Pauta T2 – IEE2613

P1: 20 pts

P1. En un laboratorio docente de control, el modelo nominal de una planta está dado por $G_o(s) = \frac{\alpha}{s-\beta}$, con $\alpha, \beta > 0$. El personal del laboratorio propone utilizar un controlador de la forma $C_1(s) = \frac{K(s-\beta)}{s}$, y aseguran que dicho controlador logra seguimiento perfecto a referencias constantes cuando $K \to \infty$, y a su vez, compensa perturbaciones de entrada constantes.

10pts (a) Demuestre o refute la afirmación del personal del laboratorio, fundamentando claramente su respuesta.

10pts (b) Luego de un análisis, usted sugiere emplear un controlador de la forma $C_2(s) = \frac{K(s+\gamma)}{s}$, con algún $\gamma > 0$. Justifique detalladamente, usando las funciones de sensibilidad del lazo, por qué el controlador propuesto permite seguir referencias constantes y compensar perturbaciones de entrada constantes cuando $K \to \infty$.

Sol:

a) Para seguir referencias debemos mirar la función de sensibilidad

$$T_o(s) = \frac{B_o(s)C_1(s)}{1 + B_o(s)C_1(s)} = \frac{\alpha K}{s + \alpha K} = \frac{\alpha}{\frac{s}{K} + \alpha}$$

Para $K \to \infty$ tenemos que $\lim_{K\to\infty} T_o(s) = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$

$\Rightarrow$ La afirmación del personal con respecto a seguimiento de referencias es verdadera.

Nos falta verificar si además compensa perturbaciones de entrada constantes cuando $K \to \infty$. Para eso debemos mirar a la sensibilidad

$$S_{\dot{u}_o}(s) = \frac{Y(s)}{D_i(s)} = \frac{T_o(s)}{C_1(s)} = \frac{s}{K(s-\beta)} \cdot \frac{\alpha K}{s + \alpha K}$$

$$= \frac{\alpha s}{(s-\beta)(s+\alpha K)}$$

$\hookrightarrow$ Polo inestable!

$\Rightarrow$ Cualquier perturbación de entrada $d_i(t)$ acotada será amplificada con el controlador $C_1(s)$ propuesto. Por ende la afirmación del personal del lab es FALSA. De hecho, con $C_1(s)$, el lazo es inestable:

$$A_{cl}(s) = A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = s(s-\beta) + \alpha K(s-\beta)$$
$$= (s + \alpha K)(s-\beta) \to \text{raíz en SPD!}$$

b) Considere ahora $C_2(s) = \frac{K(s+\gamma)}{s}$. Revisemos si este controlador cumple lo prometido:

- Seguimiento a referencia para $K \to +\infty$

$$T_0(s) = \frac{G_0(s) C_2(s)}{1 + G_0(s) C_2(s)} = \frac{\alpha K(s+\gamma)}{s(s-\beta) + \alpha K(s+\gamma)}$$

$$= \frac{\alpha K(s+\gamma)}{s^2 + s(\alpha K - \beta) + \alpha K \gamma}$$

Tomemos $K \to \infty$: $\lim_{K\to\infty} T_0(s) = \lim_{K\to\infty} \frac{\alpha(s+\gamma)}{\frac{s^2}{K} + s\alpha - \frac{s\beta}{K} + \alpha\gamma}$

$$= \frac{\alpha(s+\gamma)}{\alpha(s+\gamma)}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow$ Si cumple lo prometido! es decir, $C_2(s)$ es capaz de seguir referencias para $K \to +\infty$.

- Compensación de perturbaciones de entrada cuando $K \to \infty$

$$S_{i0}(s) = \frac{T_0(s)}{C_2(s)} = \frac{s}{K(s+\gamma)} \cdot \frac{\alpha K(s+\gamma)}{s^2 + s(\alpha K - \beta) + \alpha K \gamma}$$

$$= \frac{\alpha s(s+\gamma)}{(s+\gamma)(s^2 + s(\alpha k - \beta) + \alpha k \gamma)}$$

Tomamos $K \to +\infty$: $\lim_{K\to+\infty} S_{i0}(s) = 0$

$\Rightarrow$ Cumple lo prometido! Es decir, es capaz de eliminar perturbaciones de entrada para una ganancia suficientemente grande.

P2
20 pts

P2. Considere un lazo de control estándar de un grado de libertad en que el controlador y la planta están dados por

$$C(s) = \frac{2(s+c)}{s}, \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+3)}.$$

10 pt (a) Determine el rango de valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales el lazo es internamente estable.

10 pts (b) Determine, si existe, el valor crítico de c para que el lazo presente oscilación sostenida, y encuentre la frecuencia asociada a esa oscilación.

Sol: Hay varias formas de hacerla, pero usaré Routh-Hurwitz para ser consistente con la clase.

a) El polinomio de lazo cerrado está dado por

$$A_{cl}(s) = s^2(s+3) + 2(s+c) = s^3 + 3s^2 + 2s + 2c$$

Construyamos el arreglo de Routh:

s^3	1	2
s^2	3	$2c$
s^1	$2-\frac{2}{3}c$	
s^0	$2c$	

$$\square = \frac{-1}{3}(2c-6) = 2 - \frac{2}{3}c$$

Entonces, para que el lazo cerrado sea estable, no deben haber raíces en el semiplano derecho, es decir, no deben haber cambios de signo en la primera columna del arreglo:

$$\Rightarrow 2 - \frac{2}{3}c > 0 \quad \& \quad 2c > 0$$

$$\Rightarrow c < 3 \quad \& \quad c > 0$$

$\Rightarrow$ Para $c \in (0,3)$, el lazo es estable ∇

b) Para que ocurra una oscilación sostenida (~~MMM~~) deben haber polos de lazo cerrado en el eje $s=jw$. Esto sucede cuando $c=3$ ó $c=0$.

Sea $c=3 \Rightarrow$

s^3	1	2
s^2	3	6
s^1	0	0
s^0		

$\Rightarrow A_{cl}(s)$ es divisible por $3s^2+6$

$\Rightarrow A_{cl}(s) = s^3+3s^2+2s+6$

$= (\quad)(3s^2+6)$

raíces en $s = \pm j\sqrt{2}$

$\Downarrow$

oscilación sostenida de frecuencia $w = \sqrt{2}$

P3 20pts

P3. Considere un lazo de control estándar de un grado de libertad donde la planta está dada por

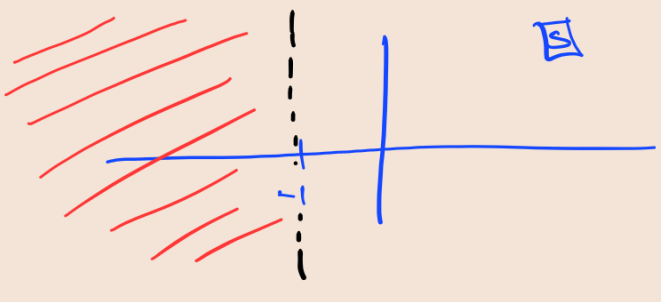
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+5)}.$$

Se desea controlar $G(s)$ de manera que los modos naturales del lazo cerrado sean igual o más rápidos que e^{-t}. Determine si es posible o no lograrlo con el siguiente controlador de estructura PI:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}.$$

Sol: Se puede hacer por Routh o LGR.
Cualquiera de los dos vale como respuesta.

* **ROUTH**: Debemos asegurarnos de que todos los polos de lazo cerrado estén a la izquierda de $s=-1$



para que la convergencia sea igual o mayor que e^{-t}.

$$A_{cl}(s) = A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = (s-1)(s+5)s + k_p s + k_i$$

Hacemos el cambio de variable $w = s+1$

$$\Rightarrow A_{cl}(w-1) = (w-2)(w+4)(w-1) + k_p(w-1) + k_i$$

$$= w^3 + w^2 + (k_p - 10)w + (k_i - k_p + 8)$$

Arreglo de Routh:

w^3	1	$k_p - 10$
w^2	1	$k_i - k_p + 8$
w^1	$\gamma_{3,1}$	
w^0	$k_i - k_p + 8$	

$$\gamma_{3,1} = \frac{-1}{1}(k_i - k_p + 8 - k_p + 10)$$

$$= 2k_p - k_i - 18$$

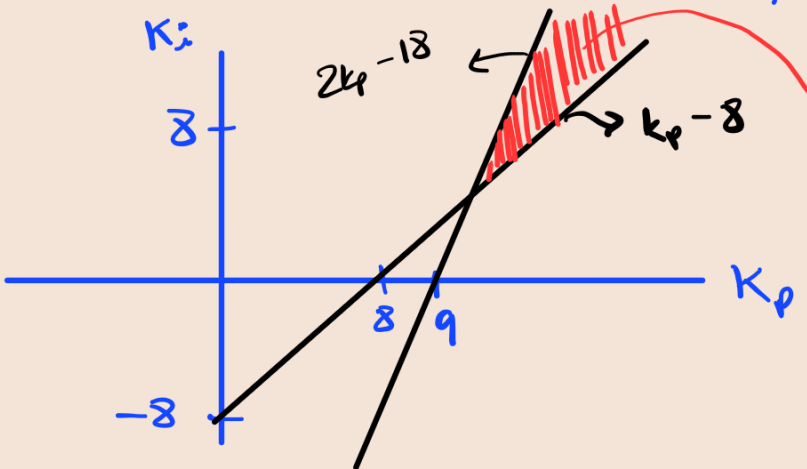
Para que no hayan cambios de signo en la 1era columna (0 raíces en el SPD):

$$2k_p - k_i - 18 > 0 \quad \& \quad k_i - k_p + 8 > 0$$

$$\Rightarrow k_i < 2k_p - 18$$

$$k_i > k_p - 8$$

Podemos ver gráficamente que



Solución: Cualquier (k_i, k_p) en esta región sirve. Por ende, sí es posible lograr el objetivo.

P4
20pts

P4. Considere un lazo de control estándar de un grado de libertad en que la planta *nominal* y el controlador están dados por

$$G_o(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\psi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{y} \qquad C(s) = \frac{K(s+\omega_n)}{s},$$

donde $\omega_n > 0$ y $0 < \psi < 1$.

5pts (a) Haga un diagrama del lugar geométrico de raíces del polinomio de lazo cerrado cuando $K \in \mathbb{R}$.

5pts (b) Si $K = \omega_n$, determine el rango de valores de ψ para que el lazo sea iternamente estable.

10pts (c) Si la planta *verdadera* tiene un cero de fase no mínima no modelado, es decir,

$$G(s) = (-\alpha s + 1)G_o(s), \ \alpha > 0,$$

estime el ancho de banda máximo del lazo nominal para poder garantizar estabilidad robusta.

Sol:

a) LGR

$$T_o(s) = \frac{K\omega_n(s+\omega_n)}{s(s^2+2\psi\omega_n s+\omega_n^2) + K\omega_n(s+\omega_n)}$$

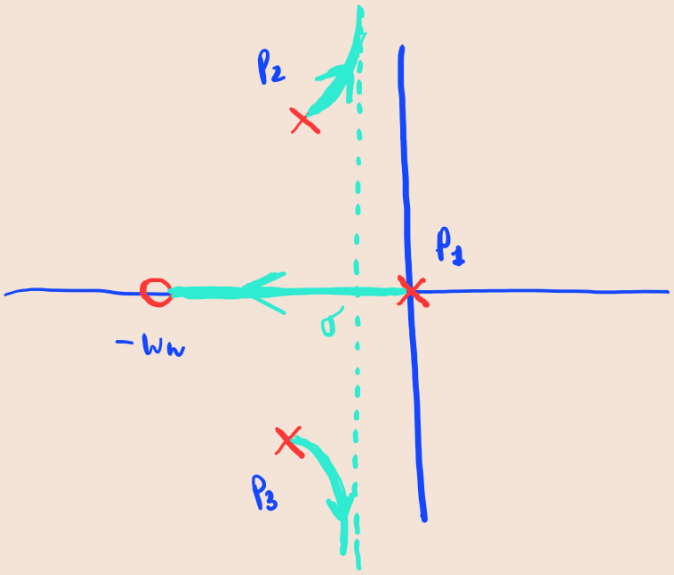
El polinomio de lazo cerrado es

$$A_{cl}(s) = s(s^2 + 2\psi\omega_n s + \omega_n^2) + K\omega_n(s+\omega_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + K\underbrace{\frac{\omega_n(s+\omega_n)}{s(s^2+2\psi\omega_n s+\omega_n^2)}}_{F(s)} = 0$$

$$\begin{cases} \text{Polos}: & p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -\psi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\psi^2} \\ \text{Cero}: & c = -\omega_n \end{cases}$$

LGR ($K \geq 0$)



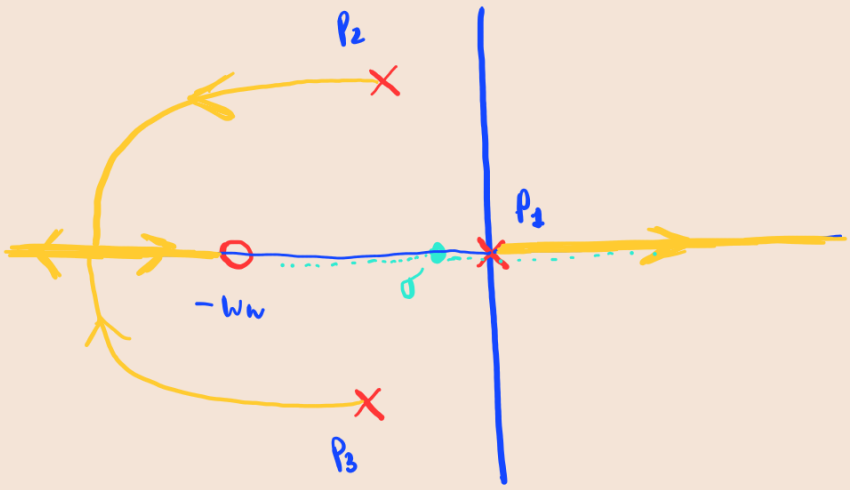
- $n - m = 2$ asíntotas
- centroide $\sigma = \frac{\sum p_i - \sum c_i}{n-m} = \frac{-2\psi\omega_n + \omega_n}{2} = \frac{1-2\psi}{2}\omega_n$

$$\Rightarrow -\frac{\omega_n}{2} < \sigma < \frac{\omega_n}{2}$$

- ángulos: $\phi_1 = \frac{180°}{2} = 90°$

$\phi_2 = -90°$

LGR ($K \geq 0$)



- $n - m = 2$ asíntotas
- centroide $\sigma = \frac{1-2\psi}{2} w_n$

↓ Es el mismo, sólo cambiar los ángulos

- ángulos: $\phi_1 = 0°$

$\phi_2 = \frac{360°}{2} = 180°$

b) Si $K = w_n \Rightarrow A_{cl}(s) = (s^2 + 2\psi w_n s + w_n^2)s + w_n^2(s + w_n)$

$= s^3 + 2\psi w_n s^2 + 2w_n^2 s + w_n^3$

Arreglo de Routh:

s^3	1	$2w_n^2$
s^2	$2\psi w_n$	w_n^3
s^1	$\gamma_{3,1}$	
s^0	w_n^3	

$$\gamma_{3,1} = \frac{-1}{2\psi w_n}\left(w_n^3 - 4\psi w_n^3\right)$$

$$= \frac{-w_n^{\cancel{3}\,2}}{2\psi \cancel{w_n}}(1 - 4\psi)$$

$$= \frac{w_n^2}{2\psi}(4\psi - 1)$$

El lazo es internamente estable

si $2\psi w_n > 0$ & $\frac{2w_n^2}{2\psi}(4\psi - 1) > 0$

$\Rightarrow \psi > 0$ & $4\psi > 1/4$

Dado que $0 < \psi < 1$ por enunciado, la condición sobre ψ está dada por

$$\frac{1}{4} < \psi < 1$$

c) Ahora tenemos que la planta real tiene modelo

$$G(s) = (-\alpha s + 1)\, G_0(s) \quad , \quad \alpha > 0$$

Para garantizar estabilidad robusta, se debe cumplir la condición $|T_0(jw)||G_\Delta(jw)| < 1 \quad \forall w$,

donde $$G_\Delta(s) = \frac{G(s) - G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{(-\alpha s + 1)\, G_0(s) - G_0(s)}{G_0(s)}$$

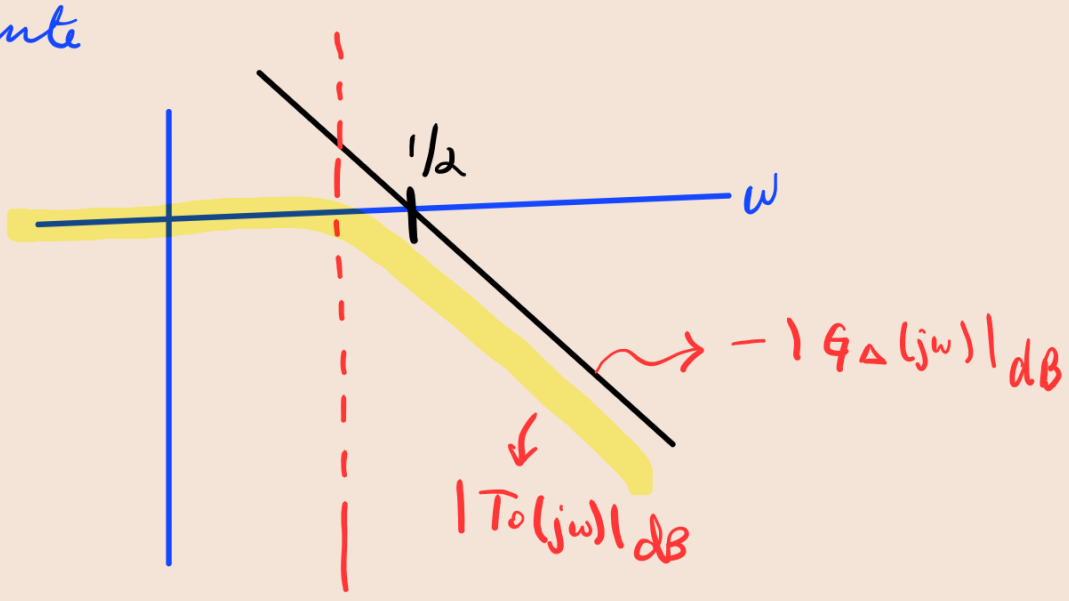
$$= -\alpha s$$

$$\Rightarrow |G_\Delta(jw)| = |-\alpha jw| = \alpha w$$

$\Rightarrow$ Estabilidad robusta si se cumple

$$|T_0(jw)| < \frac{1}{\alpha w}$$

Gráficamente



ancho de banda de T_0 debe ser MENOR que $\frac{1}{\alpha}$ [rad/s]