabilidad del sistema, para ello escribimos la ecuación característica como:

$$s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha s + 1$$

Entonces, la el arreglo de Routh-Hurwitz será:

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & \alpha & 0 \\ s^2 & 1+\alpha & 1 & 0 \\ s^1 & \frac{\alpha^2+\alpha-1}{1+\alpha} & 0 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Para que se cumpla la condición de estabilidad necesitamos que:

$$\frac{\alpha^2+\alpha-1}{1+\alpha} > 0$$

Resolviendo obtenemos que $\alpha > 0.62$

Por otra parte, mediante la condición de error estado estable se tiene que:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \qquad K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow e_{ss} \leq |0.05|$$

$$e_{ss} = 1-\alpha \leq 0.05 \qquad e_{ss} = 1-\alpha \leq -0.05 \qquad 0.95 \leq \alpha \leq 1.05$$

En base a estas condiciones se puede escoger $\alpha = 1.0$ para satisfacer ambas condiciones

3: Considere el sistema mostrado en la Figura 3. Usando el lugar geométrico de las raíces determine el valor de $K > 0$ *tal que los polos en lazo cerrado tengan un coeficiente de amortiguamiento* $\zeta = 0.7$. ***(25 %)***

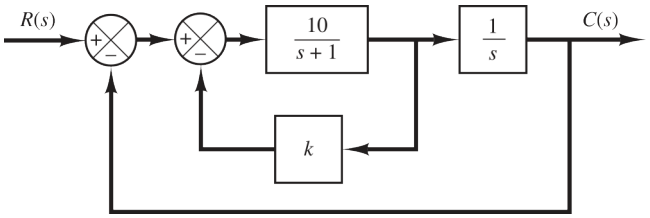


Figure 3: Sistema 3

Para aplicar el LGR, necesitamos conocer el sistema en lazo abierto, para ello eliminamos el lazo interno de retroalimentación obteniendo:

$$G_(s) = \frac{10}{s(s+1+10K)}$$

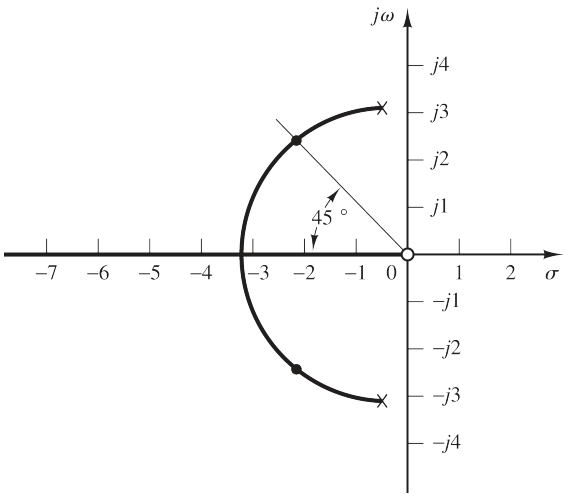
Por lo tanto, la ecuación característica del sistema es:

$$s^2 + s + 10Ks + 10 = 0$$

Esta ecuación la podemos reescribir como

$$1 + \frac{10Ks}{s^2 + s + 10}$$

Con esta forma podemos graficar el LGR obteniendo:



La información requerida para obtener un buen bosquejo del LGR es: punto de quiebre (3.16) y ángulos de partida de los polos $(190°, -170°)$.

Para encontrar el polo en lazo cerrado que cumplen la condición de amortiguamiento, buscamos la intersección entre el LGR y una recta imaginaria a $45°$. Similar a lo visto en los controles, podemos encontrar este punto mediante un conjunto de candidatos. En este caso se obtiene que el polo en lazo cerrado donde ocurre esta intersección es:

$$s_D = -2.23 \pm j2.23$$

Note que este polo se encuentra mediante la condición de ángulo $\angle F(s) = 180$

Una vez que encontramos el polo deseado s_D podemos determinar el valor de la ganancia K mediante la condición de magnitud:

$$K|F(s_D)| = 1$$
$$K = 0.347$$

4: Considere un sistema de control de posición angular como el mostrado en la Figura 4. Proponga un compensador para disminuir el error en estado estable para una entrada rampa de 360°/sec en 10 veces mientras se mantiene el coeficiente de amortiguación ζ del sistema. Se permite una variación mínima en la frecuencia natural ω_n de los polos dominantes en lazo cerrado. ***(25 %)***

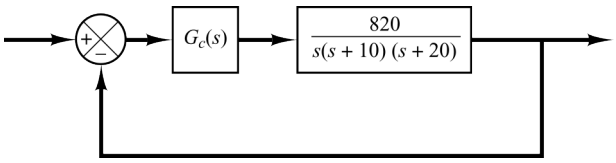


Figure 4: Sistema 4

Para corregir el error en estado estable necesitamos aplicar un compensador en atraso, específicamente:

$$D_c(s) = \frac{s+z}{s+p} \qquad\qquad p < z$$

Dado que se requiere disminuir en 10 veces el error en estado estable, entonces requerimos que la ganancia del compensador en estado estable sea de 10. Es decir:

$$\frac{z}{p} = 10$$

Para escoger el valor del cero del compensador necesitamos conocer la frecuencia natural del sistema. Encontrando los polos del sistema en lazo cerrado sin compensar tenemos:

$$s_{1,2} = -3.596 \pm j4.79$$
$$s_3 = -22.81$$

Los polos del sistema no compensado en lazo cerrado nos indican que el comportamiento del sistema se podría aproximar a un sistema de segundo orden (polos dominantes), entonces podemos encontrar:

$$\zeta = 0.6$$
$$\omega_n = 6$$

Ahora, si escogemos el cero 100 veces menor a ω_n tenemos que el compensador será

$$D_c(s) = \frac{s+0.06}{s+0.006}$$

Para confirmar que el compensador no afecta la respuesta transitoria del sistema, podemos calcular los polos en lazo cerrado del sistema compensado. El sistema compensado se expresa como

$$T(s) = \frac{820(s+0.06)}{s^4 + 30.01s^3 + 200.2s^2 + 821.2s + 49.2}$$

Sus polos estan dados por

$$s_1 = -0.0608$$
$$s_{1,2} = -3.571 \pm j4.767$$
$$s_3 = -22.81$$

A pesar de ser un sistema de cuarto orden, se debe notar que el efecto del polo $s_1 = -0.0608$ se cancelará con el efecto del cero del compensador. Por otra parte, el polo $s_4 = -22.81$ se encuentra lo suficientemente alejado de los polos conjugados (polos dominantes) así que su efecto en la respuesta del sistema se podrá despreciar. Entonces, en base a los polos conjugados ($s_{2,2}$) se determinará si la respuesta transitoria se vio afectada al añadir el compensador en atraso.

Los valores de ζ, ω_n del sistema compensado son:

$$\zeta = 0.5996$$
$$\omega_n = 5.956$$

Debido a que los valores de ζ, ω_n del sistema compensado son similares a los del sistema sin compensar, se verifica que el compensador en atraso no afecto la respuesta transitoria del sistema. Además, se mejoró su respuesta en estado estable