PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Pauta Tarea 3

IEE2613 – CONTROL AUTOMÁTICO (S2-2024)

Profesor: Alejandro Maass **Fecha de entrega:** 18/11/2024

Instrucciones

- La tarea debe entregarse en formato `.pdf` a través de la plataforma **Canvas**.
- En el `.pdf` debe incluir el detalle del trabajo realizado (explicaciones, cálculos, resultados y gráficos obtenidos, comentarios, etc.)
- Además, debe incluir en el documento, donde corresponda, el código utilizado para generar los gráficos y/o simulaciones.
- La tarea es de carácter **individual**.
- Recordar que, en base al artículo 11 del *Reglamento sobre la Responsabilidad Académica y Disciplinaria de los miembros de la Comunidad Universitaria*: "Todo acto realizado por un alumno que signifique una infracción académica, será sancionado con la suspensión inmediata de la examinación, cuando sea posible, y con la aplicación de la nota mínima".

Problemas

P1 (20pts) Considere una planta cuyo modelo nominal es

$$G_o(s) = \frac{15}{s-10}$$

Plantee la ecuación de asignación de polos (diofantina) que permite encontrar un controlador estabilizante $C(s)$ tomando en cuenta que:

1. Se desea error estacionario cero para una referencia $r(t) = A_0 + A_1 \sin(3t + \alpha)$
2. El error de modelado $G_\Delta(s)$ tiene magnitud significativa en frecuencias $\omega > 8$ rad/s

Solución: La planta es de orden $n = 1$. Para seguir una referencia constante A_0, el controlador debe tener integración. Además, queremos seguir una referencia sinusoidal de frecuecnia 3, por ende, el controlador debe tener polos en $s = \pm j3$. Es decir, $C(s)$ debe tener la forma

$$C(s) = \frac{P(s)}{s(s^2+9)\bar{L}(s)}$$

donde el grado del controlador bipropio es $n - 1 + r = 1 - 1 + 3 = 3$, dado que $r = 3$ (1 polo por integración más 2 polos por la sinusoidal). Es decir,

$$C(s) = \frac{P(s)}{s(s^2+9)\bar{L}(s)} = \frac{p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s^2+9)}$$

Con este controlador, el polinomio de lazo cerrado estaría dado por

$$A_{cl}(s) = (s-10)s(s^2+9) + 15(p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0)$$

donde vemos que debemos asignar 4 polos de lazo cerrado. ¿Cómo los asignamos? Bueno, viendo si tenemos algún requerimiento de ancho de banda.

Dado que estamos en presencia de error de modelado, idealmente el controlador propuesto, y por ende el lazo cerrado, debería ser robusto. Es decir, se debería cumplir que

$$|T_o(j\omega)||G_\Delta(j\omega)| < 1$$

por el teorema de estabilidad robusta. Dado que G_Δ tiene magnitud significativa en frecuencias mayores a 8 rad/s, nos gustaría que $T_o(s)$ tuviese ancho de banda menor a 8 rad/s para asegurar estabilidad robusta. Es decir, ubicaremos los polos de lazo cerrado para cumplir ese requisito de ancho de banda. Un polinomio de lazo cerrado posible es

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 9s + 36)(s + 10)^2$$

Por lo caul, la ecuación diofantina que nos piden está dada por

$$(s - 10)s(s^2 + 9) + 15(p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s^2 + 9s + 36)(s + 10)^2$$

P2 (20pts) En la Figura 1 se muestra la respuesta a un escalón unitario en lazo abierto de una planta a controlar. Se sabe que existe una perturbación d_o de salida de baja frecuencia con energía hasta aproximadamente 5 [rad/s]. Diseñe un controlador estabilizante tipo PID, usando asignación de polos, que tome en cuenta toda la información disponible.

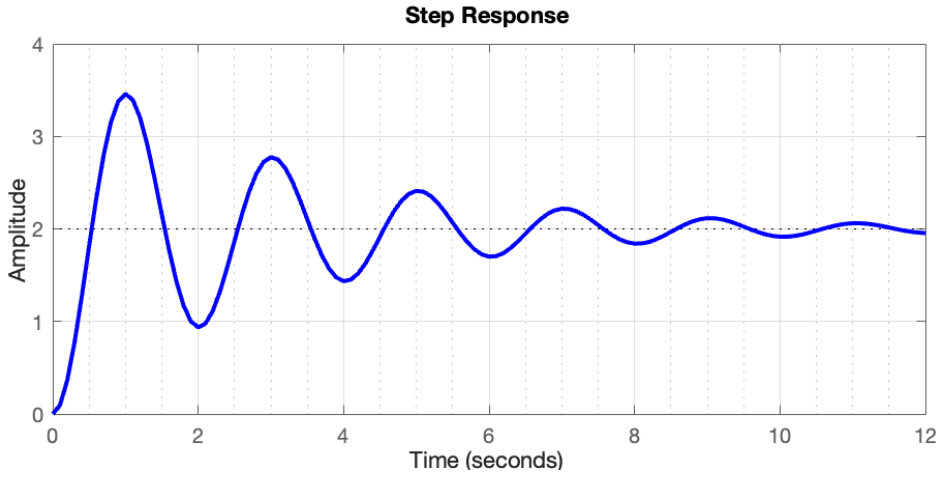


Figure 1: Respuesta a escalón unitario de una planta desconocida.

Solución: Para diseñar el controlador necesitamos el modelo de la planta. Dado que conocemos su respuesta a escalón, la cual luce como un sistema de segundo orden, podemos identificar que $G_o(s)$ debiese lucir como

$$G_o(s) = \frac{K}{s^2 + 2\psi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Del gráfico podemos identificar lo siguiente:

- $y_\infty = G_o(0) = \frac{K}{\omega_n^2} = 2$
- Período de oscilación $T_d \approx 2 = \frac{2\pi}{\omega_d} \implies \omega_d \approx \pi \implies \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\psi^2} \approx \pi$
- Tiempo de asentamiento $t_s \approx 4\tau = 8 \implies \tau = 2$ (constante de tiempo) $\implies \tau = 2 = \frac{1}{\psi\omega_n}$

Con estas ecuaciones podemos llegar a

$$\begin{aligned} K &= 2\omega_n \\ \omega_n\sqrt{1-\psi^2} &= \pi \\ \psi &= 1/(2\omega_n) \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $\omega_n \approx 3.1$, $\psi \approx 0.16$ y $K \approx 19.22$. Lo que implica que $G_o(s)$ es aproximadamente

$$G_o(s) = \frac{19.22}{s^2 + s + 9.61}$$

Como vimos en clases, un PID tiene la forma (en asignación de polos)

$$C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s + \ell_0)}$$

Entonces, el polinomio de lazo cerrado está dado por

$$A_{cl}(s) = (s^2 + s + 9.61)s(s + \ell_0) + p_2 s^2 + p_1 s + p_0$$

Debemos asignar 4 polos de lazo cerrado, y deben ser tal que el ancho de banda sea mayor que 5 rad/s para asegurarnos de matar la perturbación d_o. Un $A_c(s)$ que cumple esto sería

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 7s + 49)(s + 10)^2$$

Por ende, la ecuación diofantina de asignación de polos queda dada por

$$\begin{aligned} (s^2 + s + 9.61)s(s + \ell_0) + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 &= (s^2 + 7s + 49)(s + 10)^2 \\ s^4 + (1 + \ell_0)s^3 + (9.61 + \ell_0 + p_2)s^2 + (9.61\ell_0 + p_1)s + p_0 &= s^4 + 27s^3 + 289s^2 + 1680s + 4900 \end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} 1 + \ell_0 &= 27 \\ 9.61 + \ell_0 + p_2 &= 289 \\ 9.61\ell_0 + p_1 &= 1680 \\ p_0 &= 4900 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \ell_0 &= 26 \\ p_2 &= 253.39 \\ p_1 &= 1430.1 \\ p_0 &= 4900 \end{aligned}$$

En clases vimos como ir de estos parámetros a la forma clásica del PID

$$C_{\text{PID}}(s) = K_p + \frac{K_p}{T_i s} + K_p T_d s \frac{1}{\tau_D s + 1}$$

lo que se hacía usando

$$\begin{aligned} \tau_D &= \frac{1}{\ell_0} = 0.0385 \\ T_i &= \frac{p_1\ell_0 - p_0}{p_0\ell_0} = 0.253 \\ K_p &= \frac{p_1\ell_0 - p_0}{\ell_0^2} = 47.75 \\ T_d &= \frac{p_2\ell_0^2 - p_1\ell_0 + p_0}{\ell_0(p_1\ell_0 - p_0)} = 0.166 \end{aligned}$$

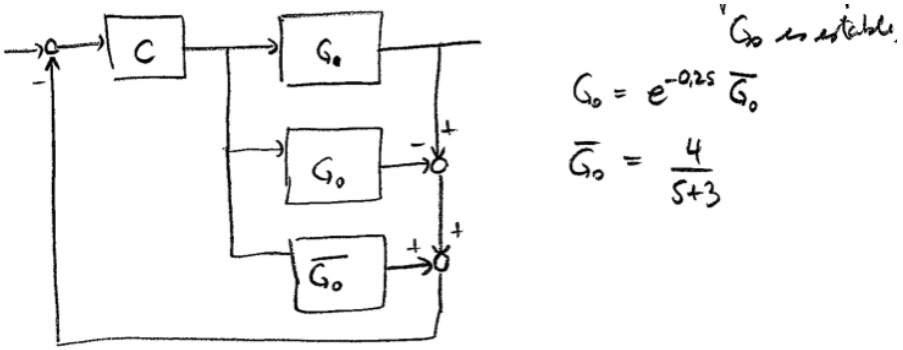
P3 (20pts) Considere una planta descrita por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{4e^{-0.2s}}{s+3}$$

Diseñe un controlador que garantice seguimiento perfecto, en estado estacionario, a referencias constantes y compensación de perturbaciones de salida en la banda 2 a 5 [rad/s].

Solución: El sistema tiene un retardo por lo que podemos usar una arquitectura de Predictor de Smith, o aproximar el retardo por Padé. Cualquiera de las dos se considera correcta.

El procedimiento usando el predictor de Smith es el siguiente.



Trabajamos con la planta sin retardo $\bar{G}_o(s) = \frac{4}{s+3}$. Para diseñar el controlador, notamos que el grado de éste debe ser $n - 1 + r = 1 - 1 + 1 = 1$ ($r = 1$ por que necesitamos integración para la referencia constante). Entonces la forma del controlador sería

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$

Dado que tenemos una perturbación de salida en la banda $[2, 5]$ rad/s, debemos tener un ancho de banda mayor que 5 rad/s. Por ende, una propuesta de $A_{cl}(s)$ podría ser

$$\begin{aligned} s(s+3) + 4(p_1 s + p_0) &= s^2 + 9s + 36 \\ \implies s^2 + (3 + 4p_1)s + 4p_0 &= s^2 + 9s + 36 \end{aligned}$$

Entonces, $p_1 = 1.5$ y $p_0 = 9$.

- Si alguien usa Padé, deberían aproximar el retardo como

$$G_o(s) = \frac{4}{s+3} \times \frac{-\frac{0.2}{2}s + 1}{\frac{0.2}{2}s + 1} = \frac{-4(s-10)}{(s+3)(s+10)}$$

  Ahora eso si, el grado de $C(s)$ sería $n - 1 + r = 2 - 1 + 1 = 2$, entonces tendría la forma

$$C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s + \ell_0)}$$

  Deberían proponer 4 polos de lazo cerrado con el mismo ancho de banda mayor que 5, por ejemplo,

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 9s + 36)(s+10)^2$$