Capítulo 2 – Representación de Sistemas Dinámicos: Modelos Matemáticos de Tiempo Continuo

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Modelos Matemáticos de Sistemas Dinámicos

- Definición de Modelo Matemático de un Sistema Dinámico en el Dominio del Tiempo
- Principios de Modelamiento
- Tipos de Modelos
- Ejemplos
- Linealización

* Veremos modelos en el dominio de la frecuencia y modelos de tiempo discreto en los próximos capítulos.

Definición 2.1:

Un modelo matemático de un sistema dinámico en el dominio del tiempo es un sistema de ecuaciones diferenciales, de diferencias o algebraicas a partir de los cuales la salida del sistema $y(t)$ puede calcularse una vez conocida la función de entrada $r(t)$ y los estados iniciales.



Principios de modelamiento

Dada una descripción de la planta y principios básicos de operación:

1. Establecer principios de conservación relevantes (leyes físicas: masa, energía o momentum).
2. Derivar las ecuaciones de balance y establecer las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales (i.e. modelo matemático).
3. Verificar la existencia de soluciones a las ecuaciones del modelo.

Tipos de modelos

- Dinámicos y estáticos
- De tiempo continuo y de tiempo discreto
- De variable continua y de variable discreta
- Lineales y no lineales
- Invariantes y variantes en el tiempo
- Determinísticos y estocásticos
- De parámetros concentrados y de parámetros distribuidos [1]

[1] Espacio del estado es infinito, y se describe usualmente por ecuaciones diferenciales parciales, e.j., problemas de transferencia de calor y distribución de temperaturas en un horno o máquina de sinterizado laser, problemas de aerodinámica, problemas de elasticidad estructural, etc. se aproximan mediante modelos de diferencias finitas (FDM, *finite-difference models*) empleando métodos de elementos finitos (FEM, *finite-element methods*).

Ejemplos de modelos de sistemas lineales en el dominio del tiempo

Mecánicos:

- Resortes (Springs)
- Amortiguadores (Dampers or Dashpots)
- Masa
- Engranajes y Transmisiones Mecánicas

Eléctricos:

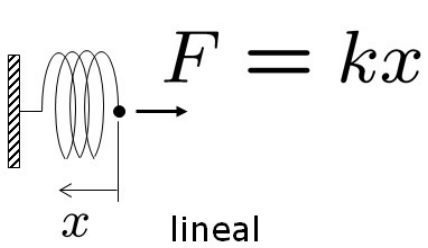
- Resistencias
- Capacitancias
- Inductancias

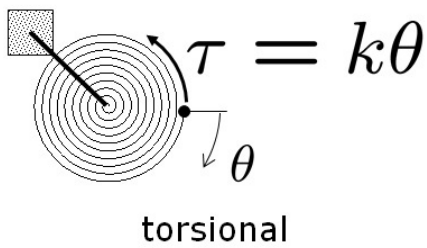
Termodinámicos:

- Hornos (Transferencia de Calor)

Modelos lineales de elementos mecánicos (1/2)

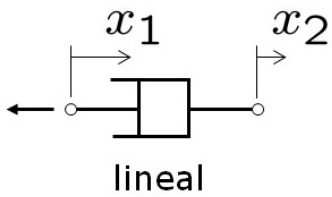
Resortes:

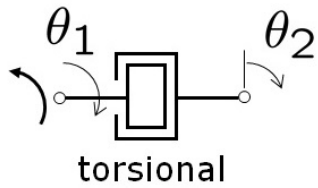




donde k es la constante del resorte, x el desplazamiento lineal y θ el desplazamiento angular.

Amortiguadores:

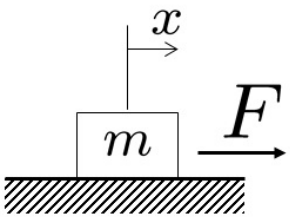




$$F = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \qquad \tau = c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

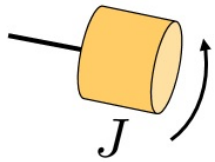
Modelos lineales de elementos mecánicos (2/2)

Masas:



$$F = m\ddot{x}$$

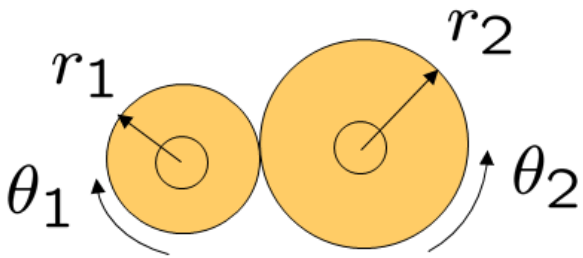
lineal



$$\tau = J\ddot{\theta}$$

rotacional

Engranajes:

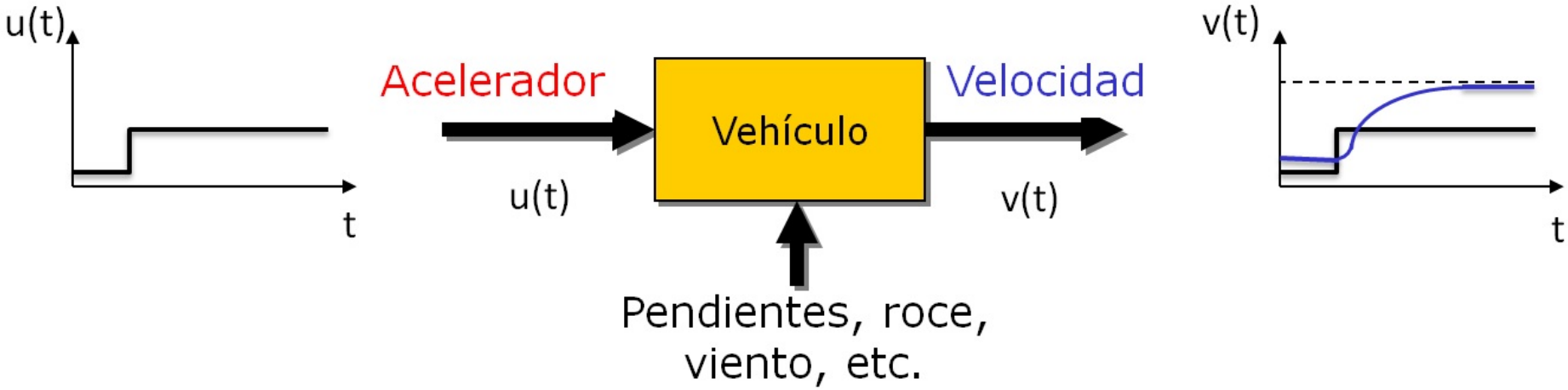


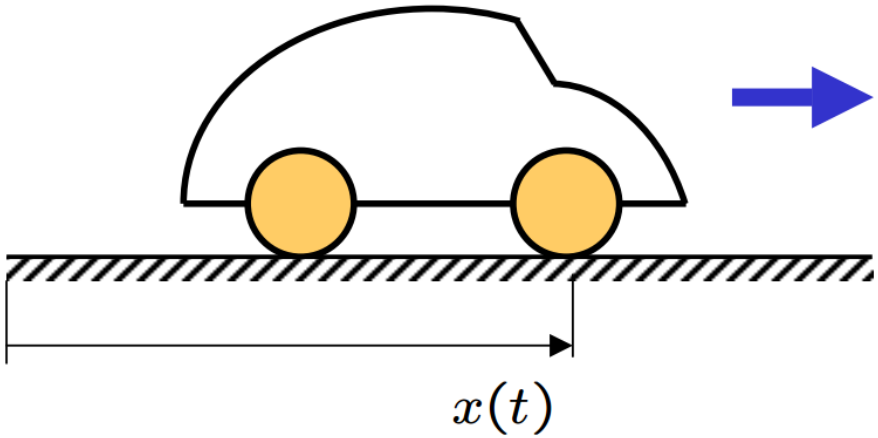
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_1}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Ejemplos de **Sistemas Lineales**

1. Vehículo
2. Resorte-Masa-Amortiguador
3. Dos Masas
4. Sistema Rotatorio
5. Circuito RLC
6. Motor DC

Ejemplo 2.1: Vehículo





$$\dot{x}(t) \stackrel{def}{=} \frac{dx}{dt} = v(t)$$

Ejemplo 2.1: Vehículo

2.a. Equilibrio de fuerzas:

Por la 2^a Ley de Newton

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = f_{empuje} - f_{roce}$$
$$m\ddot{x} = ku - c\dot{x}$$

2.b. Condiciones iniciales:

$$x(0),\ \dot{x}(0)$$

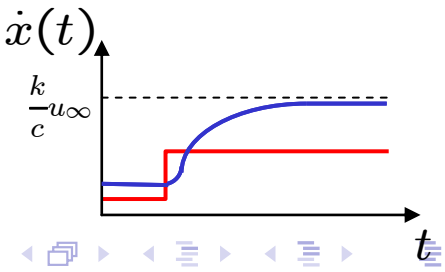
Modelo Estático:

Para $t = \infty,\ u(\infty) = u_\infty$ (constante $\neq 0$): $m\ddot{x} = 0$.

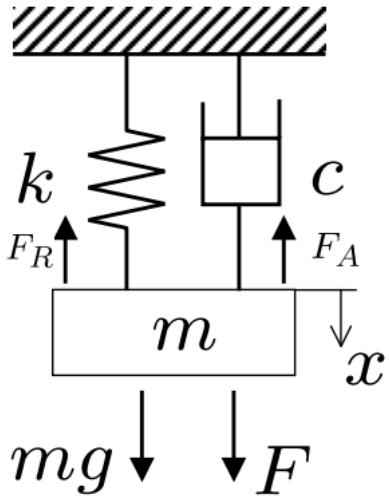
$\Rightarrow\ c\dot{x}_\infty = ku_\infty \ \leftarrow$ las fuerzas de roce y empuje se equilibran

Así se obtiene un Modelo Estático (modelo en régimen permanente), que relaciona la salida con la entrada:

$$\boxed{\dot{x}_\infty = \frac{k}{c}u_\infty}$$



Ejemplo 2.2: Resorte-Masa-Amortiguador



2.a. Equilibrio de fuerzas:

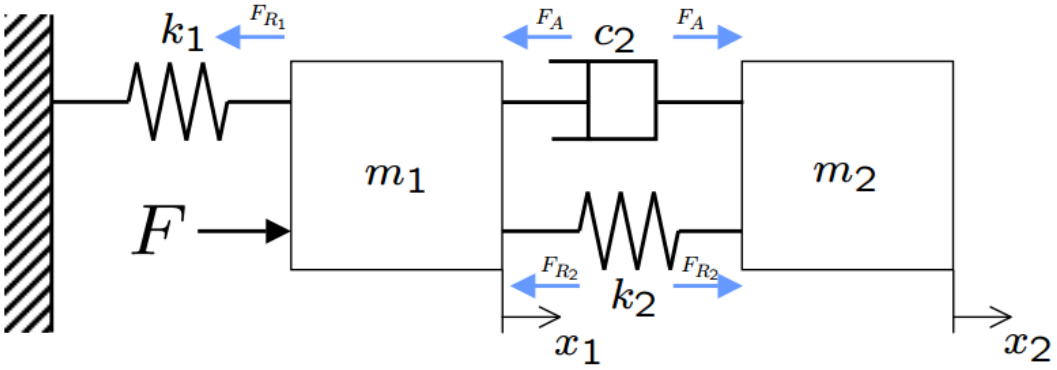
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = F - F_R - F_A + F_g$$

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x} + mg \quad \leftarrow \text{ modelo dinámico}$$

2.b. Condiciones iniciales: $x(0), \dot{x}(0)$

Ejemplo 2.3: Sistema de dos masas



Asumimos que si la fuerza F empieza a actuar sobre la masa m_1, entonces m_1 se moverá antes que m_2, ya que m_2 recibirá el movimiento con cierto "retardo" a través del resorte y amortiguador.

Luego, para un cierto t al inicio del efecto de F, puede considerarse que $x_1 > x_2$, es decir que x_1 se ha desplazado más que x_2.

Esta condición se ha utilizado en la derivación de las ecuaciones, sin embargo cabe notar que para otro instante de tiempo $t^* \neq t$ es posible que $x_1 \leq x2$.

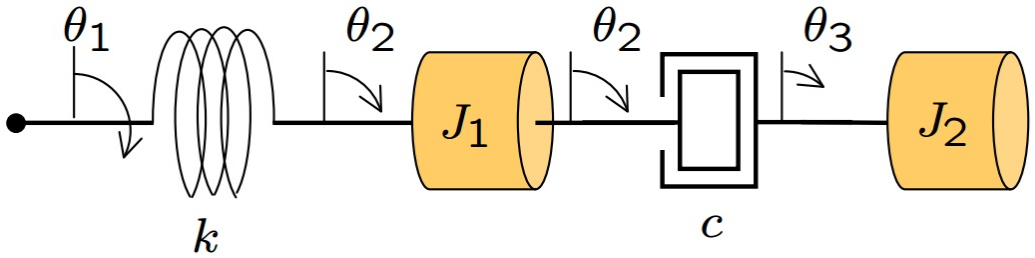
2.a. Equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_{m1} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 = F - kx_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\sum F_{m2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

2.b. Condiciones iniciales: $x_1(0),\ x_2(0),\ \dot{x}_1(0),\ \dot{x}_2(0)$

Ejemplo 2.4: Sistema rotatorio de dos masas



Para el desarrollo de las ecuaciones asumimos que en un instante incial t se tiene que: $q_1 > q_2 > q_3$.

2.a. Equilibrio de torques:

$$\sum T_{J_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$J_1\ddot{\theta}_2 = \underbrace{\overbrace{k(\theta_1 - \theta_2)}^{\text{torque que causa el movimiento}} - \overbrace{c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)}^{\text{torque que se opone al movimiento}}}_{\text{torque neto}}$$

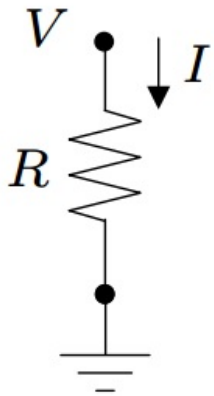
$$\sum T_{J2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$J_2\ddot{\theta}_3 = c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)$$

2.b. Condiciones iniciales: $\theta_2(0),\ \theta_3(0),\ \dot{\theta}_2(0),\ \dot{\theta}_3(0)$

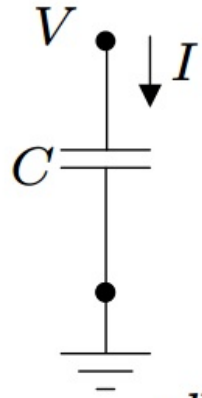
Modelos lineales de componentes eléctricos básicos

Resistencia



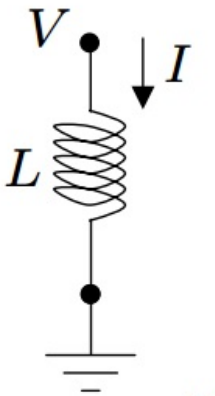
$$V = RI$$

Condensador



$$I = C\frac{dV}{dt}$$

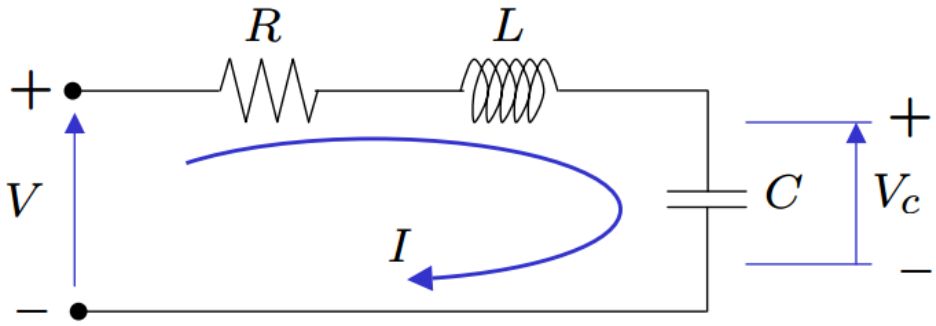
Inductancia



$$V = L\frac{dI}{dt}$$

Ecuaciones que relacionan las variables de voltaje V y corriente I.

Ejemplo 2.5: Circuito RLC Serie



2.a. Conservación de Energía:
Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff se obtiene el modelo integro-diferencial dado por:

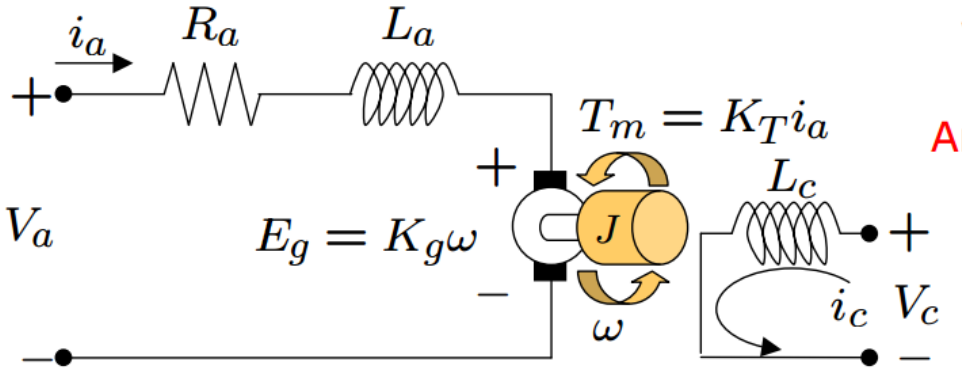
$$V(t) = RI(t) + L\frac{dI}{dt}(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau$$

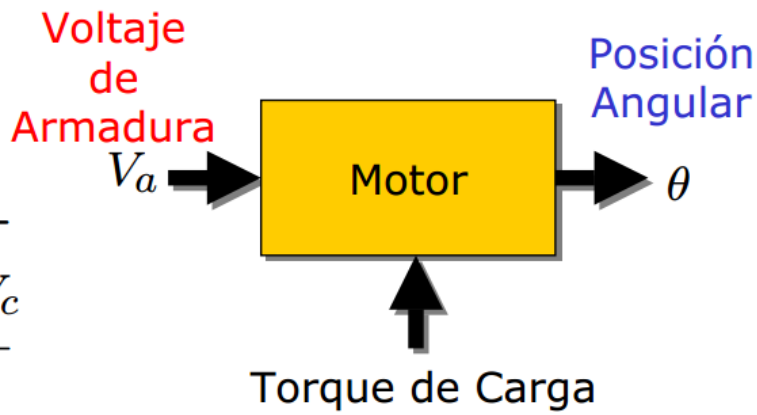
lo cual implica:

$$\frac{dV}{dt} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I$$

2.b. Condiciones iniciales: $I(0)$, $\frac{dI}{dt}(0)$

Ejemplo 2.6: Motor DC - Modelo General (1/2)





Variables eléctricas rotor:

- V_a: Voltaje de armadura
- i_a: Corriente de armadura
- R_a: Resistencia de armadura
- L_a: Inductancia de armadura
- E_g: fem (tensión inducida) en la armadura debido a su movimiento rotatorio.
- K_g: Constante de fem

Ejemplo 2.6: Motor DC - Modelo General (2/2)

Variables eléctricas estator:

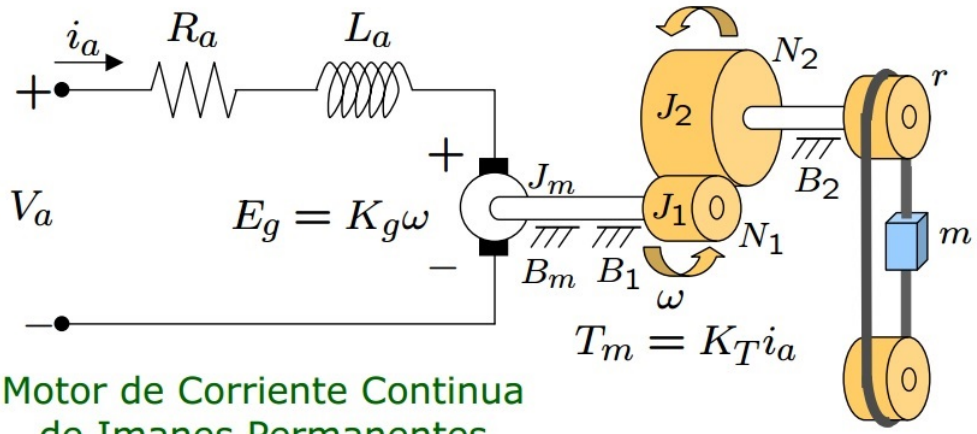
- V_c: Voltaje de campo
- i_c: Corriente de campo

Variables mecánicas:

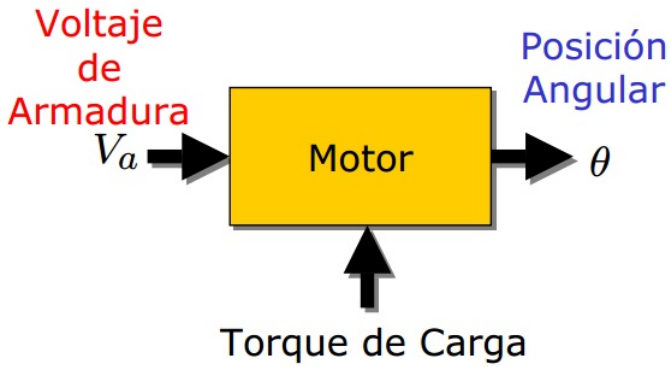
- T_m: Torque electromotriz producido por el motor
- K_T: Constante de torque
- J: Momento de inercia general
- B: Coeficiente de roce viscoso general
- θ: Posición angular del motor

$$V_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_g \omega \qquad J \frac{d\omega}{dt} = T_m - T_f - T_L$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC



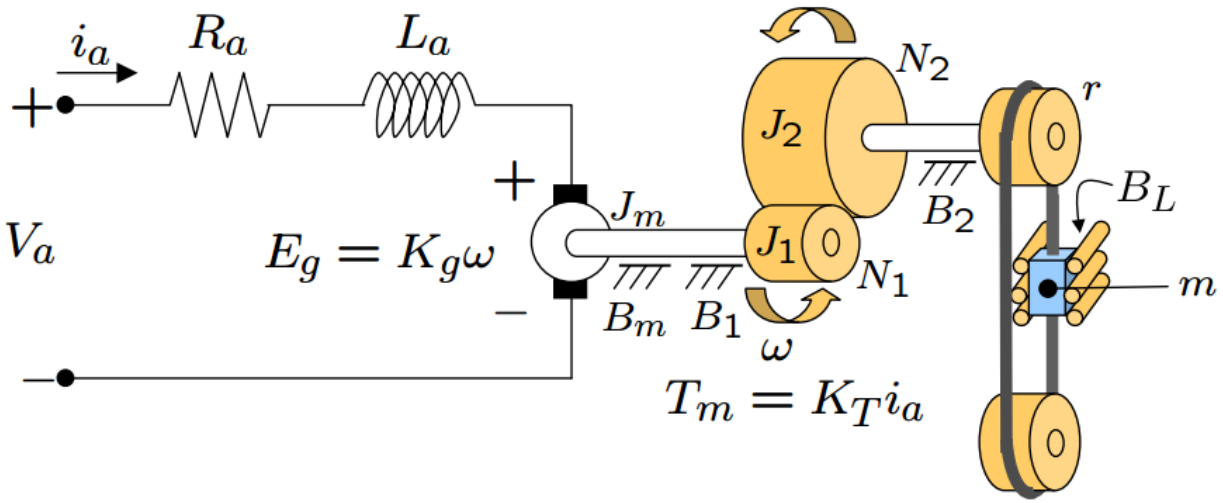
Motor de Corriente Continua
de Imanes Permanentes
(*Permanente Magnet DC, PMDC*)



$$V_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_g \omega$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = T_m - T_f - T_L$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC



Momento de Inercia Total Referido al Motor:

$$\begin{aligned} J &= J_m + J_1 + N^2 J_2 + N^2 J_L \\ &= J_m + J_1 + N^2 J_2 + N^2 M r^2 \end{aligned}$$

donde la reducción de engranajes está dada por:

$$N = \frac{N_1}{N_2}$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC

2.a. Equilibrio de torques (referidos a lado del motor):

$$J\dot{\omega} = T_m - T_f - T_L$$

donde:

$\omega = \dot{\theta}$	es la velocidad angular del motor
$T_m = K_T i_a$	es el torque electromotriz
$T_L = N\ m\ g\ r$	es el torque de carga
$T_f = B\omega$	es el torque de fricción viscosa con $B = B_m + B_1 + N^2 B_2 + N^2 B_L r^2$

luego la ecuación mecánica es:

$$\boxed{J\dot{\omega} = K_T i_A - B\omega - N\ m\ g\ r}$$

2.b. Conservación de energía:

Por la Ley de Voltajes de Kirchhoff la ecuación eléctrica es:

$$\boxed{V_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_g \omega}$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC

Es posible combinar la ecuación mecánica y eléctrica para obtener una expresión de la posición angular del eje (CV) con respecto al voltaje de armadura (MV). De la ecuación mecánica se tiene que:

$$i_a = \frac{J}{K_T}\dot{\omega} + \frac{B}{K_T}\omega + \frac{1}{K_T}T_L \tag{1}$$

reemplazando (1) en la ecuación eléctrica:

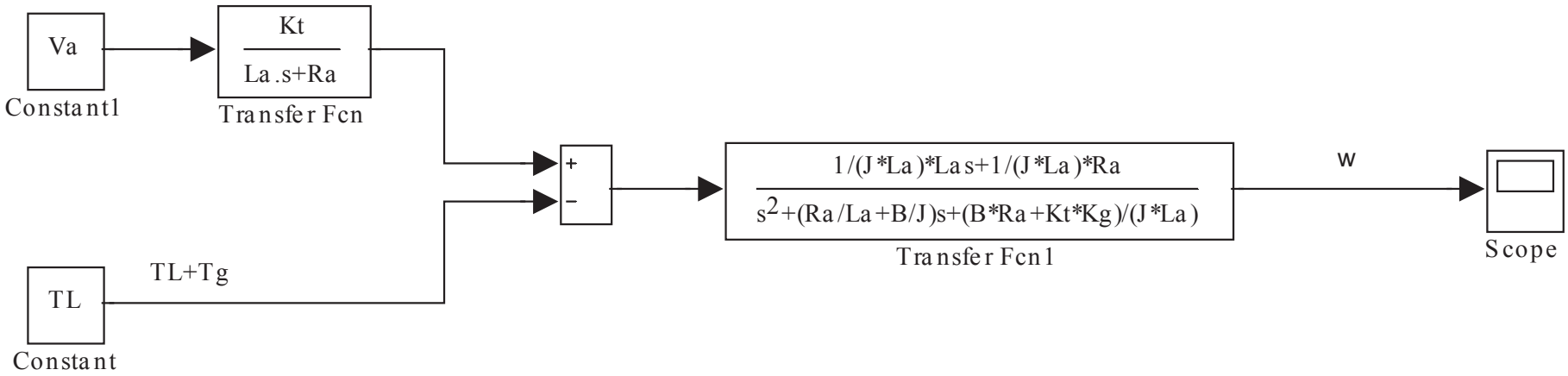
$$V_a = L_a\frac{J}{K_T}\ddot{\omega} + L_a\frac{B}{K_T}\dot{\omega} + \frac{L_a}{K_T}\dot{T}_L + R_a\frac{J}{K_T}\dot{\omega} + R_a\frac{B}{K_T}\omega + \frac{R_a}{K_T}T_L + K_g\omega$$

reagrupando términos:

$$\dddot{\theta} + \left(\frac{BL_a + JR_a}{JL_a}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{BR_a + K_gK_T}{JL_a}\right)\dot{\theta} = \frac{K_T}{JL_a}\left(V_a - \frac{L_a}{K_T}\dot{T}_L - \frac{R_a}{K_T}T_L\right)$$

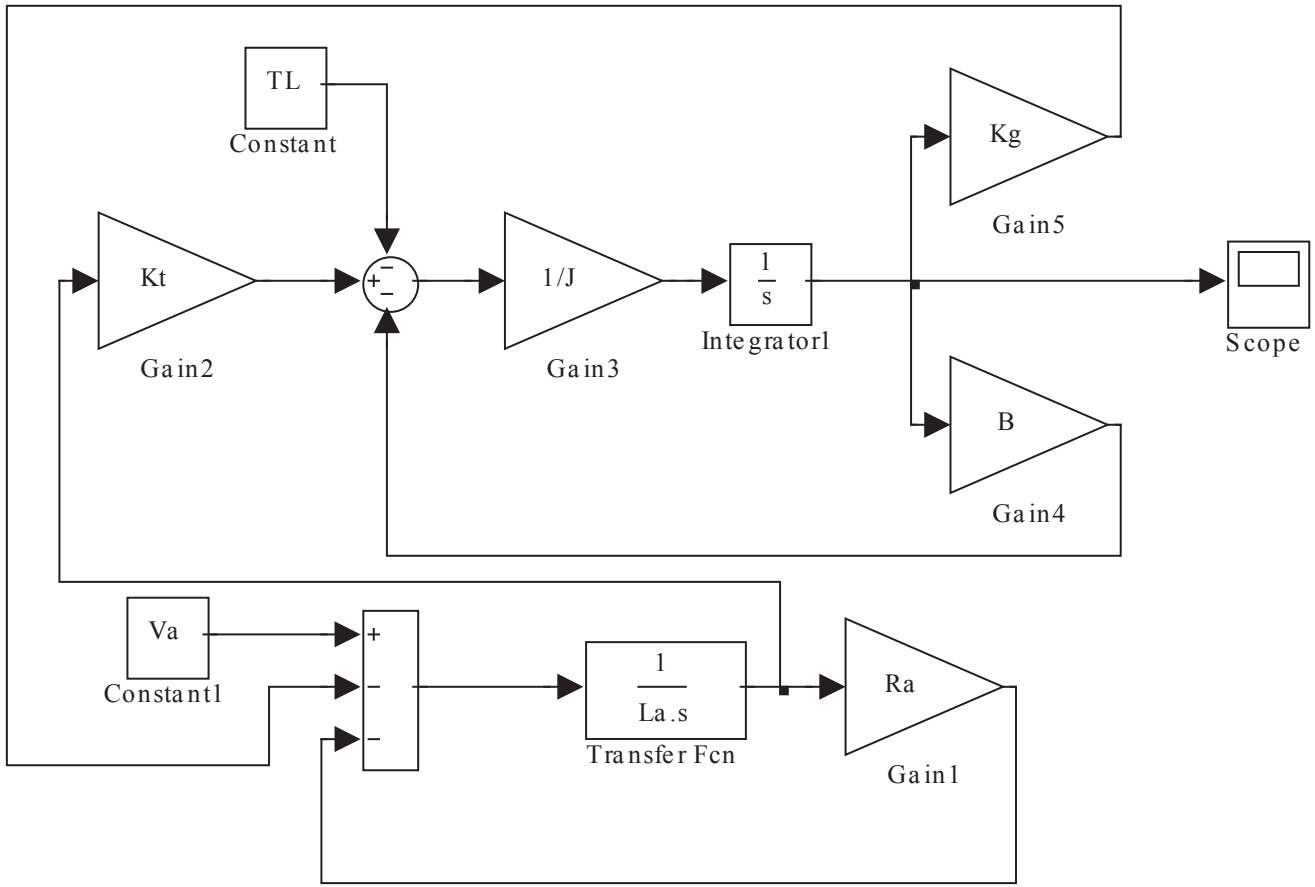
Condiciones iniciales requeridas: $\theta(0),\ \dot{\theta}(0),\ \ddot{\theta}(0)$

¿Qué es esto?


Va
Constant1
Kt
La.s+Ra
Transfer Fcn
+
−
TL+Tg
TL
Constant
1/(J*La)*Las+1/(J*La)*Ra
s2+(Ra/La+B/J)s+(B*Ra+Kt*Kg)/(J*La)
Transfer Fcn1
w
Scope

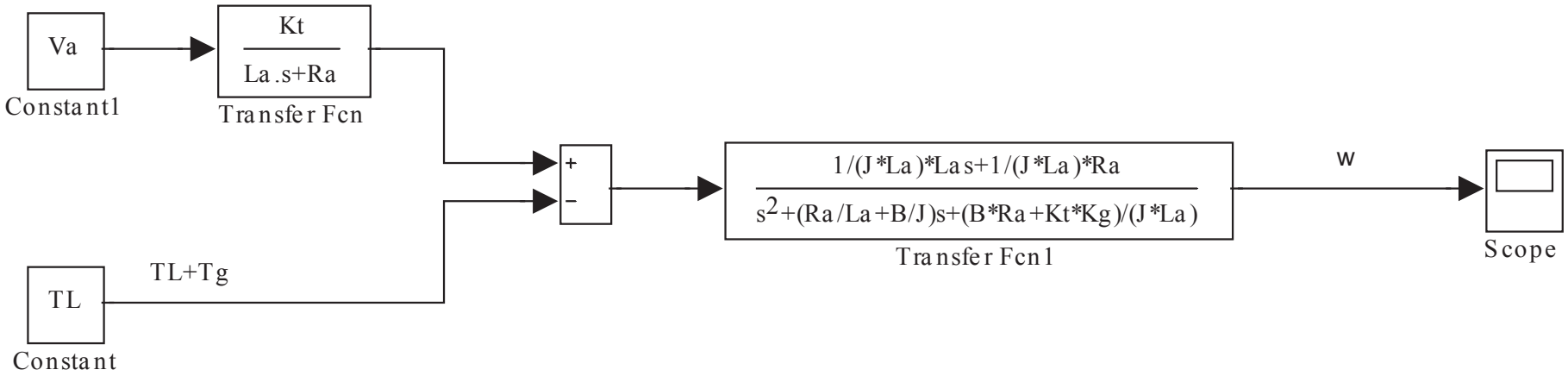
¿Es este el mismo sistema?

Simulink: Diagrama de bloques desordenados por ecuación



Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación 1

Simulink - Función de Transferencia de 1-etapa



¿Se entiende el sistema?

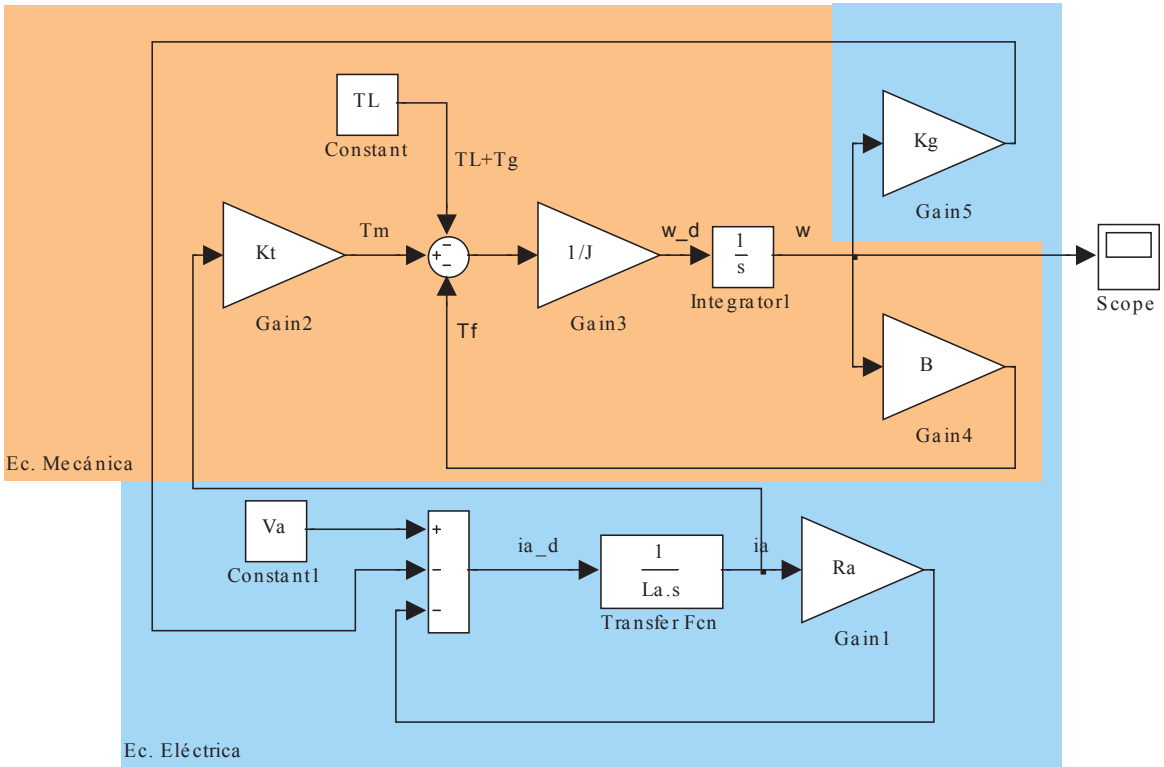
$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(K_T i_a - B\omega - Nmgr) \text{ ???}$$

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a}(V_a - R_a i_a - K_g \omega) \text{ ???}$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación 2

Simulink - Diagrama de bloques desordenados por ecuación

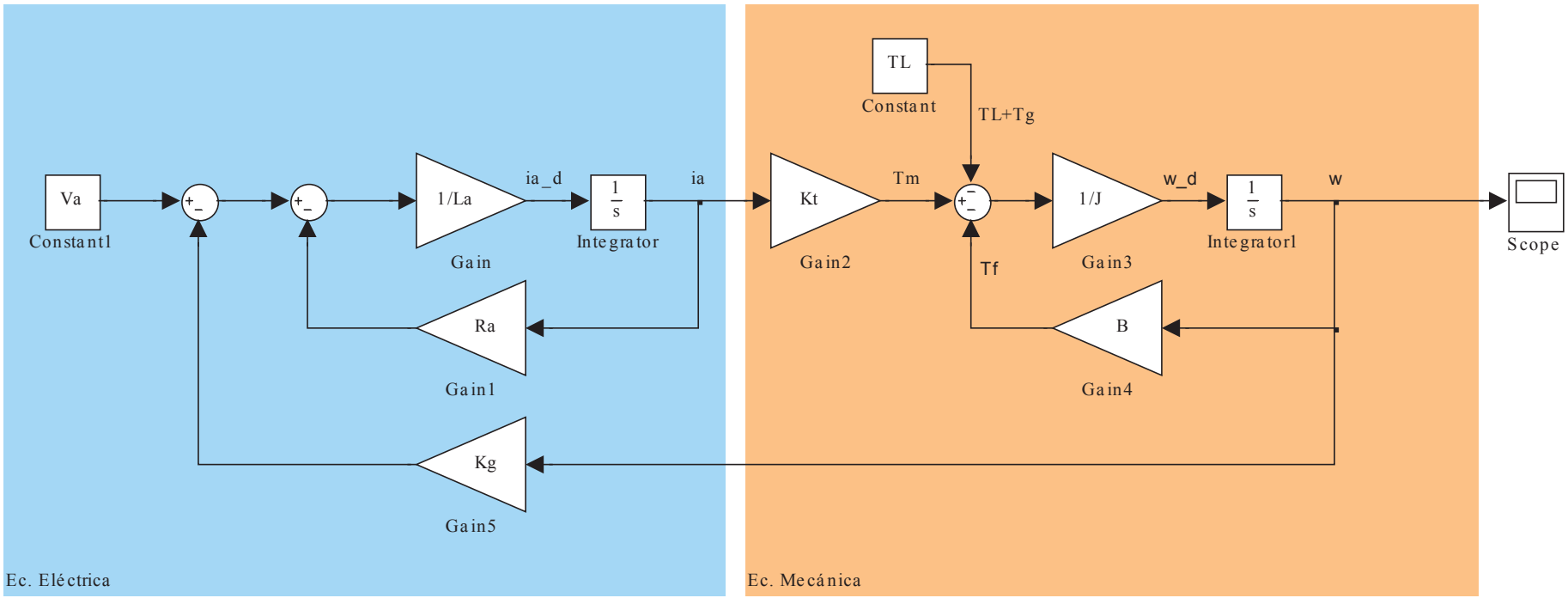
$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(K_T i_A - B\omega - Nmgr)$$



$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a}(V_a - R_a i_a - K_g \omega)$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación 3

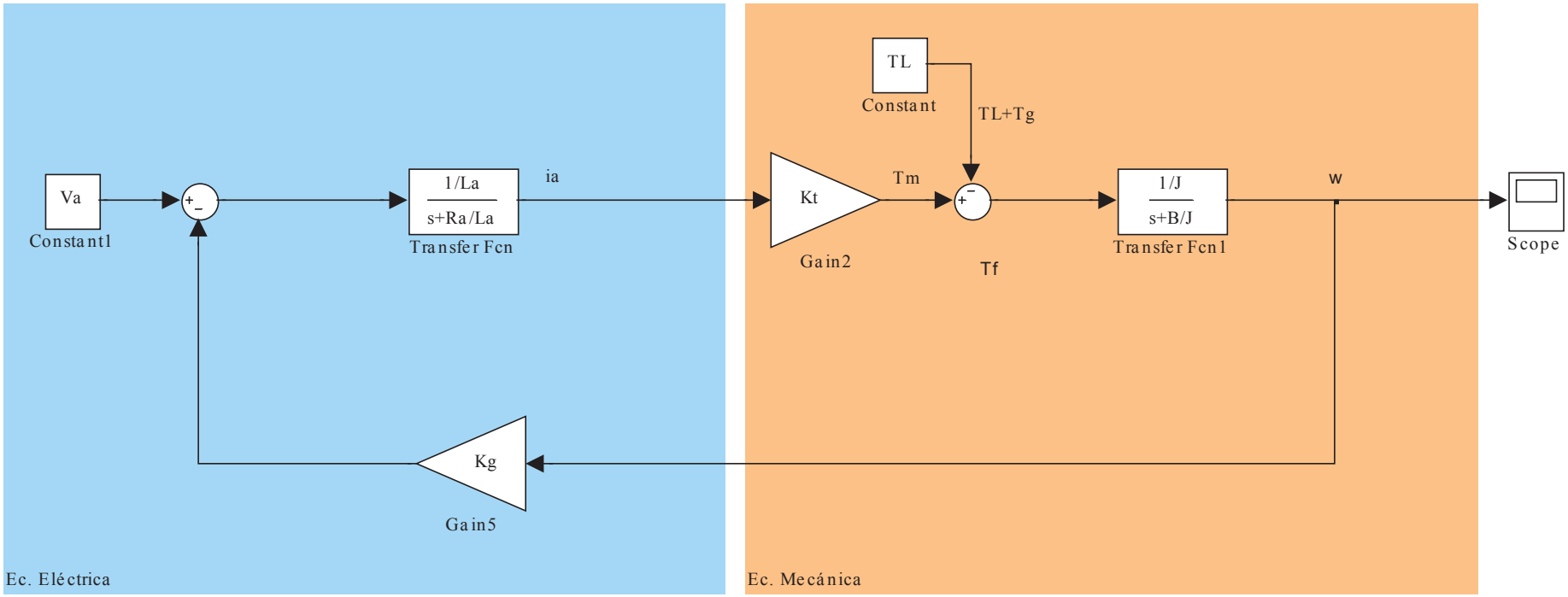
Simulink - Diagrama de bloques ordenados por ecuación



$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a}(V_a - R_a i_a - K_g \omega) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{J}(K_T i_A - B\omega - Nmgr)$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación 4

Simulink - Función de transferencia de 2-etapas



$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a}(V_a - R_a i_a - K_g \omega) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{J}(K_T i_A - B\omega - Nmgr)$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Simulación

Parámetros

```
1   % Function: motorparam
2   % Miguel Torres-Torriti (c) 2007-03-28
3   % Decription
4   %   Loads motor parameters.
5   % Inputs
6   %   None.
7   % Example: pmdc
8   %
9
10  clear all;
11
12  % General Constants
13  g=9.81;
```

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Simulación

Parámetros

```
14  % Motor Parameters
15  % Maxon RE-75 118854
16  Ra=0.103;      % Ohms
17  La=0.0402e-3; % H
18  Kg=0.0607;     % V/(rad/s)
19                 % Vnom=Ra*Ia_noload+Kg*w_noload
20                 % Kg=(Vnom-Ra*Ia)/w_noload
21  Kt=58.1e-3;    % Nm/A
22  Jm=0.143e-3;   % kg*m^2
23  Bm=2.7973e-3; % N/(rad/s)
24                 % T_noload*omega_noload-
25                 %   (Bm*omega_noload)*omega_noload
26                 %   = efficiency*Vnom*Ia_noload
27                 % Bm = (Kt*Ia_noload*omega_noload-
28                 %       efficiency*Vnom*Ia_noload)
29                 %        /omega_noload^2
```

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Simulación

Parámetros

```
30  % Mechanical Transmission Parameters
31  N1=1;
32  N2=20;
33  N=N1/N2;
34  J1=1e-4;
35  J2=1e-3;
36  B1=0.01;
37  B2=0.01;
38
39  % Load Parameters
40  m=10;
41  r=0.05;
42  JL=m*r^2;
43  BL=1e-3;
```

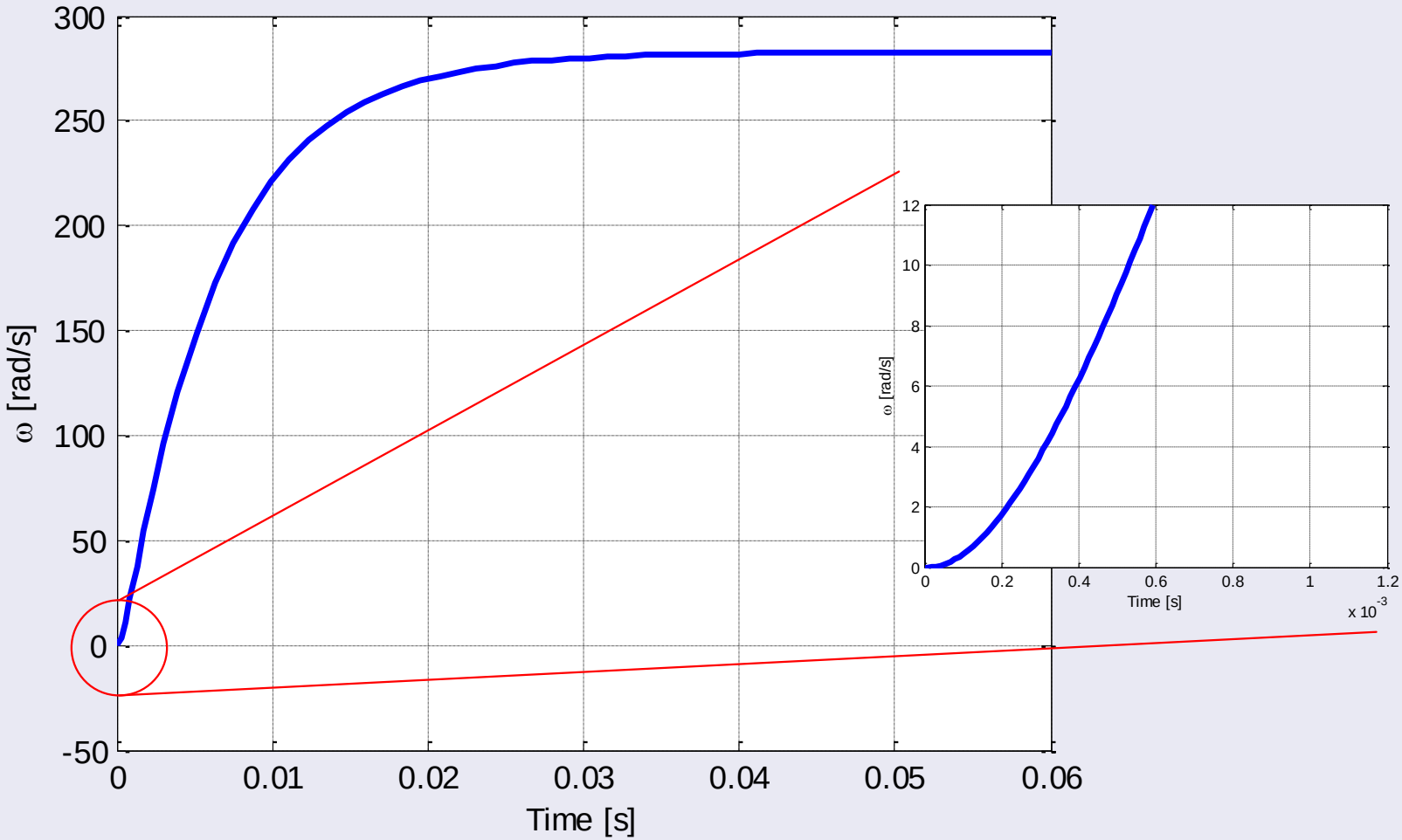
Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Simulación

Parámetros

```
44   % Compounded Parameters
45   J=Jm+J1+(N^2)*J2+(N^2)*JL;
46   B=Bm+B1+(N^2)*B2+(N^2)*BL*r^2;
47
48   % Nominal Inputs
49   Va=24;
50   TL=N*m*g*r;
51
52   % Initial Conditions
53   % All assumed to be zero.
```

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Simulación

Respuesta al Escalón



Capítulo 2 – Representación de Sistemas Dinámicos: Modelos Matemáticos de Tiempo Continuo

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Ejemplos de modelos de sistemas no-lineales en el dominio del tiempo

Mecánicos:

- Péndulos Invertidos (ej. Segway)
- Robots
- Aeronaves
- Cohetes y satélites

Hidráulicos

- Nivel de estanques

Químicos-Termodinámicos

- Distribución/difusión de calor
- Reactores
- Separación, destilación

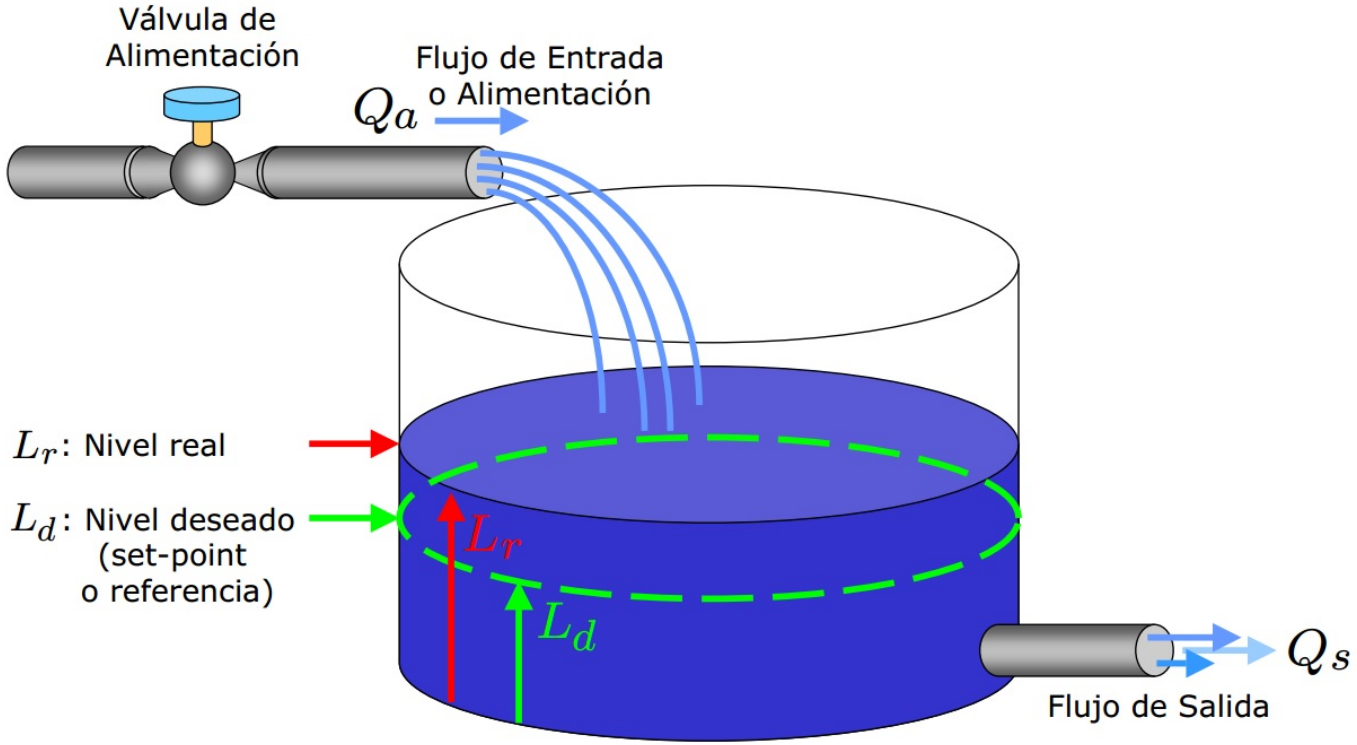
Eléctricos

- Amplificadores
- Transmisores
- Receptores

Ejemplos de **Sistemas No-Lineales**

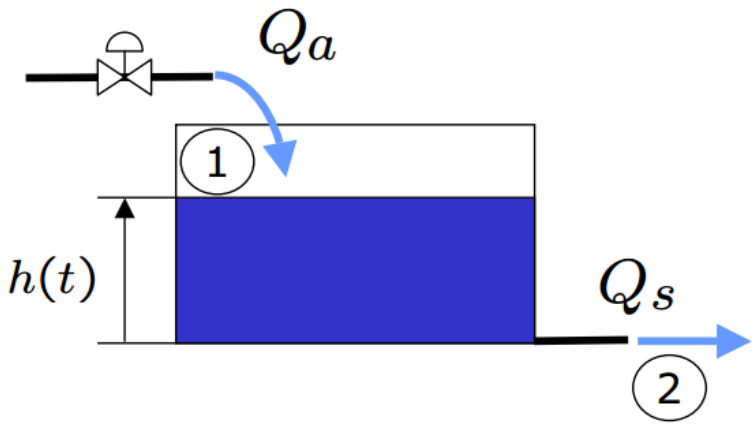
1. Control de nivel de estanque
2. Péndulo invertido
3. Satélite espacial

Ejemplo 2.7: Control de nivel de estanque



Objetivo de control: Mantener el nivel de líquido en el nivel deseado, es decir $L_r(t) \approx L_d(t)$, la mayor parte del tiempo que sea posible, regulando el suministro de líquido mediante la válvula que ajusta el flujo Q_a.

Ejemplo 2.7: Control de nivel de estanque



2.Balance másico:

$$\frac{dV}{dt} = Q_a - Q_s$$

donde $Q_s = A_s v_2$, siendo A_s el area de la sección de salida.

Ejemplo 2.7: Control de nivel de estanque

Según el Principio de Bernoulli (1700-1762) de conservación de la energía para un fluido en régimen permanente:

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

Considerando que:

- $P_1 = P_2 =$ Presión atmosférica
- $\rho_1 = \rho_2$ al ser un líquido incompresible
- $v_1 \approx 0$ velocidad despreciable frente a v_2
- $h_1 = h(t)$ y $h_2 = 0$

se tiene:

$$\cancel{\frac{P_1}{\rho_1}} + \cancel{\frac{v_1^2}{2}} + gh_1 = \cancel{\frac{P_2}{\rho_2}} + \frac{v_2^2}{2} + \cancel{gh_2} \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2gh_1}}$$

Ejemplo 2.7: Control de nivel de estanque

Recordando además que

$$V(t) = A_e h(t),$$

donde A_e es el área de la base del estanque, y reemplazando en las expresiones anteriores en la ecuación de balance másico se tiene que:

$$A_e \frac{dh}{dt} = k_v u - A_s \sqrt{2gh}$$

es decir:

2.a.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{h} = \dfrac{k_v}{A_e} u - \dfrac{A_s}{A_e} \sqrt{2gh} \end{cases}$$

donde k_v es la ganancia de la señal u que regula la válvula que ajusta el caudal de alimentación Q_a.

2.b. Condiciones iniciales: $h(0)$

El Principio de Lagrange (1736-1813)

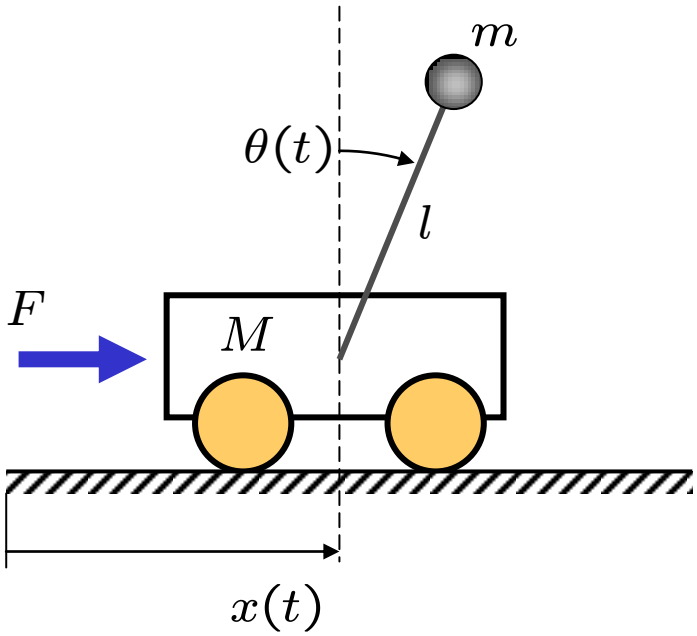
Especialmente útil en la derivación de las ecuaciones dinámicas de sistemas electromecánicos no-lineales, ej.: brazos robóticos.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} = F_{q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n}$$

donde:

$L(q,\dot{q}) = E_K(q,\dot{q}) - E_P(q)$	Función Lagrangeana
$q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$	Vector de coord. generalizadas
$E_K(q,\dot{q})$	Energía cinética
$E_P(q)$	Energía potencial
F_{q_i}	Fuerza generalizada sobre q_i

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido



Coordenadas generalizadas:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

Posición horizontal de la masa m:

$$r_x = x + l \sin\theta$$

Posición vertical de la masa m:

$$r_y = l \cos\theta$$



Segways

(Budapest, Julio 2006).

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido

Energía cinética total

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{d}{dt}\left(x + l\sin(\theta)\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\left(l\cos(\theta)\right)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos(\theta)\right)^2 + \left(-l\dot{\theta}\sin(\theta)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right]
\end{aligned}
$$

Energía Potencial:

$$
\begin{aligned}
E_P &= E_{P_0} + m\,g\,l\cos(\theta) \\
& \qquad E_{P_0} \stackrel{def}{=} 0, \text{ para } \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido

Lagrangeano:

$$\begin{aligned} L &= E_K - E_P \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right] - mgl\cos\theta \end{aligned}$$

Para cada coordenada generalizada $q_1 = x$ y $q_2 = \theta$ se aplica el Principio de Lagrange considerando que las fuerzas generalizadas están dadas por:

$$F_{q_1} = F \qquad\qquad F_{q_2} = 0$$

Notar que $F_{q_2} = 0$ porque no hay ninguna fuerza externa, ni fuerza disipativa o no conservativa actuando sobre $q_2 = \theta$.

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido

Las ecuaciones de Lagrange son entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = F \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Calculando las derivadas se tiene:

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\,l\dot{\theta}\cos\theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{\theta}} = m\,l\,\dot{x}\cos\theta + m\,l^2\dot{\theta} \quad (3)$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido

Derivando (2) y (3) con respecto a t:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + m\,l\ddot{\theta}\cos\theta - m\,l\dot{\theta}^2\sin\theta \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{\theta}} = m\,l\,\ddot{x}\cos\theta - m\,l\,\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + m\,l^2\ddot{\theta}
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_1} &= \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_2} &= \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \theta} = -m\,l\,\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + m\,g\,l\sin\theta
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido

Sustituyendo las expresiones en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad \Rightarrow$$

$$(M+m)\ddot{x} + m\,l\ddot{\theta}\cos\theta - m\,l\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m\,l\,\ddot{x}\cos\theta + m\,l^2\ddot{\theta} - m\,g\,l\sin\theta = 0$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido

Simplificando las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente modelo dinámico no-lineal:

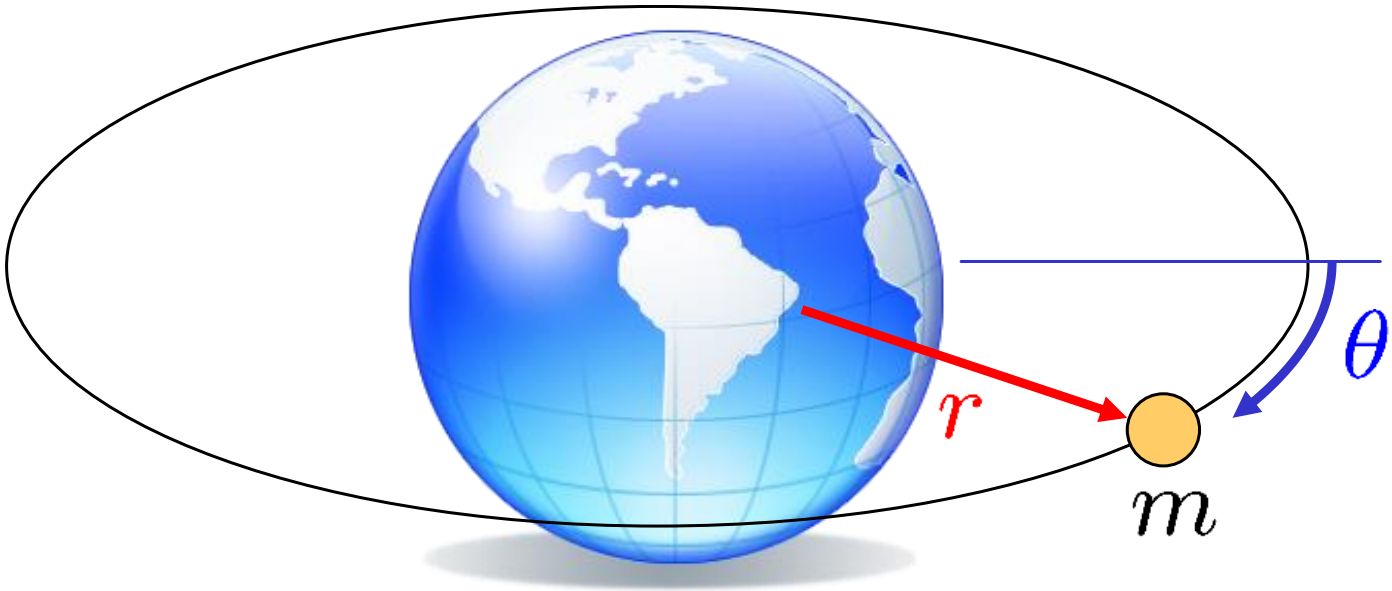
$$\Sigma : \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \\ \ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Las condiciones iniciales requeridas son:

$$\{q(0), \dot{q}(0)\} \Rightarrow x(0), \dot{x}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$$

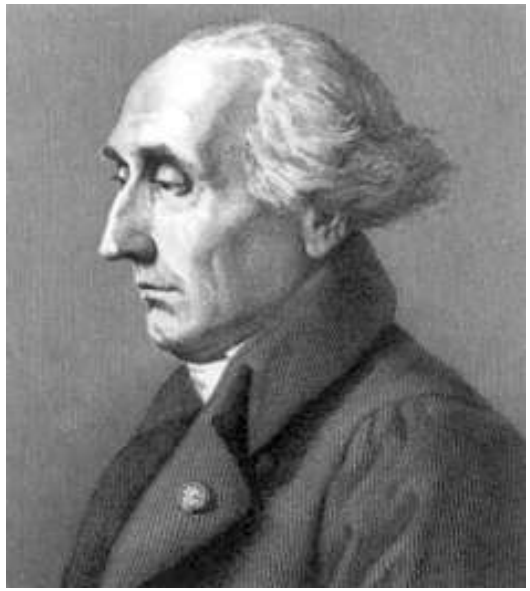
Ejemplo 2.9: Satélite espacial

Actividad en clases.



I ~~love~~ Lagrange

Giuseppe Lodovico Lagrangia (25 enero 1736 Torino) fue uno de los dos de once hermanos que llegaron a la edad adulta y estudio matemáticas en forma autodidacta leyendo los textos de Agnesi (1748), Bernoulli (1742), D'Alambert (1743), Euler (1736, 1744). En 1754 (a los 18 años) escribe su primer trabajo. Euler muy impresionado por sus habilidades lo invita a formar parte de la Academia de Berlin en 1759. En 1766 a sugerencia de Euler y D'Alambert, el rey Federico II de Prusia le pidió que sucediera a Euler. Se mudó a Berlin con su esposa Vittoria Conti, pero 23 años después ella murió y estando golpeado por una fuerte depresión, el rey Luis XVI lo invitó a Paris en 1787 donde permaneció hasta su muerte el 10 de abril de 1813. Estando en Francia usó el nombre de Joseph-Louis Lagrange, cambiando su nombre Lodovico por Louis, que era el nombre de su bisabuelo francés.



¡Sus contribuciones a las matemáticas, mecánica y astronomía son notables, en particular su trabajo para reformular la mecánica Newtonian clásica con el fin de simplificar los cálculos y fórmulas! ***¡La mecánica Lagrangiana también se puede aplicar a física atómica y la electricidad!***

Lagrangeano Electromagnético

Dada una partícula de masa m, carga q y velocidad $\vec{v}$ en un campo electromagnético con potencial escalar ϕ y potencial vectorial $\vec{A}$, su energía cinética está dada por:

$$E_K = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$$

mientras que su energía potencial por:

$$E_P = q\phi - q\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Luego, el Lagrangeano electromagnético es:

$$L = E_K - E_P = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} - q\phi + q\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Lagrange 1/7

Coordenadas Generalizadas:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \theta \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Leftarrow \text{ cantidad de electrones} \\ \Leftarrow \text{ posición angular del eje} \end{array}$$

Energía cinética del *flujo de electrones*:

$$E_K = \frac{1}{2} L_a \dot{Q}^2, \text{ donde } \dot{Q} = i_a$$

Energía potencial *de la fuente de electrones*:

$$E_P = \int_0^T P(t)dt = \int_0^T V_a i_a dt = V_a \int_0^T -\frac{dQ}{dt} dt$$
$$= -V_a Q$$

El signo negativo se debe a que la fuente cede electrones al entregar su energía por lo que su carga disminuye en el tiempo.

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Lagrange 2/7

¿Tiene sentido lo anterior?
¡Si! Recordemos que...

$$\frac{P}{I} = V \Rightarrow VQ = \frac{P}{I}Q = \frac{P}{\frac{Q}{\Delta T}}Q = P\Delta T = E$$

Vemos que entonces que:

$$VQ = E$$

por lo que VQ tiene unidades de energía.

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Lagrange 3/7

Energía cinética del mecanismo:

$$E_K = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Energía potencial del mecanismo:

$$E_P = N m g r \theta$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = E_K - E_P \quad = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} L_a \dot{Q}^2 + V_a Q - N m g r \theta$$

Ahora usamos $\mathcal{L}$ en vez de L para no confundir el Lagrangiano con la inductancia L_a.

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Lagrange 4/7

Para cada *coordenada generalizada* ($q_1 = Q$, $q_2 = \theta$) se aplica el Principio de Lagrange considerando que las *fuerzas generalizadas* están dadas por:

$$F_{q_1} = -R_a\dot{Q} - K_g\dot{\theta} = -R_a i_a - K_g\dot{\theta}$$

$$F_{q_2} = -B\dot{\theta} = -B\omega$$

Notar que en ambos casos las fuerzas que actúan sobre q_1, q_2 son fuerzas disipativas o no conservativas. En el caso de q_1 se tiene además una "*fuerza externa*": la fuerza electromotriz inducida (fem).

Las ecuaciones de Lagrange son entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Lagrange 5/7

Calculando las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_1} &= L_a \dot{Q} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_2} &= J\dot{\theta} \end{aligned}$$

Se obtienen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_1} &= L_a \ddot{Q} = L_a \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_2} &= J\ddot{\theta} = J\dot{\omega} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Lagrange 6/7

Calculando las derivadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_1} = V_a \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = -Nmgr$$

Sustituyendo las derivadas en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = -R_a i_a - K_g \omega \Rightarrow$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} - V_a = -R_a i_a - K_g \omega$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$J\ddot{\theta} + Nmgr = K_t i_a - B\omega$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Lagrange 7/7

Simplificando las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente modelo dinámico lineal:

Modelo dinámico del motor DC

$$\Sigma : \begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_g \omega = V_a \\ J\dot{\omega} + B\omega + Nmgr = K_T i_a \end{cases}$$

Con condiciones iniciales:

$$\{q(0), \dot{q}(0)\} \Rightarrow Q(0), \dot{Q}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$$

Pero la carga inicial está relacionada al voltaje de la fuente, por lo tanto es posible prescindir de su valor en este caso particular.

¿Por qué derivamos el modelo del motor DC usando el Principio de Lagrange?

Ya teníamos un modelo para el motor DC, ¿por qué lo derivamos nuevamente si el modelo es lineal y el proceso parece ser más complicado? El propósito fue:

- Mostrar que el Principio de Lagrange es aplicable incluso a medios continuos, campos físicos como eléctricos, y no solamente a mecánica clásica.
- Mostrar que puede aplicarse a sistemas no-inerciales, ya que la energía es independiente del marco de referencia y no requiere que el marco de referencia sea inercial para hacer el balance de fuerzas como en la mecánica Newtoniana clásica.
- Mostrar que el método se conecta muy bien con la descripción de los sistemas en el espacio de los estados (lo que veremos a continuación), porque el Principio de Lagrange requiere de un vector de coordenadas generalizadas, la cual es en forma natural un posible vector de estado para describir la configuración del sistema.

Capítulo 2 – Representación de Sistemas Dinámicos: Modelos Matemáticos de Tiempo Continuo

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Modelos Matemáticos de Sistemas Dinámicos

- Definición de Modelo Matemático de un Sistema Dinámico en el Dominio del Tiempo
- Principios de Modelamiento
- Tipos de Modelos
- Ejemplos
- Linealización

* Veremos modelos en el dominio de la frecuencia y modelos de tiempo discreto en los próximos capítulos.

Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado

1. Vehículo
2. Control de nivel de estanque
3. Péndulo invertido
4. Motor PMDC

Modelos de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado 1/4

Motivación

Si un sistema está descrito por ecuaciones diferenciales o de diferencias de orden n, es posible expresar la derivada de orden n en función de las derivadas de orden $< n$ y las fuerzas externas.

Ejemplo:

Las aceleraciones inerciales (derivadas de orden 2) pueden expresarse en términos de velocidades (derivadas de orden 1) y posiciones (derivadas de orden 0).

Modelos de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado 2/4

Motivación

Describir la dinámica de un sistema en términos de sus variables de estado, por ejemplo, posiciones y velocidades, es útil porque:

- Son variables que usualmente se desean conocer.
- Son variables que facilitan la obtención de ciertos tipos de controladores que consideran las variaciones de cada variable, y no solamente de la salida (CVs) para tomar una acción de control.
- Facilitan la implementación de simulaciones para analizar el comportamiento del sistema.

En términos simples, las variables de estado corresponden a las variables que definen las condiciones iniciales del sistema.

Modelos de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado 3/4

Los modelos en el espacio de estado son representaciones de sistemas en la siguiente forma:

Modelo del proceso:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

Modelos de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado 4/4

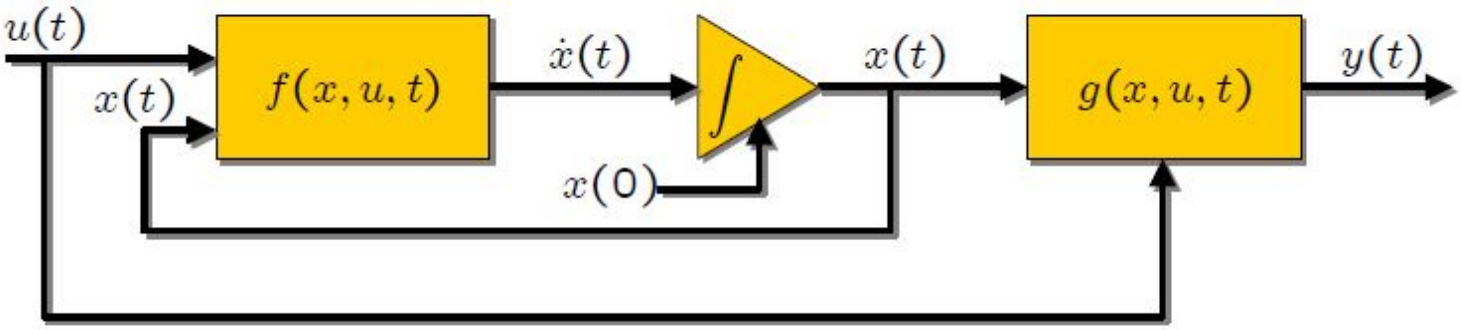
Modelo de medición, sensor o salidas:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \vdots \\ g_p(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{g}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)}$$

Definiciones

- **Vector de Estado:** $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$
- **Vector de Inputs (MV):** $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)]^T$
- **Vector de Outputs (CV):** $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_p(t)]^T$
- **Estado inicial en instante inicial** t_0**:** $\mathbf{x}_0$
- **Orden del modelo en el espacio de estado:** n

Implementación Análoga del Modelo en Espacio del Estado



Ejemplo 2.1: Vehículo - Var. Estado

Modelo Dinámico Lineal

$$\Sigma : \{m\ddot{x} = ku - c\dot{x}$$

Condiciones iniciales:

$$x(0), \dot{x}(0)$$

Definición del vector de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ Notar que } \dot{x_1} = \dot{x} = x_2$$

Representación en el espacio de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{k}{m}u - \frac{c}{m}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Ejemplo 2.7: Control de Nivel de Estanque - Var. Estado

Modelo Dinámino No-Lineal

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{h} = \dfrac{k_v}{A_e} u - \dfrac{A_s}{A_e}\sqrt{2gh} \end{cases}$$

Condiciones iniciales:

$$h(0)$$

Definición del vector de estado:

$$\mathbf{x} = [x_1] = [h]$$

Representación en el espacio de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1] = \left[\frac{k_v}{A_e} u - \frac{A_s}{A_e}\sqrt{2gx_1} = [f_1(x_1, u)] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right.$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Var. Estado 1/7

Modelo Dinámino No-Lineal

$$\Sigma : \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta &= F \\ \ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} - g\sin\theta &= 0 \end{cases}$$

Condiciones iniciales:

$$\{q(0), \dot{q}(0)\} \Rightarrow x(0), \dot{x}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$$

Definición del vector de estado (conjunto de vars. que describen el estado dinámico del sistema):

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Var. Estado 2/7

Para encontrar la representación en el espacio de estado debemos obtener:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Notar que:

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 = \dot{\theta}$$

Reescribiendo las ecuaciones dinámicas en términos de las variables de estado es posib le encontrar $\dot{x}_2$ y $\dot{x}_4$:

$$\Sigma : \begin{cases} (M+m)\dot{x}_2 + ml\dot{x}_4 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 &= F \\ \dot{x}_2 \cos x_3 + l\dot{x}_4 - g \sin x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Var. Estado 3/7

Luego, despejando $\dot{x}_2$ y $\dot{x}_4$ de:

$$\Sigma : \begin{cases} (M+m)\dot{x}_2 + ml\dot{x}_4 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 = F & (1) \\ \dot{x}_2 \cos x_3 + l\dot{x}_4 - g \sin x_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1):

$$(M+m)\dot{x}_2 = F - ml\dot{x}_4 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \quad (3)$$

De (2):

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{l} g \sin x_3 - \frac{1}{l} \dot{x}_2 \cos x_3 \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3):

$$(M+m)\dot{x}_2 = F - mg \sin x_3 \cos x_3 + m\dot{x}_2 \cos^2 x_3 + mlx_4^2 \sin x_3 \quad (5)$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Var. Estado 4/7

De (5), reagrupando los factores de $\dot{x}_2$:

$$\begin{aligned}
\left[(M+m) - m\cos^2 x_3\right]\dot{x}_2 &= F - m\,g\sin x_3\cos x_3 \\
&\quad + m\,l\,x_4^2\sin x_3 \\
\left[M + m(1-\cos^2 x_3)\right]\dot{x}_2 &= F - m\,g\sin x_3\cos x_3 \\
&\quad + m\,l\,x_4^2\sin x_3 \\
\left[M + m\sin^2 x_3\right]\dot{x}_2 &= F - m\,g\sin x_3\cos x_3 \\
&\quad + m\,l\,x_4^2\sin x_3
\end{aligned}$$

Logramos despejar $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = \frac{F - mg\sin x_3\cos x_3 + mlx_4^2\sin x_3}{M + m\sin^2 x_3} \qquad (6)$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Var. Estado 5/7

Reemplazando (6) en (4):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_4 &= \frac{1}{l} g \sin x_3 - \frac{1}{l} \dot{x}_2 \cos x_3 \\
&= \frac{1}{l} g \sin x_3 - \frac{F - mg \sin x_3 \cos x_3 + m l x_4^2 \sin x_3}{l(M + m \sin^2 x_3)} \cos x_3 \\
&= \frac{(M + m\sin^2 x_3) g \sin x_3 - F \cos x_3 + mg \sin x_3 \cos^2 x_3 - m l x_4^2 \sin x_3 \cos x_3}{l(M + m \sin^2 x_3)} \\
&= \frac{(M + m) g \sin x_3 - F \cos x_3 - m l x_4^2 \sin x_3 \cos x_3}{l(M + m \sin^2 x_3)} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Var. Estado 6/7

Definiendo el input $u = F$ y empleando (6) y (7) el modelo no-lineal en variables de estado está dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u - mg\sin x_3 \cos x_3 + ml x_4^2 \sin x_3}{M + m\sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g\sin x_3 - u\cos x_3 - ml x_4^2 \sin x_3 \cos x_3}{l(M + m\sin^2 x_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ f_3(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ f_4(\mathbf{x},\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 &\Rightarrow \text{Vector de estado de dimensión } n = 4 \\ \mathbf{u} = u \in \mathbb{R} &\Rightarrow \text{Vector de inputs de dimensión } m = 1 \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{x},\mathbf{u}) \to \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^4 &\Rightarrow \text{Campo vectorial de velocidades} \\ & \quad (\textit{velocity vector field}). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Var. Estado 7/7

Con las condiciones iniciales requeridas:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \\ \theta(0) \\ \dot{\theta}(0) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Var. Estado 1/4

Modelo Dinámino Lineal con ecuación mecánica de 1^{er} orden (sin considerar posición)

$$\Sigma : \begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_g \omega = V_a \\ J\dot{\omega} + B\omega + Nmgr = K_T i_a \end{cases}$$

Condiciones iniciales (sin considerar posición):

$$\{i_a(0), \omega(0)\}$$

Definición del vector de estado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

Para encontrar la representación en el espacio de estado debemos obtener:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{f}((\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Var. Estado 2/4

Reescribiendo las ecuaciones dinámicas en términos de las variables de estado es posible encontrar $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$:

$$\Sigma : \begin{cases} L_a\dot{x}_1 + R_a x_1 + K_g x_2 = V_a \\ J\dot{x}_2 + Bx_2 + Nmgr = K_T x_1 \end{cases}$$

Definiendo $T_L = Nmgr$ y despejando $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ de Σ:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L_a}V_a - \frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{K_g}{L_a}x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{K_T}{J}x_1 - \frac{B}{J}x_2 - \frac{1}{J}T_L$$

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Var. Estado 3/4

Definiendo el input $\mathbf{u} = [V_a \quad T_L]^T$ y empleando las ecuaciones anteriores, el modelo lineal en variables de estado está dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} V_a - \frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K_g}{L_a} x_2 \\ \frac{K_T}{J} x_1 - \frac{B}{J} x_2 - \frac{1}{J} T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

o matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad &\Rightarrow \quad \text{Vector de estado de dimensión } n = 2 \\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \quad &\Rightarrow \quad \text{Vector de inputs de dimensión } m = 2 \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2 \quad &\Rightarrow \quad \text{Campo vectorial de velocidades} \\ &\qquad\quad (\textit{velocity vector field}). \end{aligned}$$

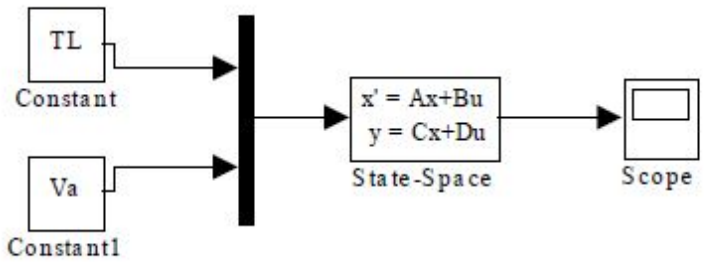
Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Var. Estado 4/4

Con las condiciones iniciales requeridas:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix}$$

Motor PMDC - Implementación 5

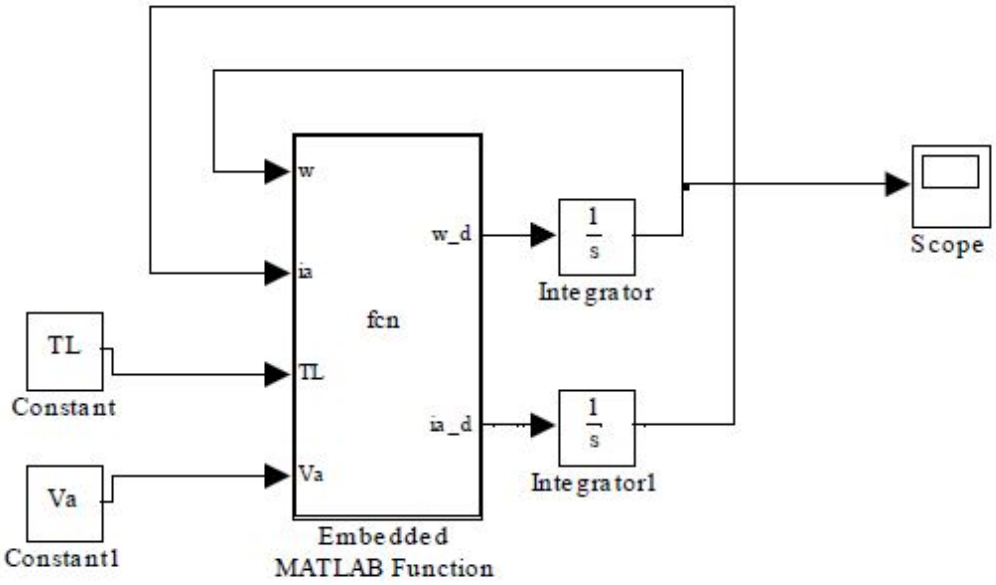
Simulink - Representación en el Espacio de Estado mediante Bloque Espacio de Estado



PMDC Simulation
State-Space Matlab Function
Miguel Torres-Torriti (c) 2007.04

Motor PMDC - Implementación 6

Simulink - Representación en el Espacio de Estado mediante Función Matlab Embedida



PMDC Simulation
State-Space Embedded Function
Miguel Torres-Torriti (c) 2007.04

Motor PMDC - Implementación 6

Bloque de función embedida

```
1   function [w_d, ia_d] = fcn(w, ia, Ra, La, Kg, Kt, J, B, TL, Va)
2   % This block supports an embeddable subset of the MATLAB language.
3   % See the help menu for details.
4
5   %Va=Ra*ia+La*d{ia}/dt+Kg*omega
6   %Tm=Km*ia
7   %Tf=B*omega
8   %J*d{omega}/dt=Tm-Tf-Tl
9
10  ia_d  = (Va-Kg*w-Ra*ia)/La;
11  w_d = (Kt*ia-B*w-TL)/J;
```

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación 7

¿Qué otras implementaciones son posibles?

¿Solución analítica?

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación 7

¿Qué otras implementaciones son posibles?

¿Solución analítica?

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación

Comentarios sobre distintas alternativas:

- Distintas implementaciones entregan respuestas que pueden diferir entre sí por la acumulación de errores de integración numérica.

I6: SS-Embedded Function

- Máxima flexibilidad y manejo de expresiones no-lineales.
- Fácil manejo de expresiones complicadas.
- Acceso a todos los estados.
- Ecuaciones dinámicas identificables por inspección visual.
- No soporta todas las funciones de Matlab y no tiene compatibilidad con versiones previas a 2007 de Matlab.

I5: SS-Matlab Block

- Igual que I6, pero no soporta ecuaciones no-lineales.

I4: TF-2 Etapas

- Sencillo y didáctico, pero no soporta ecuaciones no-lineales.
- No se tiene acceso a todos los estados.

Ejemplo 2.6: Motor PMDC - Implementación

Comentarios sobre distintas alternativas:

I3: Diagrama de bloques ordenado por ecuaciones

- Didáctico.
- Soporta ecuaciones no-lineales.
- Ecuaciones dinámicas identificables por inspección visual, pero puede tornarse inmanejable para sistemas complejos.

I2: Diagrama de bloques desordenado por ecuaciones

- Manera incorrecta de hacer las cosas

I1: TF-1 Etapa

- Ecuaciones dinámicas no identificables por inspección visual.
- Estados inaccesibles.
- Útil para representar filtros analógicos.
- Manera ineficaz de analizar (mediante simulaciones numéricas) el comportamiento dinámico del sistema. Frecuentemente empleada por alumnos que no han comprendido las ventajas de la representación del sistema en el espacio de estado.

Notas sobre las Soluciones de Sistemas en Variables de Estado 1/2

La solución del sistema dinámico Σ definido por:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall t \in [0, \infty) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

es una curva (trayectoria):

$$[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$$

definida para un tiempo $t \in [0, \infty)$, tal que:

- $x_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ son continuos en $t \in [0, \infty)$.
- $\dot{x}_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ existen para casi todo $t \in [0, \infty)$, excepto en aquellos instantes de tiempo $t_1^*, t_2^*, t_3^*, \ldots$ en que los inputs $u_i(t), i = 1, 2, \ldots, m$ son discontinuos.
- $x_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ satisfacen la ecuación diferencial del sistema Σ para todo $t \in [0, \infty)$ excepto $t_1^*, t_2^*, t_3^*, \ldots$

Notas sobre las Soluciones de Sistemas en Variables de Estado 2/2

Cabe destacar que el sistema dinámico Σ descrito en términos de las ecuaciones diferenciales originales y aquel expresado en términos de variables de estado son equivalentes en el sentido que sus soluciones son las mismas.

En algunos casos (bastante inusuales) es posible que no exista una representación del sistema dinámico Σ en términos de variables de estado de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Por ejemplo, en el caso que las variables $\dot{x}_2$ y $\dot{x}_4$ del modelo del Péndulo invertido no pudiesen despejarse.

Capítulo 2 – Representación de Sistemas Dinámicos: Modelos Matemáticos de Tiempo Continuo

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Linealización

1. Vehículo
2. Control de nivel de estanque
3. Péndulo invertido

Linealización

Motivación

Describir una dinámica de un sistema no-lineal complejo mediante una aproximación en base a ecuaciones diferenciales lineales que tienen las ventajas de:

- Facilitar las operaciones algebraicas.
- Simplificar el análisis y simulación del sistema.
- Permitir el uso de técnicas de análisis basadas en la aplicación de transformadas como las de Laplace, Fourier o Z.

Supuesto general

El rango de operación del sistema es pequeño, y se define en torno a un punto o trayectoria de equilibrio. Es decir, la variación de las variables de estado está restringida a intervalos acotados reducidos, tal que en dichos intervalos las soluciones del sistema de ecuaciones lineales se asemejan mucho a la del sistema no-lineal.

Punto de Operación o Equilibrio

Definición 2.1:

Se define como punto de operación o equilibrio (P.E.) del sistema dinámico Σ todo par $(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)$ que satisfaga:

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e) = \mathbf{0}}$$

Es decir, un P.E. es un estado y un input para el cual el sistema se mantiene estacionario o en equilibrio, ya que la condición anterior implica:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

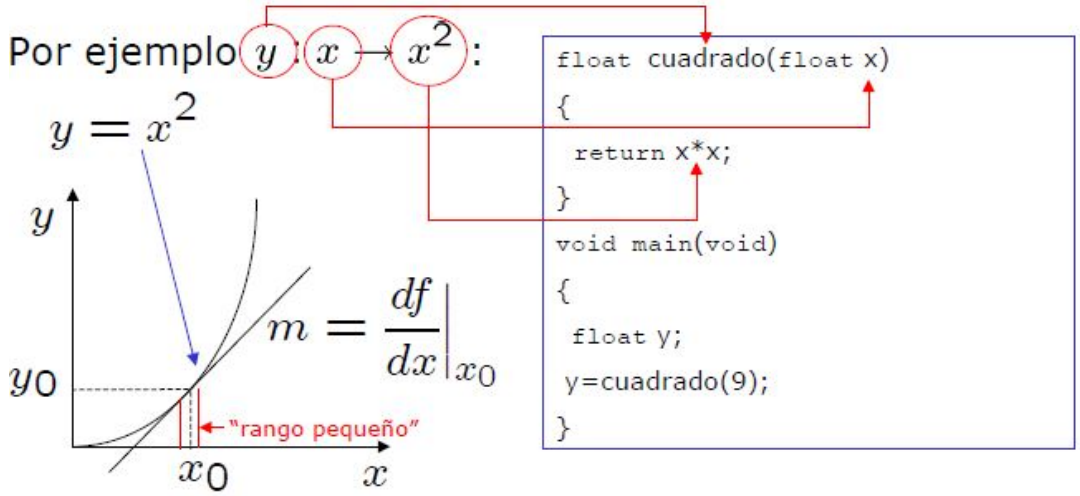
En otras palabras, no hay cambio en el tiempo de las variables de estado. Esto puede verse fácilmente integrando la ecuación diferencial del sistema Σ con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^e$ y entrada $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^e, t \geq 0$:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau + \mathbf{x}(0) = \int_0^t \mathbf{0} d\tau + \mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e, \forall t \geq 0$$

Linealización de una función de una variable

Considere la función $\underbrace{y : \mathbb{R} \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}}_{\text{notación formal}}$:

$$\underbrace{y = f(x)}_{\text{notación en ingeniería}}$$



La ecuación de la recta por (x_0, y_0) con pendiente m satisface:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Linealización de una función de una variable

Luego:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + m(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) \end{aligned}$$

Nótese que la expresión anterior corresponde a la aproximación de Taylor de primer orden.

Se podría usar una aproximación de Taylor de orden k:

$$y = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} (x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x_0} (x-x_0)^k$$

¡Pero esta aproximación ya no es lineal!

Linealización de una función vectorial multivariable

Si $f : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$, su linealización en torno al punto $(\mathbf{x}^e, \mathbf{y}^e)$ estará dada por:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^e) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^e} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^e)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$$

es el operador gradiente, y por consiguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

es el Jacobiano de $\mathbf{f}$.

Linealización de un Modelo No-Lineal

La linealización de un sistema dinámico no-lineal Σ definido por:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \forall t \in [0, \infty) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

alrededor del punto de operación o equilibrio $(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{y} &= \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{u} \end{aligned}$$

con condición inicial:

$$\Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

y

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^e, \qquad \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^e, \qquad \Delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^e$$

Linealización de un Modelo No-Lineal

El sistema linealizado:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{y} &= \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)} \Delta\mathbf{u} \end{aligned}, \qquad \Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

se escribe en forma compacta como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

con

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)}, \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)}, \quad \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)}$$

y cierto abuso de notación reemplazando

$$\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{x}, \qquad \Delta\mathbf{u} \to \mathbf{u}, \qquad \Delta\dot{\mathbf{x}} \to \dot{\mathbf{x}}$$

Consideraciones sobre linealización

1. En general, el sistema linealizado es variante en el tiempo y constituye una aproximación válida del sistema real (no-lineal) sólo para $\Delta\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{u}$ pequeños.
2. Las funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ deben ser *suaves*, es decir diferenciables.
3. Si $\mathbf{x}^e(t), \mathbf{u}^e(t)$ *varían* con $t \geq t_0$, entonces se dice que la linealización es una linealización alrededor de una trayectoria nominal.
4. Si $\mathbf{x}^e(t), \mathbf{u}^e(t)$ *son constantes* para todo $t \geq t_0$, entonces se dice que la linealización es una linealización alrededor de un punto nominal, punto de operación, o punto de equilibrio. Luego, si $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ no dependen explícitamente de t, el sistema linealizado alrededor del punto de operación es invariante en el tiempo.

Ejemplo 2.1: Vehículo - Var. Estado

Modelo Dinámico Lineal

$$\Sigma : \begin{cases} m\ddot{x} = ku - c\dot{x} \\ x(0), \dot{x}(0) \end{cases}$$

Representación en el espacio de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{k}{m}u - \frac{c}{m}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Linealización de la ecuación de estado es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2^e \\ ku^e - cx_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\big|_{(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)}} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^e \\ x_2 - x_2^e \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\big|_{(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)}} [u - u^e]$$

Ejemplo 2.1: Vehículo - Var. Estado

Con las definiciones:

$$\dot{\Delta\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^e$$

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^e$$

el modelo linealizado del vehículo estará dado por:

$$\dot{\Delta\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta x_1} \\ \dot{\Delta x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \frac{k}{m}\Delta u - \frac{c}{m}\Delta x_2 \end{bmatrix}$$

Nótese que la ecuación del modelo linealizada tiene exactamente la misma estructura que el modelo en el espacio de estado. Esto era lógico de esperarse dado que el modelo original no contenía funciones no-lineales.

Ejemplo 2.1: Vehículo - Var. Estado

Atención! Es común que, con cierto abuso de la notación. se ignoren los Δ's, de modo que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta x}_1 \\ \dot{\Delta x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \frac{k}{m}\Delta u - \frac{c}{m}\Delta x_2 \end{bmatrix}$$

se escriba simplemente como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{k}{m}u - \frac{c}{m}x_2 \end{bmatrix}.$$

Por esto será necesario tener cuidado, y decidir –*de acuerdo al contexto*–, si el *vector de estado* $\mathbf{x}$ se refiere realmente a los valores del estado o a las variaciones incrementales $\Delta\mathbf{x}$ de las variables de estado. Esta situación puede identificarse fácilmente considerando que siempre que se hable de modelo linealizado este debería referirse a los términos $\Delta\mathbf{x}$.

Ejemplo 2.7: Control de Nivel de Estanque - Linealización

Modelo Dinámino No-Lineal

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{h} = \frac{k_v}{A_e} u - \frac{A_s}{A_e}\sqrt{2gh} \\ h(0) \end{cases}$$

Representación en el espacio de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1] = \left[\frac{k_v}{A_e} u - \frac{A_s}{A_e}\sqrt{2gx_1}\right] = [f_1(x_1, u)] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Linealización de la ecuación de estado es:

$$\dot{\Delta x_1} = -\frac{A_s}{A_e}\frac{g}{\sqrt{2gx_1^e}}\Delta x_1 + \frac{k_v}{A_e}\Delta u$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Linealización

Modelo Dinámico No-Lineal

$$\Sigma : \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta &= F \\ \ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} - g\sin\theta &= 0 \\ \{q(0), \dot{q}(0)\} \Rightarrow \{x(0), \dot{x}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)\} & \end{cases}$$

Modelo dinámico en variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u - mg\sin x_3\cos x_3 + mlx_4^2\sin x_3}{M + m\sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g\sin x_3 - u\cos x_3 - mlx_4^2\sin x_3\cos x_3}{l(M+m\sin^2 x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ f_3(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ f_4(\mathbf{x},\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Linealización

La linealización puede aplicarse a las ecuaciones diferenciales originales del sistema o a su representación en variables de estado. Para linealizar el sistema en variables de estado se calculan el Jacobiano de estado:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(x^e,u^e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right|_{(x^e,u^e)} & \frac{2mlx_4 \sin x_3}{M+m\sin^2 x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \left.\frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right|_{(x^e,u^e)} & \frac{-2ml_4^e \sin x_3^e \cos x_3^e}{l(M+m\sin^2 x_3^e)} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right|_{(x^e,u^e)} =& \frac{1}{(M+m\sin^2 x_3^e)^2}\left[\left(mg(2\sin^2 x_3^e - 1) + mlx_4^{e\,2}\cos x_3^e\right)\left(M+m\sin^2 x_3^e\right)\right. \\ & \left. -\left(u^e - mg\sin x_3^e\cos x_3^e + ml(x_4^e)^2\sin x_3^e\right)\left(2m\sin x_3^e\cos x_3^e\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right|_{(x^e,u^e)} =& \frac{1}{(M+m\sin^2 x_3^e)^2}\left[\left((M+m)g\cos x_3^e + u^e\sin x_3^e + mlx_4^{e\,2}\left(2\sin^2 x_3^e - 1\right)\right)\left(M+m\sin^2 x_3^e\right)\right. \\ & \left. -\left((M+m)g\sin x_3^e - u\cos x_3^e - mlx_4^2\sin x_3^e\cos x_3^e\right)\left(2m\sin x_3^e\cos x_3^e\right)\right]\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8: Péndulo Invertido - Linealización

y el Jacobiano de las entradas:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(x^e,u^e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m\sin^2 x_3^e} \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3^e}{l(M+m\sin^2 x_3^e)} \end{bmatrix}$$

luego, el sistema linealizado está dado por:

$$\dot{\Delta\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(x^e,u^e)} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(x^e,u^e)} \Delta\mathbf{u}$$

con condición inicial:

$$\Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{0},$$

es decir:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^e.$$

Ejemplo 2.9: Satélite espacial - Linealización

Actividad en clases.

