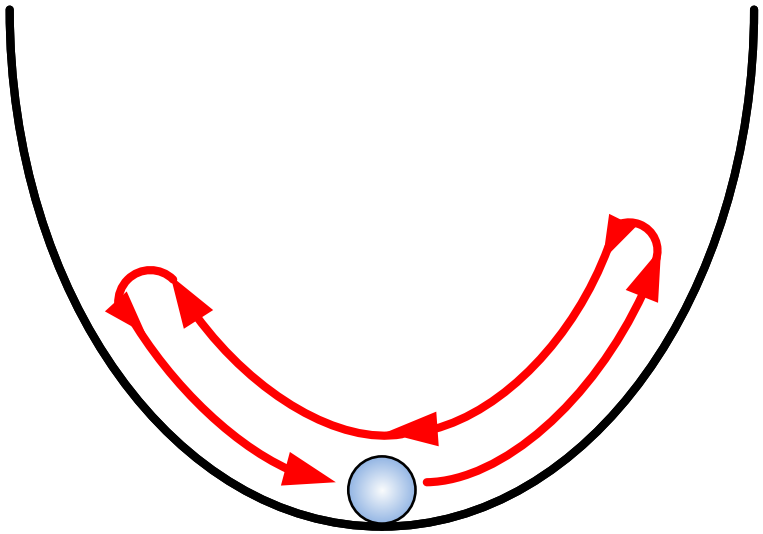
Capítulo 2
Respuesta Dinámica de Sistemas Lineales Realimentados

Miguel Torres Torriti

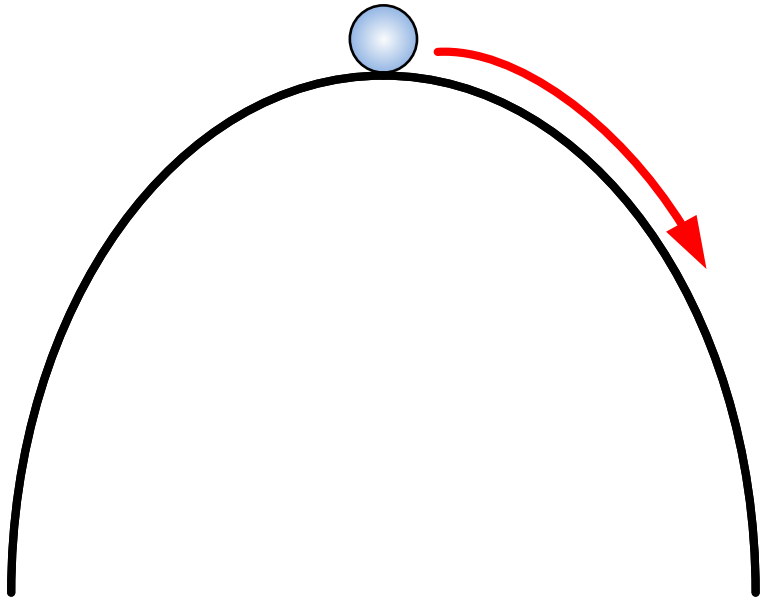
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Tipos de equilibrio



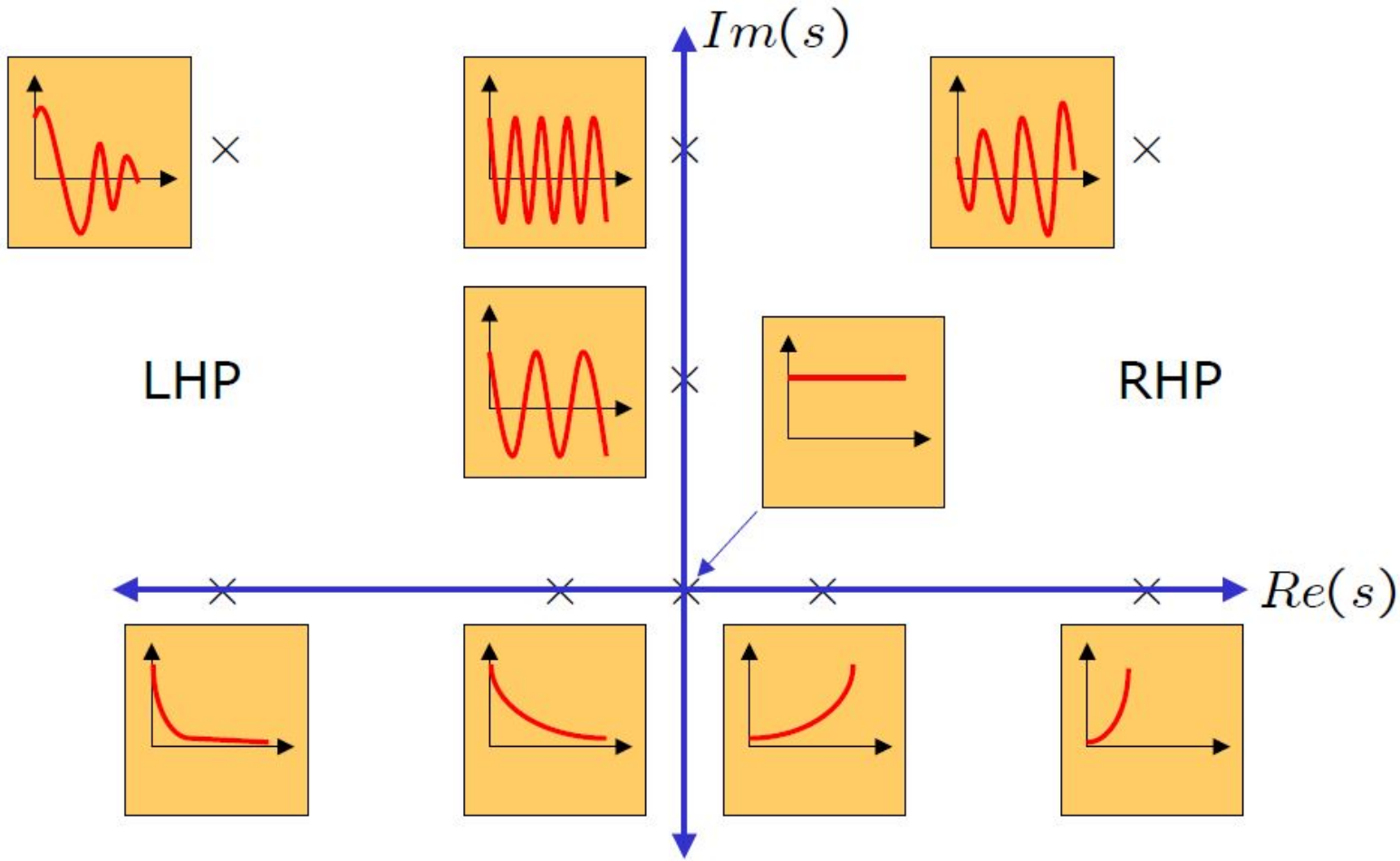
Equilibrio estable



Equilibrio inestable

Equilibrio $\neq$ Estabilidad

Respuestas naturales asociadas a polos en $\mathbb{C}$



Sistema



Sistema

Un *sistema* es objeto compuesto de un *conjunto* de partes o componentes relacionados entre si que interactúan de acuerdo a un conjunto de reglas que determinan su funcionamiento e interacción con el entorno. En griego, $\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ (*systēma* en latín), significa "un todo compuesto de varias partes o miembros", literalmente "composición".
Los componentes de un sistema son:

1. Entradas: Estímulos, datos, información, insumos que ingresan al sistema.
2. Procesos: Reglas de cambio sobre elementos internos o entradas del sistema.
3. Salidas: Resultados de los procesos realizados en el sistema.

Sistema, proceso o planta

☞ Debes saber que...

Un *proceso químico* o *planta química* son tipos de sistemas. Así como también procesos biológicos, computacionales, electrónicos, mecánicos o socioeconómicos, por mencionar algunos.

Los procesos químicos industriales se remontan al siglo XIX. En particular, el físico francés Nicolas Léonard Sadi Carnot, quien estudió termodinámica, fue pionero en el desarrollo del concepto de "sistema" con sus estudios de la máquina de vapor de 1824. A medidios del sigo XX, Norbert Wiener, matemático y filósofo estadounidense, contribuyó siginificativamente a la formalización matemática de la teoría de sistemas, introdujo el término "cibernética" en su libro "Cibernética o el control y comunicación en animales y máquinas", publicado en 1948.

En este curso utilizaremos intercambiablemente los conceptos de planta, proceso o sistema, para referirnos a sistemas.

Sistema Dinámico (*input driven dynamical system*)



Sistema Dinámico

Un **sistema dinámico** Σ es una tupla $(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{T}, \Phi, H)$ donde:

- $\mathcal{X}$ es el *espacio de los estados*, y representa todos los posibles estados internos del sistema.
- $\mathcal{U}$ es el *espacio de las entradas*, y representa todas las entradas exógenas o controles.
- $\mathcal{Y}$ es el *espacio de las salidas*, y representa todas las salidas medibles u observaciones del sistema.
- $\mathcal{T}$ es un conjunto del tiempo, y puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$ según el sistema se continuo o discreto en el tiempo.
- $\Phi : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ es la *función de evolución* (*flow* o *iterated map*)que satisface:
  1. Propiedad identidad: $\Phi(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$.
  2. Causalidad (Propiedad de Markov)/Propiedad de semigrupo: $\Phi(t+s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \Phi(t, \Phi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})$, $\forall t, s \in \mathcal{T}$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$.
- $H : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ es la *función de salida* u *observaciones*, que asocia estados internos y entradas a salidas medibles u observables del sistema.

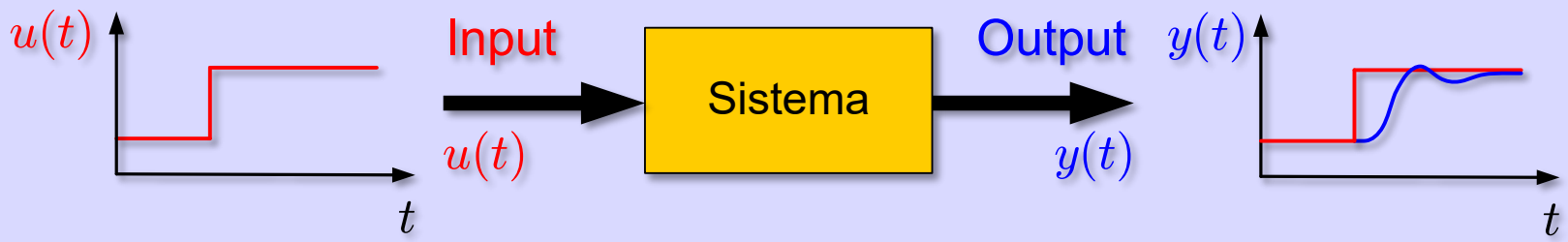
Sistema Dinámico (*input driven dynamical system*)

Referencias clásicas (avanzadas/postgrado):

1. Sontag, E. D. (1998). Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems (2nd ed.). Springer.
2. Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems (3rd ed.). Prentice Hall.
3. Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos (3rd ed.). Elsevier.
4. Slotine, J.-J. E., & Li, W. (1991). Applied Nonlinear Control. Prentice Hall.
5. Brockett, R. W. (1970). Finite Dimensional Linear Systems. Wiley.
6. Isidori, A. (1995). Nonlinear Control Systems (3rd ed.). Springer.

Modelo Matemático de un Sistema Dinámico en el Dominio del Tiempo

Un **modelo matemático** de un sistema dinámico Σ en el *dominio del tiempo* es un sistema de ecuaciones diferenciales, sistema de ecuaciones de diferencias o sistema de ecuaciones algebraicas a partir de los cuales la salida del sistema $y(t)$ puede calcularse una vez conocida la función de entrada $u(t)$ y los estados iniciales x_0.



Nota: Revise el **Anexo 1** sobre **Representación de Sistemas Dinámicos con Modelos Matemáticos de Tiempo** para más información sobre sistemas y su modelación. En este curso no se requerirá modelar sistemas, pero se asumirá que tiene los conocimientos básicos para comprender modelos de sistemas eléctricos, mecánicos, termodinámicos y ecuaciones diferenciales.

Recodatorio de Transformadas de Laplace1/2

☞ Debes saber que...

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \cdots - s^2 x^{(n-3)}(0) - s x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{(escalón unitario)}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{(rampa)}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \quad \text{(exponencial)}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau \quad \text{(ley Integral)}$$

Recodatorio de Transformadas de Laplace2/2

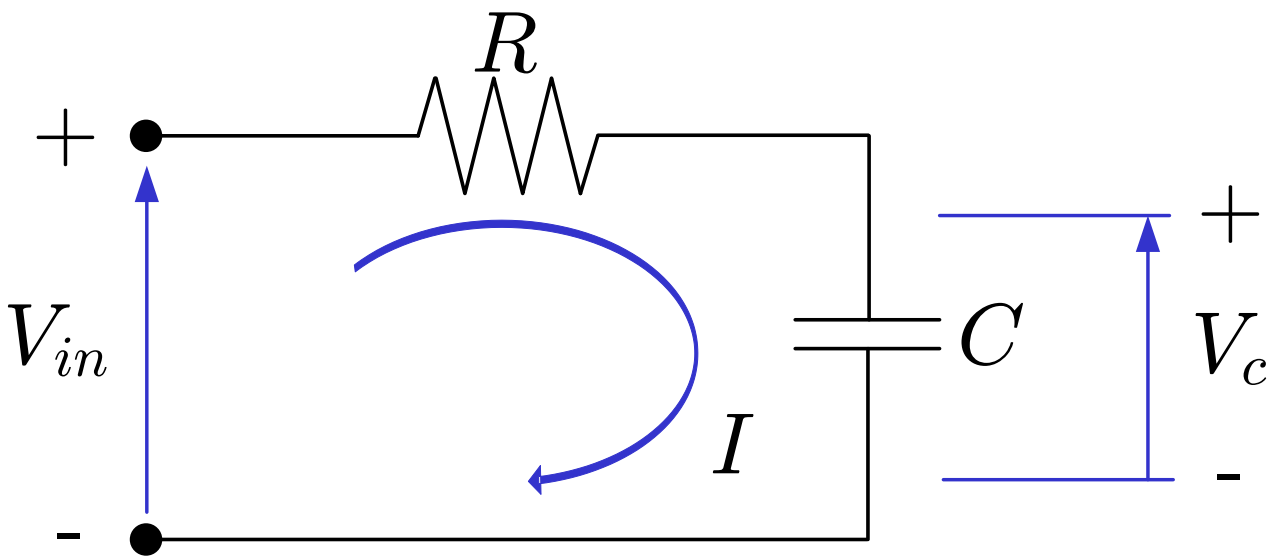
Debes saber que...

Retardo	$f(t-T)u(t-T)$	$F(s)e^{-sT}$
*Teorema del Valor Final (TVF)	$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$	$\lim_{s\to 0} sY(s)$
Teorema del Valor Inicial (TVI)	$y_0 = \lim_{t\to 0} y(t)$	$\lim_{s\to\infty} sY(s)$

*Solo aplicable a sistemas estables, i.e. si $Y(s) = (p(s)/q(s))U(s)$, $U(s)$ debe ser una señal acotada y las raíces λ_i de $q(s) = 0$ debe todas tener parte real negativa (**Re**$(\lambda_i) < 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$)

Nota: Revise el **Anexo 2** sobre **Representación de Sistemas Dinámicos con Modelos Matemáticos en el Dominio de Laplace** para un repaso de conocimientos del curso de Análisis de Señales y Sistemas. En este curso se asume que sabe calcular la transformada de Laplace a funciones y aplicarla a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo: Circuito RC



$$KVL : V_{in} = V_R + V_C = RI + V_C = RC\frac{dV_C}{dt} + V_C$$

Ejemplo: Circuito RC

1. $u = V_{in} \in \mathcal{U}$
2. $y = V_c \in \mathcal{Y}$
3. $x = V_c \in \mathcal{X}$
4. $V_{in} = RI_c + V_c, \quad I_c = C\frac{dV_c}{dt}, \quad \Rightarrow V_{in} = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$
5. $\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = RCsY(s) - RCy(0) + Y(s)$
6. $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{RCs+1}U(s) + \frac{RC}{RCs+1}y(0) \\ &= \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\frac{U_0}{s}\right] + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]U_0 + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \end{aligned}$$
7. $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)U_0 + e^{-\frac{1}{RC}t}y(0).$

Ejemplo: Circuito RC

1. $u = V_{in} \in \mathcal{U}$
2. $y = V_c \in \mathcal{Y}$
3. $x = V_c \in \mathcal{X}$
4. $V_{in} = RI_c + V_c, \quad I_c = C\frac{dV_c}{dt}, \quad \Rightarrow V_{in} = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$
5. $\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = RCsY(s) - RCy(0) + Y(s)$
6. $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{RCs+1}U(s) + \frac{RC}{RCs+1}y(0) \\ &= \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\frac{U_0}{s}\right] + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]U_0 + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \end{aligned}$$
7. $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)U_0 + e^{-\frac{1}{RC}t}y(0).$

Ejemplo: Circuito RC

1. $u = V_{in} \in \mathcal{U}$
2. $y = V_c \in \mathcal{Y}$
3. $x = V_c \in \mathcal{X}$
4. $V_{in} = RI_c + V_c, \quad I_c = C\frac{dV_c}{dt}, \quad \Rightarrow V_{in} = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$
5. $\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = RCsY(s) - RCy(0) + Y(s)$
6. $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{RCs+1}U(s) + \frac{RC}{RCs+1}y(0) \\ &= \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\frac{U_0}{s}\right] + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]U_0 + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \end{aligned}$$
7. $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)U_0 + e^{-\frac{1}{RC}t}y(0).$

Ejemplo: Circuito RC

1. $u = V_{in} \in \mathcal{U}$
2. $y = V_c \in \mathcal{Y}$
3. $x = V_c \in \mathcal{X}$
4. $V_{in} = RI_c + V_c, \quad I_c = C\frac{dV_c}{dt}, \quad \Rightarrow V_{in} = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$
5. $\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = RCsY(s) - RCy(0) + Y(s)$
6. $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{RCs+1}U(s) + \frac{RC}{RCs+1}y(0) \\ &= \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\frac{U_0}{s}\right] + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]U_0 + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \end{aligned}$$
7. $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)U_0 + e^{-\frac{1}{RC}t}y(0).$

Ejemplo: Circuito RC

1. $u = V_{in} \in \mathcal{U}$
2. $y = V_c \in \mathcal{Y}$
3. $x = V_c \in \mathcal{X}$
4. $V_{in} = RI_c + V_c, \quad I_c = C\frac{dV_c}{dt}, \quad \Rightarrow V_{in} = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$
5. $\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = RCsY(s) - RCy(0) + Y(s)$
6. $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{RCs+1}U(s) + \frac{RC}{RCs+1}y(0) \\ &= \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\frac{U_0}{s}\right] + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]U_0 + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \end{aligned}$$
7. $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)U_0 + e^{-\frac{1}{RC}t}y(0).$

Ejemplo: Circuito RC

1. $u = V_{in} \in \mathcal{U}$
2. $y = V_c \in \mathcal{Y}$
3. $x = V_c \in \mathcal{X}$
4. $V_{in} = RI_c + V_c, \quad I_c = C\frac{dV_c}{dt}, \quad \Rightarrow V_{in} = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$
5. $\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = RCsY(s) - RCy(0) + Y(s)$
6. $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{RCs+1}U(s) + \frac{RC}{RCs+1}y(0) \\ &= \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\frac{U_0}{s}\right] + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]U_0 + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \end{aligned}$$
7. $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)U_0 + e^{-\frac{1}{RC}t}y(0).$

Ejemplo: Circuito RC

1. $u = V_{in} \in \mathcal{U}$
2. $y = V_c \in \mathcal{Y}$
3. $x = V_c \in \mathcal{X}$
4. $V_{in} = RI_c + V_c, \quad I_c = C\frac{dV_c}{dt}, \quad \Rightarrow V_{in} = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$
5. $\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = RCsY(s) - RCy(0) + Y(s)$
6. $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{RCs+1}U(s) + \frac{RC}{RCs+1}y(0) \\ &= \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\frac{U_0}{s}\right] + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]U_0 + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}y(0) \end{aligned}$$
7. $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)U_0 + e^{-\frac{1}{RC}t}y(0).$

Ejemplo: Péndulo

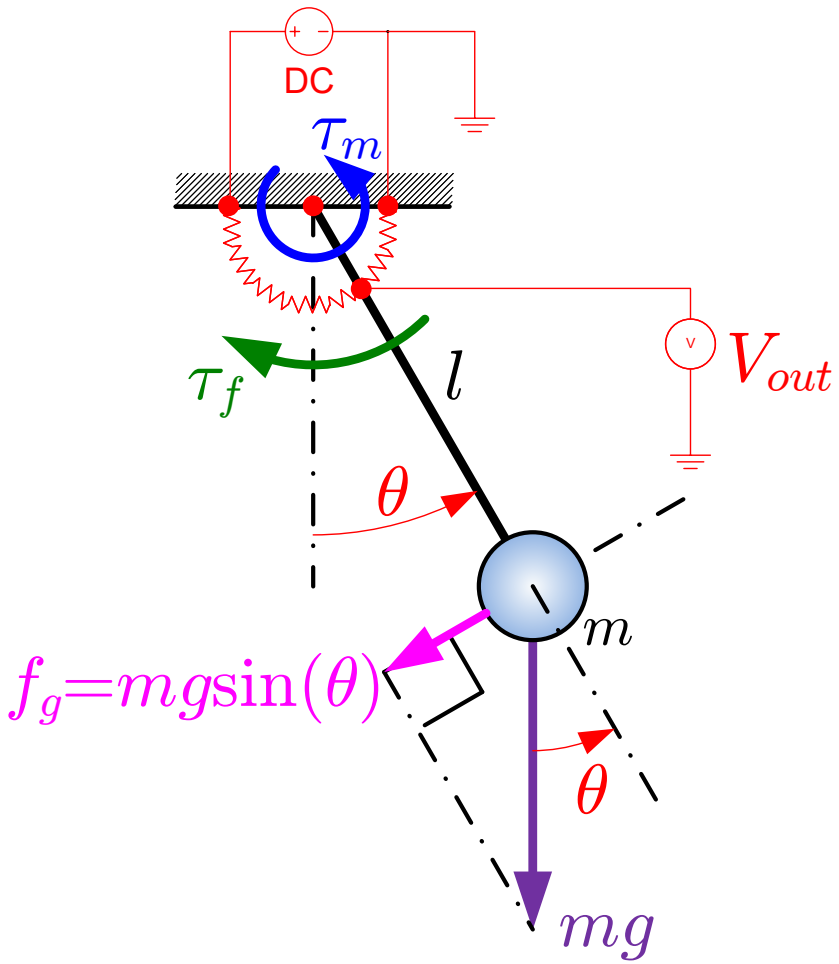


Christiaan Huygens (1629-1695) y su reloj de péndulo (1657).
Oleo (ca. 1870) de Lambertus Lingeman (1829-1894),
Het Tijdmuseum, Países Bajos.
Referencias: Tijmen Jan Moser, Enders Anthony Robinson. *Walking with Christiaan Huygens – From Archimedes' Influence to Unsung Contributions in Modern Science*, Springer Cham, 21 Marzo 2024. https://doi.org/10.1007/978-3-031-46158-3.



Amortiguador de Masa Sintonizada (AMS) en el edificio de la Cámara Chilena de la Construcción (CChC, 2018).
Péndulo de 150 kg con 2 amortiguadores viscosos.
Fuente: Itrend. *Aprende Resiliencia*.
https://aprenderesiliencia.cl/pendulo-antisismico-en-la-cchc/.
Ver también: *Tuned mass damper (TMD), harmonic absorber, shock absorber, vibration isolators, active suspension*.

Ejemplo: Péndulo



$$\sum M_o: \quad J_o\ddot{\theta} \quad = \quad T_m - Tf - T_g \quad \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} = T_m - b\dot{\theta} - lmg\sin(\theta)$$

Ejemplo: Péndulo

1. $u = \tau_m \in \mathcal{U}$
2. $y = \theta \in \mathcal{Y}$
3. $\boldsymbol{x} = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \in \mathcal{X}$
4. $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_m - b\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$
5. $\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_m$
6. $\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + \beta sY(s) - \beta y(0) + \gamma Y(s) = \delta U(s)$
   con $\beta = \frac{b}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$ y $\delta = \frac{1}{ml^2}$.
7.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\delta}{s^2 + \beta s + \gamma}U(s)}_{\text{Zero-state response (respuesta forzada)}} + \underbrace{\frac{(s+\beta)y(0) + y^{(1)}(0)}{s^2 + \beta s + \gamma}}_{\text{Zero-input response (respuesta natural/no-forzada)}}$$

Ejemplo: Péndulo

1. $u = \tau_m \in \mathcal{U}$
2. $y = \theta \in \mathcal{Y}$
3. $\boldsymbol{x} = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \in \mathcal{X}$
4. $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_m - b\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$
5. $\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_m$
6. $\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + \beta sY(s) - \beta y(0) + \gamma Y(s) = \delta U(s)$
   con $\beta = \frac{b}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$ y $\delta = \frac{1}{ml^2}$.
7.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\delta}{s^2 + \beta s + \gamma}U(s)}_{\text{Zero-state response (respuesta forzada)}} + \underbrace{\frac{(s+\beta)y(0) + y^{(1)}(0)}{s^2 + \beta s + \gamma}}_{\text{Zero-input response (respuesta natural/no-forzada)}}$$

Ejemplo: Péndulo

1. $u = \tau_m \in \mathcal{U}$
2. $y = \theta \in \mathcal{Y}$
3. $\boldsymbol{x} = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \in \mathcal{X}$
4. $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_m - b\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$
5. $\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_m$
6. $\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + \beta sY(s) - \beta y(0) + \gamma Y(s) = \delta U(s)$
   con $\beta = \frac{b}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$ y $\delta = \frac{1}{ml^2}$.
7.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\delta}{s^2 + \beta s + \gamma}U(s)}_{\text{Zero-state response (respuesta forzada)}} + \underbrace{\frac{(s+\beta)y(0) + y^{(1)}(0)}{s^2 + \beta s + \gamma}}_{\text{Zero-input response (respuesta natural/no-forzada)}}$$

Ejemplo: Péndulo

1. $u = \tau_m \in \mathcal{U}$
2. $y = \theta \in \mathcal{Y}$
3. $\boldsymbol{x} = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \in \mathcal{X}$
4. $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_m - b\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$
5. $\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_m$
6. $\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + \beta sY(s) - \beta y(0) + \gamma Y(s) = \delta U(s)$
   con $\beta = \frac{b}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$ y $\delta = \frac{1}{ml^2}$.
7.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\delta}{s^2 + \beta s + \gamma}U(s)}_{\text{Zero-state response (respuesta forzada)}} + \underbrace{\frac{(s+\beta)y(0) + y^{(1)}(0)}{s^2 + \beta s + \gamma}}_{\text{Zero-input response (respuesta natural/no-forzada)}}$$

Ejemplo: Péndulo

1. $u = \tau_m \in \mathcal{U}$
2. $y = \theta \in \mathcal{Y}$
3. $\boldsymbol{x} = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \in \mathcal{X}$
4. $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_m - b\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$
5. $\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_m$
6. $\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + \beta sY(s) - \beta y(0) + \gamma Y(s) = \delta U(s)$
   con $\beta = \frac{b}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$ y $\delta = \frac{1}{ml^2}$.
7.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\delta}{s^2 + \beta s + \gamma}U(s)}_{\text{Zero-state response (respuesta forzada)}} + \underbrace{\frac{(s+\beta)y(0) + y^{(1)}(0)}{s^2 + \beta s + \gamma}}_{\text{Zero-input response (respuesta natural/no-forzada)}}$$

Ejemplo: Péndulo

1. $u = \tau_m \in \mathcal{U}$
2. $y = \theta \in \mathcal{Y}$
3. $\boldsymbol{x} = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \in \mathcal{X}$
4. $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_m - b\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$
5. $\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_m$
6. $\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + \beta sY(s) - \beta y(0) + \gamma Y(s) = \delta U(s)$
   con $\beta = \frac{b}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$ y $\delta = \frac{1}{ml^2}$.
7.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\delta}{s^2 + \beta s + \gamma}U(s)}_{\text{Zero-state response (respuesta forzada)}} + \underbrace{\frac{(s+\beta)y(0) + y^{(1)}(0)}{s^2 + \beta s + \gamma}}_{\text{Zero-input response (respuesta natural/no-forzada)}}$$

Ejemplo: Péndulo

1. $u = \tau_m \in \mathcal{U}$
2. $y = \theta \in \mathcal{Y}$
3. $\boldsymbol{x} = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \in \mathcal{X}$
4. $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_m - b\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$
5. $\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_m$
6. $\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + \beta sY(s) - \beta y(0) + \gamma Y(s) = \delta U(s)$
   con $\beta = \frac{b}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$ y $\delta = \frac{1}{ml^2}$.
7.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\delta}{s^2 + \beta s + \gamma}U(s)}_{\text{Zero-state response (respuesta forzada)}} + \underbrace{\frac{(s+\beta)y(0) + y^{(1)}(0)}{s^2 + \beta s + \gamma}}_{\text{Zero-input response (respuesta natural/no-forzada)}}$$

Respuesta dinámica de sistemas lineales

- Existen tres perspectivas desde las cuales se puede estudiar la respuesta dinámica:
  - Análisis en el plano complejo $\mathbb{C}$ o plano-s.
  - Análisis de la respuesta de frecuencia.
  - Espacio de Estado
- La persona bien preparada en ingeniería de control y automatización debe tener un dominio fluido de cada una de ellas, las cuales se estudiarán en la próximas clases.
- En estas clases se verán algunos fundamentos básicos que es necesario conocer antes de estudiar las técnicas de análisis en el plano-s o en el dominio de la frecuencia.

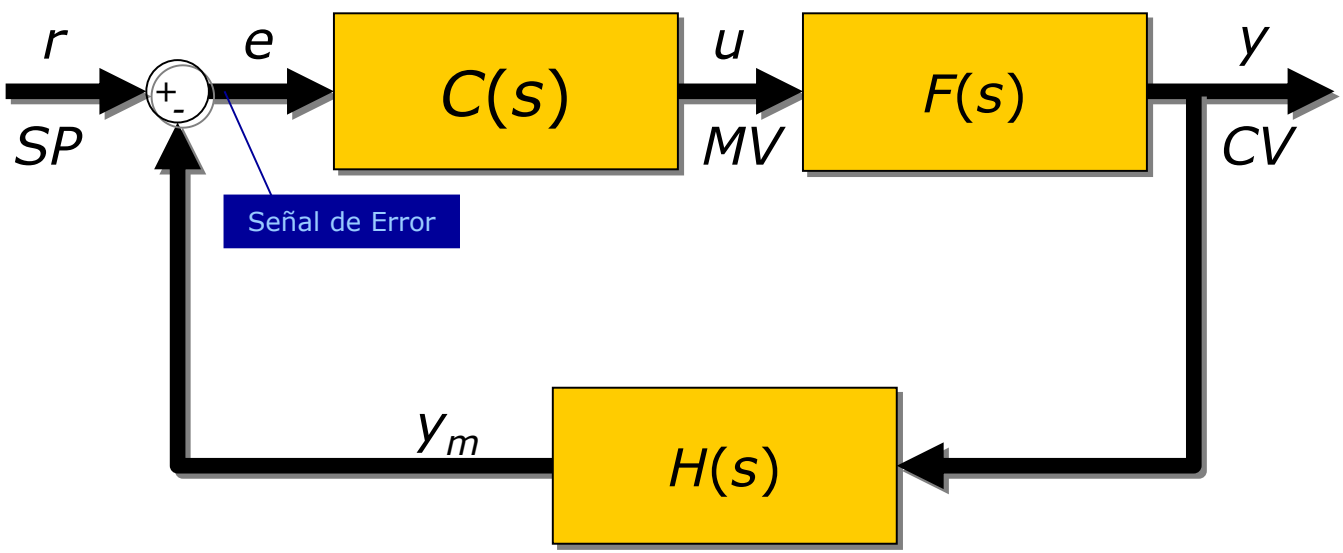
Respuesta dinámica de sistemas lineales

- Existen tres perspectivas desde las cuales se puede estudiar la respuesta dinámica:
  - Análisis en el plano complejo $\mathbb{C}$ o plano-s.
  - Análisis de la respuesta de frecuencia.
  - Espacio de Estado
- La persona bien preparada en ingeniería de control y automatización debe tener un dominio fluido de cada una de ellas, las cuales se estudiarán en la próximas clases.
- En estas clases se verán algunos fundamentos básicos que es necesario conocer antes de estudiar las técnicas de análisis en el plano-s o en el dominio de la frecuencia.

Respuesta dinámica de sistemas lineales

- Existen tres perspectivas desde las cuales se puede estudiar la respuesta dinámica:
  - Análisis en el plano complejo $\mathbb{C}$ o plano-s.
  - Análisis de la respuesta de frecuencia.
  - Espacio de Estado
- La persona bien preparada en ingeniería de control y automatización debe tener un dominio fluido de cada una de ellas, las cuales se estudiarán en la próximas clases.
- En estas clases se verán algunos fundamentos básicos que es necesario conocer antes de estudiar las técnicas de análisis en el plano-s o en el dominio de la frecuencia.

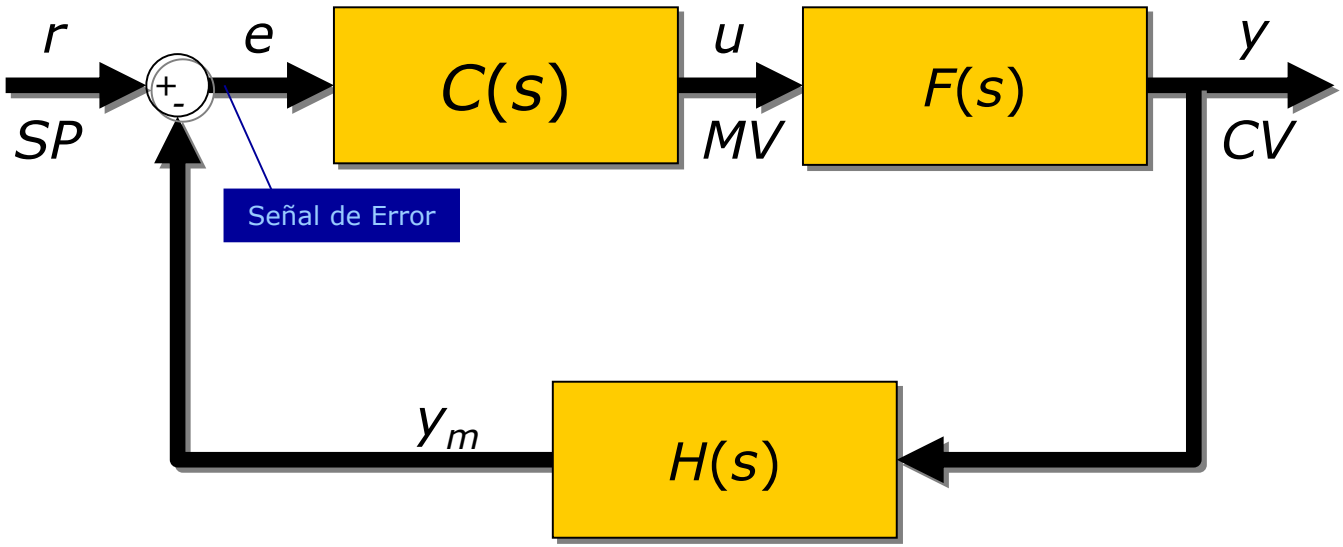
Sistema realimentado (lazo cerrado, *closed-loop CL*)



El **controlador** $C(s)$ puede ser un controlador del tipo proporcional-integral-derivativo (PID):

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de}{dt}$$

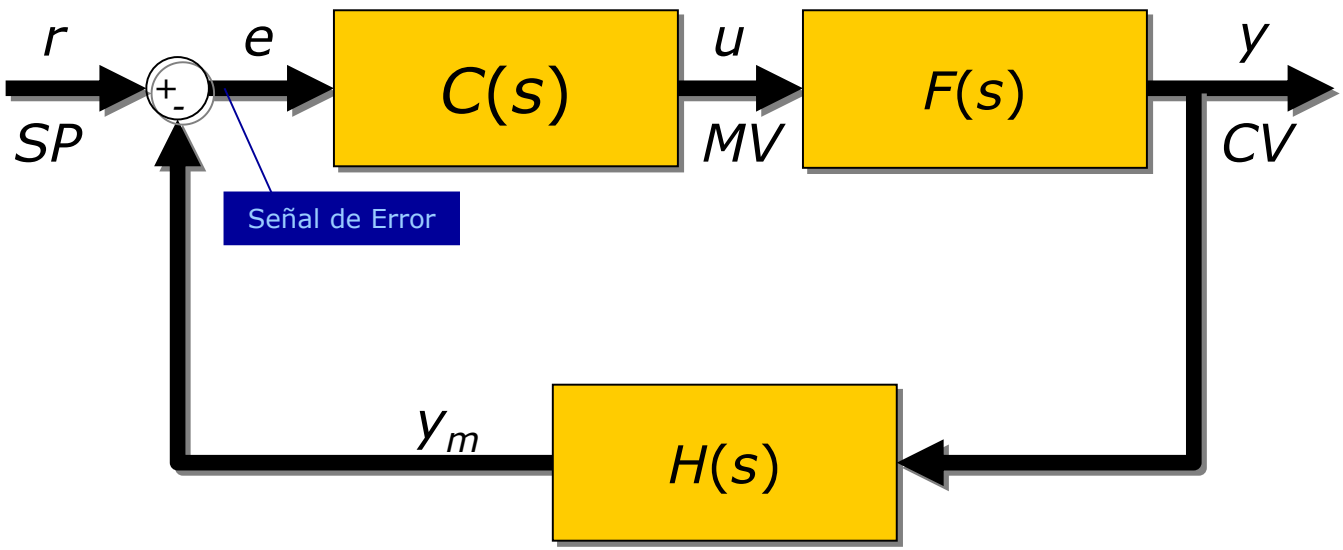
Sistema realimentado (lazo cerrado, *closed-loop CL*)



El **controlador** $C(s)$ puede ser un controlador del tipo proporcional-integral-derivativo (PID):

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de}{dt}$$

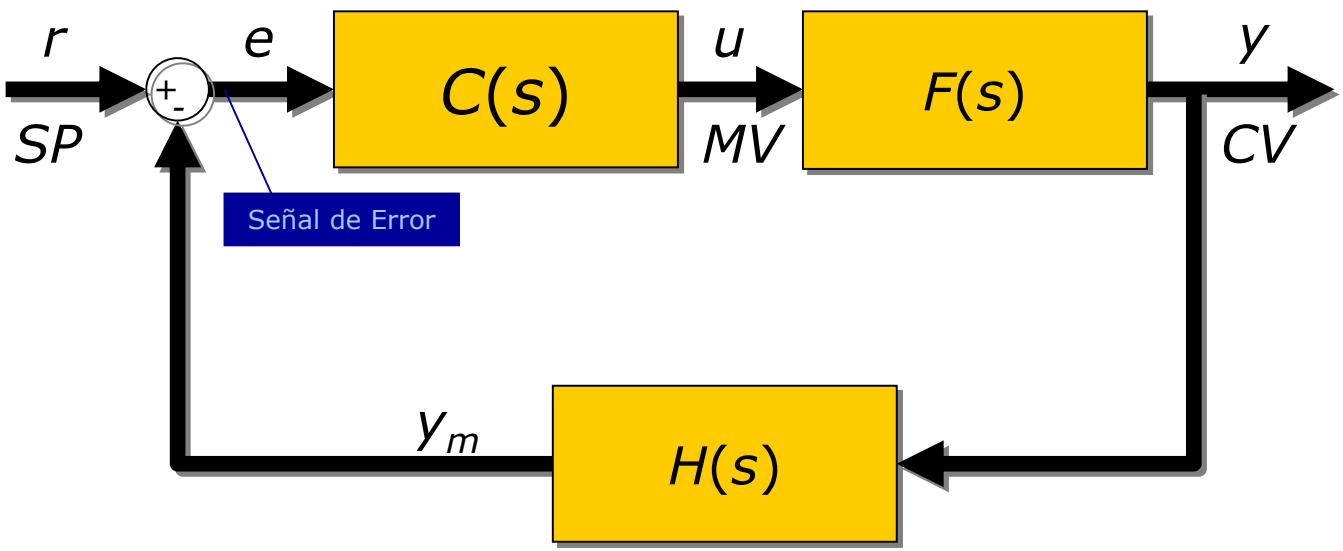
Sistema realimentado (lazo cerrado, *closed-loop CL*)



Como función de transferencia del controlador:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Sistema realimentado (lazo cerrado, *closed-loop CL*)



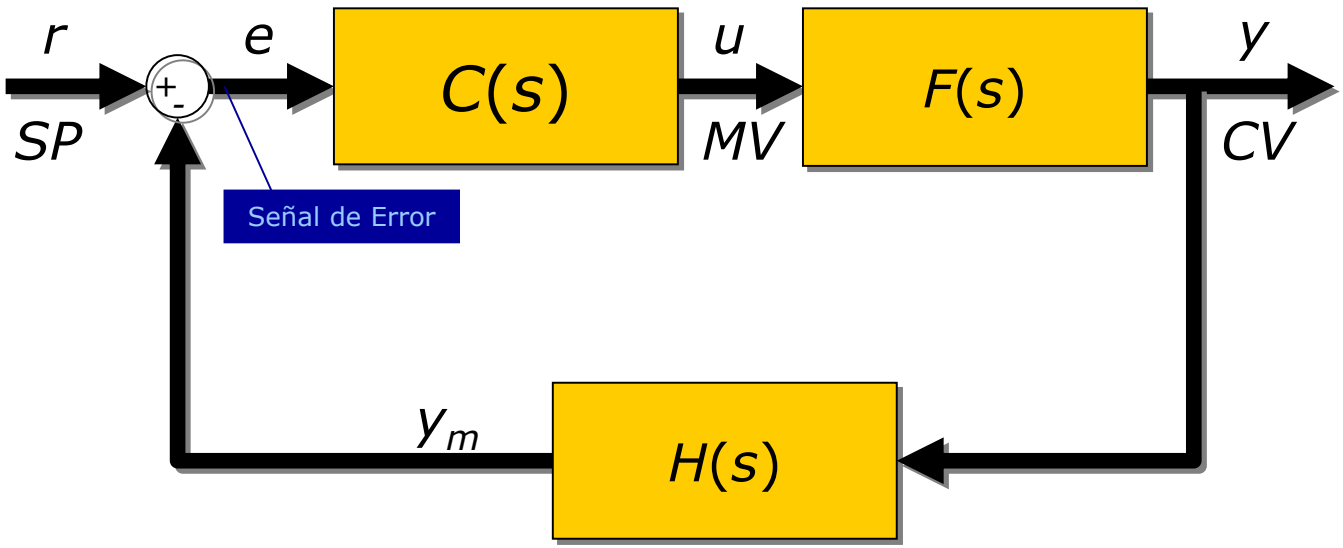
El **sensor** $H(s)$ usualmente es sensor ideal:

$$y_m(t) = y(t)$$

o como función de transferencia del sensor:

$$H(s) = 1$$

Sistema realimentado (lazo cerrado, *closed-loop CL*)



El **sensor** $H(s)$ usualmente es sensor ideal:

$$y_m(t) \quad = \quad y(t)$$

o como función de transferencia del sensor:

$$H(s) \quad = \quad 1$$

Sensor

A veces el sensor tiene retardo, nolinealidades, y otras características que se deben modelar caso a caso.

Por ejemplo, el sensor podría ser:

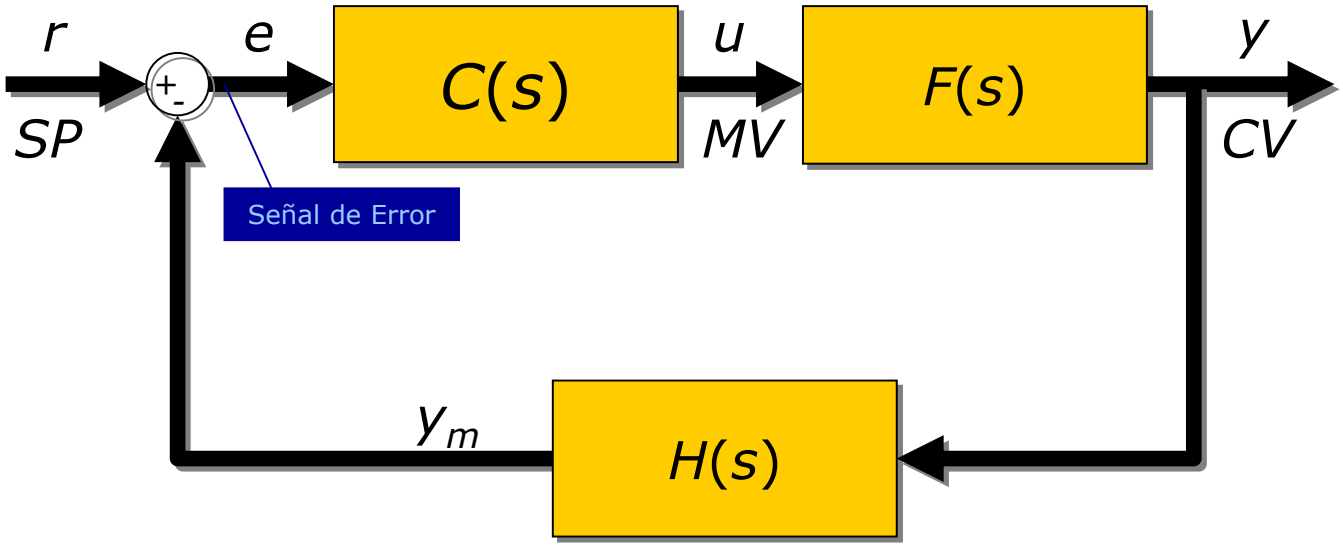
$$y_m(t) = y(t-T) + \alpha \frac{dy}{dt}$$

o como función de transferencia:

$$H(s) = e^{-sT} + \alpha s$$

Más adelante veremos el efecto del retardo y algunos ejemplos en que $H(s) \neq 1$.

Sistema realimentado (lazo cerrado)



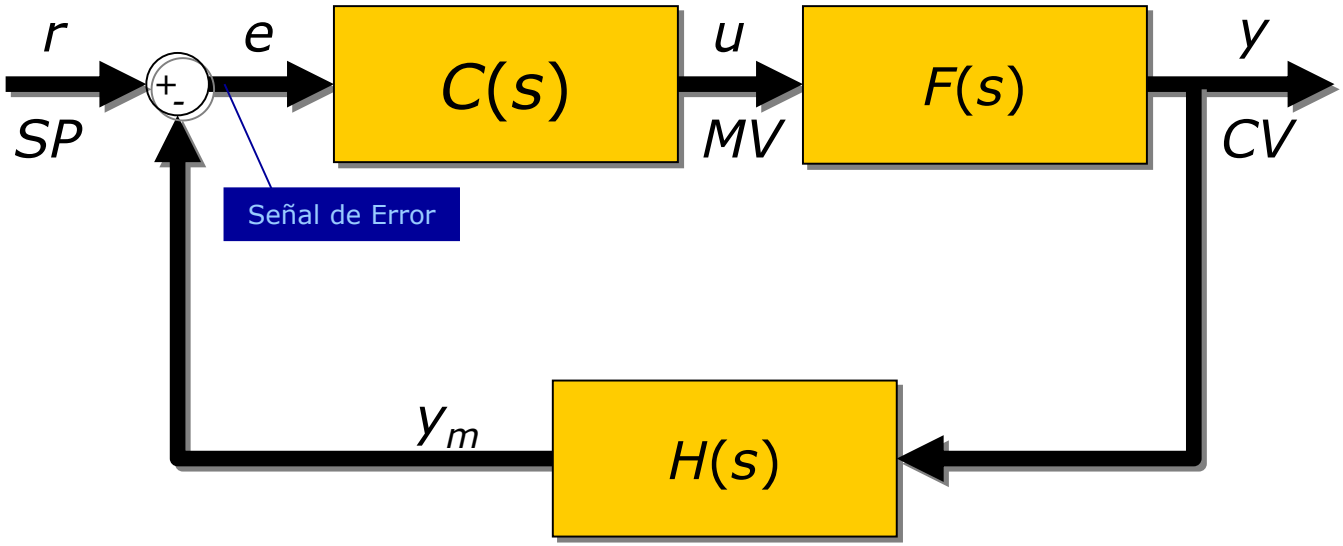
Suponga que la planta F satisface:

$$\Sigma_{OL} \equiv F: \quad \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

y que el controlador $C(s) = K$ y el sensor ideal $H(s) = 1$, luego:

$$u = Ke = K(r - y), \quad y_m = y$$

Sistema realimentado (lazo cerrado)



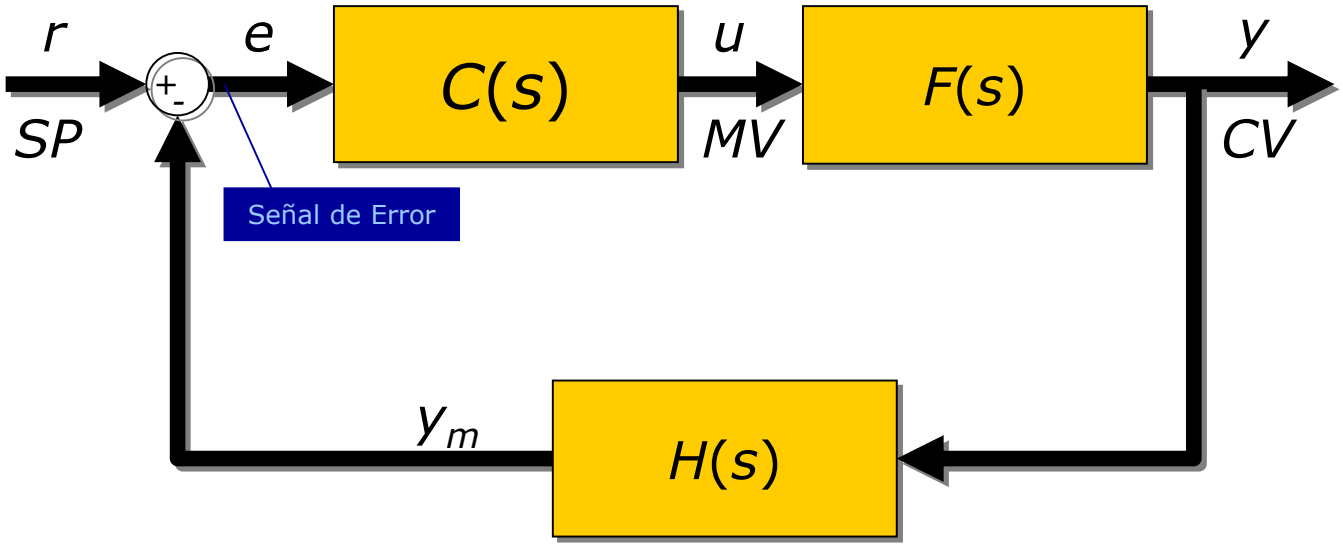
Suponga que la planta F satisface:

$$\Sigma_{OL} \equiv F: \quad \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

y que el controlador $C(s) = K$ y el sensor ideal $H(s) = 1$, luego:

$$u = Ke = K(r - y), \quad y_m = y$$

Sistema realimentado (lazo cerrado)



Suponga que la planta F satisface:

$$\Sigma_{OL} \equiv F: \quad \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

y que el controlador $C(s) = K$ y el sensor ideal $H(s) = 1$, luego:

$$u = Ke = K(r - y), \quad y_m = y$$

Sistema realimentado (lazo cerrado)

De esta forma el sistema en lazo cerrado queda:

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m K \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + b_1 K \frac{dr}{dt} + b_0 K r$$
$$- b_m K \frac{d^m y}{dt^m} - \cdots - b_1 K \frac{dy}{dt} - b_0 K y$$

Reordenando Σ_{CL}:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + (a_m + K b_m) \frac{d^m y}{dt^m} + \cdots + (a_1 + K b_1) \frac{dy}{dt} + (a_0 + K b_0) y =$$
$$K b_m \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + K b_1 \frac{dr}{dt} + K b_0 r$$

Aplicando $\mathcal{L}$ (asumiendo condiciones iniciales cero):

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i + K \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) Y(s) = \left(K \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) R(s)$$

Sistema realimentado (lazo cerrado)

De esta forma el sistema en lazo cerrado queda:

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m K \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + b_1 K \frac{dr}{dt} + b_0 K r$$
$$- b_m K \frac{d^m y}{dt^m} - \cdots - b_1 K \frac{dy}{dt} - b_0 K y$$

Reordenando Σ_{CL}:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + (a_m + K b_m) \frac{d^m y}{dt^m} + \cdots + (a_1 + K b_1) \frac{dy}{dt} + (a_0 + K b_0) y =$$
$$K b_m \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + K b_1 \frac{dr}{dt} + K b_0 r$$

Aplicando $\mathcal{L}$ (asumiendo condiciones iniciales cero):

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i + K \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) Y(s) = \left(K \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) R(s)$$

Sistema realimentado (lazo cerrado)

De esta forma el sistema en lazo cerrado queda:

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m K \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + b_1 K \frac{dr}{dt} + b_0 K r - b_m K \frac{d^m y}{dt^m} - \cdots - b_1 K \frac{dy}{dt} - b_0 K y$$

Reordenando Σ_{CL}:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + (a_m + K b_m) \frac{d^m y}{dt^m} + \cdots + (a_1 + K b_1) \frac{dy}{dt} + (a_0 + K b_0) y = K b_m \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + K b_1 \frac{dr}{dt} + K b_0 r$$

Aplicando $\mathcal{L}$ (asumiendo condiciones iniciales cero):

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i + K \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) Y(s) = \left(K \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) R(s)$$

Sistema en lazo abierto (*open-loop OL*)

Por otro lado, Σ_{OL}:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Aplicando $\mathcal{L}$ (asumiendo condiciones iniciales cero):

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) U(s)$$

Sistema en lazo abierto (*open-loop OL*)

Por otro lado, Σ_{OL}:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Aplicando $\mathcal{L}$ (asumiendo condiciones iniciales cero):

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) U(s)$$

Función de transferencia del lazo abierto

Por lo anterior, la **función de transferencia de lazo abierto** es:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i} = \frac{p(s)}{q(s)},$$

donde el numerador se define como:

$$p(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i,$$

mientras que el denominador o **ecuación característica** del lazo abierto se define como:

$$q(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i.$$

Función de transferencia del lazo abierto

Por lo anterior, la **función de transferencia de lazo abierto** es:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i} = \frac{p(s)}{q(s)},$$

donde el numerador se define como:

$$p(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i,$$

mientras que el denominador o **ecuación característica** del lazo abierto se define como:

$$q(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i.$$

Función de transferencia del lazo abierto

Por lo anterior, la **función de transferencia de lazo abierto** es:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i} = \frac{p(s)}{q(s)},$$

donde el numerador se define como:

$$p(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i,$$

mientras que el denominador o **ecuación característica** del lazo abierto se define como:

$$q(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i.$$

Función de transferencia del sistema realimentado

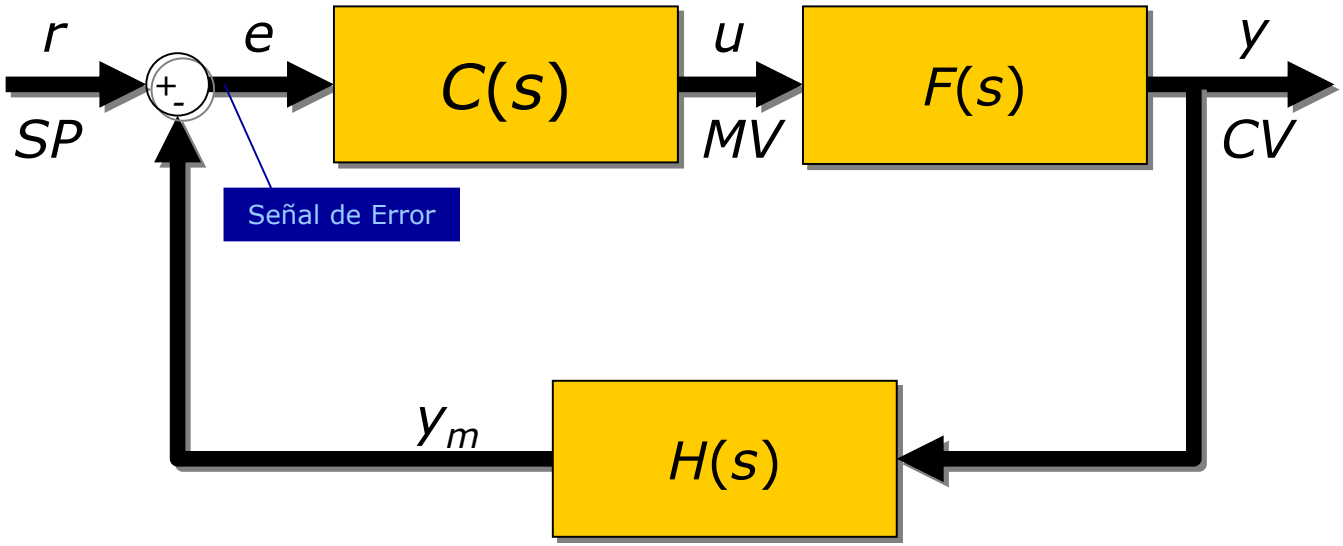
Empleando las definiciones anteriores es fácil ver que la **función de transferencia del lazo cerrado** está dada por:

$$\overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i + K\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}$$

$$= \frac{Kp(s)}{q(s) + Kp(s)}$$

$$= \frac{Kp(s)/q(s)}{1 + Kp(s)/q(s)} = \boxed{\frac{KF(s)}{1 + KF(s)}}$$

Función de transferencia del sistema realimentado



En un caso más general, la **función de transferencia de lazo cerrado** se puede obtener directamente del diagrama de bloques notando que:

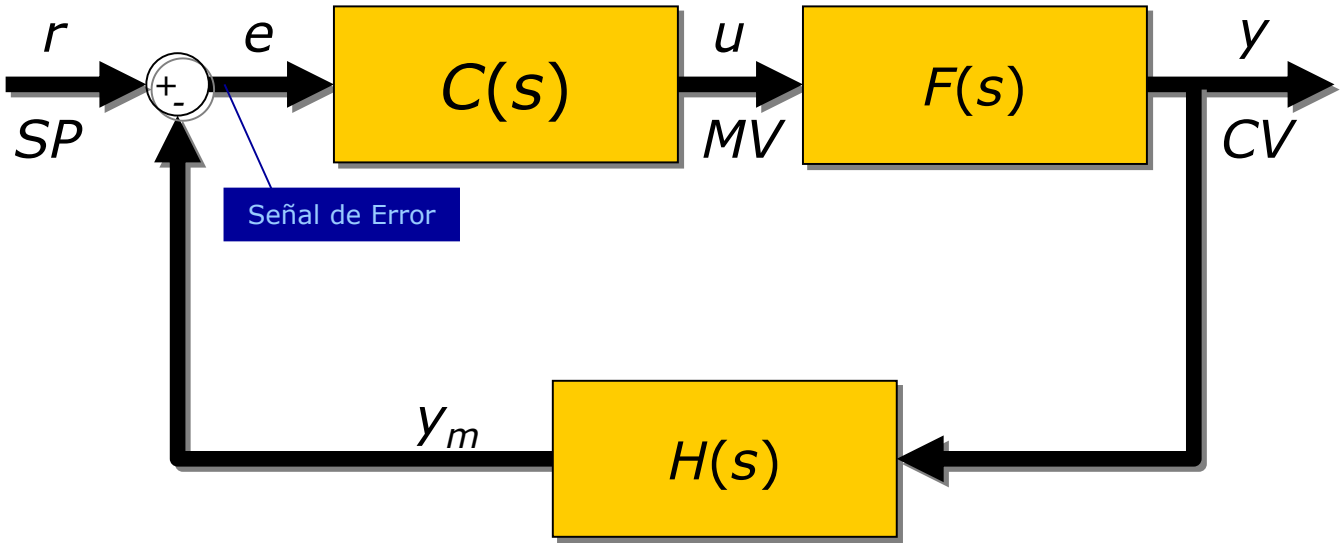
$$Y(s) = F(s)U(s)$$

$$U(s) = C(s)E(s) = C(s)(R(s) - Y_m(s)) = C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Función de transferencia del sistema realimentado



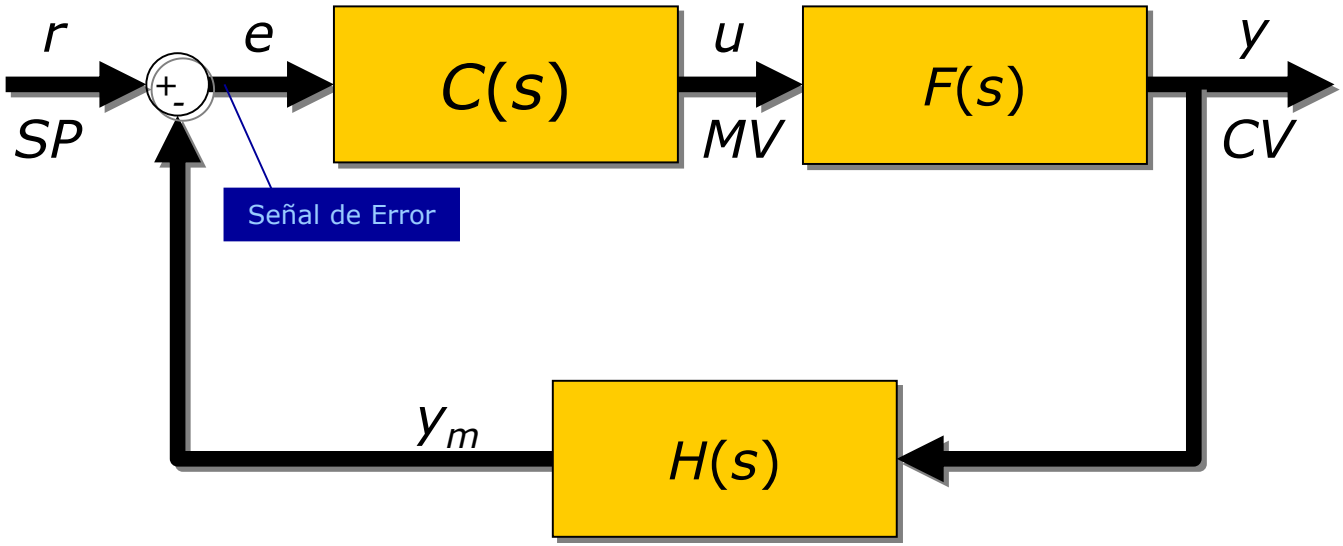
En un caso más general, la **función de transferencia de lazo cerrado** se puede obtener directamente del diagrama de bloques notando que:

$$Y(s) = F(s)U(s)$$
$$U(s) = C(s)E(s) = C(s)(R(s) - Y_m(s)) = C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Función de transferencia del sistema realimentado



En un caso más general, la **función de transferencia de lazo cerrado** se puede obtener directamente del diagrama de bloques notando que:

$$Y(s) = F(s)U(s)$$
$$U(s) = C(s)E(s) = C(s)(R(s) - Y_m(s)) = C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Función de transferencia del sistema realimentado

Luego, la **función de transferencia de lazo cerrado** es:

$$Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

$$\Rightarrow \; Y(s)[1 + C(s)H(s)F(s)] = F(s)C(s)R(s)$$

$$\Rightarrow \; \overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)}$$

Si asumimos nuevamente que $C(s) = K$ y $H(s) = 1$ se obtiene el mismo resultado. ¡Como era de esperarse!

$$\overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)}$$

Función de transferencia del sistema realimentado

Luego, la **función de transferencia de lazo cerrado** es:

$$Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$
$$\Rightarrow \; Y(s)[1 + C(s)H(s)F(s)] = F(s)C(s)R(s)$$
$$\Rightarrow \quad \overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)}$$

Si asumimos nuevamente que $C(s) = K$ y $H(s) = 1$ se obtiene el mismo resultado. ¡Como era de esperarse!

$$\overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)}$$

Función de transferencia del sistema realimentado

Luego, la **función de transferencia de lazo cerrado** es:

$$Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$
$$\Rightarrow \; Y(s)[1 + C(s)H(s)F(s)] = F(s)C(s)R(s)$$
$$\Rightarrow \; \boxed{\overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)}}$$

Si asumimos nuevamente que $C(s) = K$ y $H(s) = 1$ se obtiene el mismo resultado. ¡Como era de esperarse!

$$\overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)}$$

Función de transferencia del sistema realimentado

Luego, la **función de transferencia de lazo cerrado** es:

$$
\begin{aligned}
& Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)] \\
\Rightarrow\ & Y(s)[1 + C(s)H(s)F(s)] = F(s)C(s)R(s) \\
\Rightarrow\ & \boxed{\overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)}}
\end{aligned}
$$

Si asumimos nuevamente que $C(s) = K$ y $H(s) = 1$ se obtiene el mismo resultado. ¡Como era de esperarse!

$$
\overline{F}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)}
$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ \bullet\ n \text{ raíces } \lambda_i(a_n, \ldots, a_1, a_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m + Kb_m)s^m + (a_{m-1} + Kb_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 + Kb_1)s + (a_0 + Kb_0) \\ \bullet\ n \text{ raíces } \bar{\lambda}_i(a_n, \ldots, a_1, a_0; b_m, \ldots, b_1, b_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- En Σ_{CL}, $\bar{q}(s), \bar{y}(t), \bar{\lambda}_i(K)$ dependen de K.
- Conocer las raices $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en función de K es clave para conocer la respuesta en el tiempo $\bar{y}(t)$ y en frecuencia (afectada por $\bar{q}(s)$).
- El control K permite alterar, e idealmente controlar, la respuesta en el tiempo y en frecuencia del sistema.
- En Σ_{OL} no es posible alterar la respuesta natural (no forzada, $u = 0$) del sistema, mientras que en Σ_{CL} si es posible alterar la respuesta natural a través de K.
- Si $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_i) < 0 \Rightarrow$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la respuesta natural es estable porque no diverge (en particular tiende a cero). ¡Una respuesta natural estable es ideal para hacer que la respuesta general del sistema en lazo cerrado sea estable, simplemente colocando $u = 0$!

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- En Σ_{CL}, $\bar{q}(s), \bar{y}(t), \bar{\lambda}_i(K)$ dependen de K.
- Conocer las raices $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en función de K es clave para conocer la respuesta en el tiempo $\bar{y}(t)$ y en frecuencia (afectada por $\bar{q}(s)$).
- El control K permite alterar, e idealmente controlar, la respuesta en el tiempo y en frecuencia del sistema.
- En Σ_{OL} no es posible alterar la respuesta natural (no forzada, $u = 0$) del sistema, mientras que en Σ_{CL} si es posible alterar la respuesta natural a través de K.
- Si $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_i) < 0 \Rightarrow$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la respuesta natural es estable porque no diverge (en particular tiende a cero). ¡Una respuesta natural estable es ideal para hacer que la respuesta general del sistema en lazo cerrado sea estable, simplemente colocando $u = 0$!

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- En Σ_{CL}, $\bar{q}(s), \bar{y}(t), \bar{\lambda}_i(K)$ dependen de K.
- Conocer las raices $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en función de K es clave para conocer la respuesta en el tiempo $\bar{y}(t)$ y en frecuencia (afectada por $\bar{q}(s)$).
- El control K permite alterar, e idealmente controlar, la respuesta en el tiempo y en frecuencia del sistema.
- En Σ_{OL} no es posible alterar la respuesta natural (no forzada, $u = 0$) del sistema, mientras que en Σ_{CL} si es posible alterar la respuesta natural a través de K.
- Si $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_i) < 0 \Rightarrow$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la respuesta natural es estable porque no diverge (en particular tiende a cero). ¡Una respuesta natural estable es ideal para hacer que la respuesta general del sistema en lazo cerrado sea estable, simplemente colocando $u = 0$!

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- En Σ_{CL}, $\bar{q}(s), \bar{y}(t), \bar{\lambda}_i(K)$ dependen de K.
- Conocer las raices $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en función de K es clave para conocer la respuesta en el tiempo $\bar{y}(t)$ y en frecuencia (afectada por $\bar{q}(s)$).
- El control K permite alterar, e idealmente controlar, la respuesta en el tiempo y en frecuencia del sistema.
- En Σ_{OL} no es posible alterar la respuesta natural (no forzada, $u = 0$) del sistema, mientras que en Σ_{CL} si es posible alterar la respuesta natural a través de K.
- Si $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_i) < 0 \Rightarrow$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la respuesta natural es estable porque no diverge (en particular tiende a cero). ¡Una respuesta natural estable es ideal para hacer que la respuesta general del sistema en lazo cerrado sea estable, simplemente colocando $u = 0$!

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- En Σ_{CL}, $\bar{q}(s), \bar{y}(t), \bar{\lambda}_i(K)$ dependen de K.
- Conocer las raices $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en función de K es clave para conocer la respuesta en el tiempo $\bar{y}(t)$ y en frecuencia (afectada por $\bar{q}(s)$).
- El control K permite alterar, e idealmente controlar, la respuesta en el tiempo y en frecuencia del sistema.
- En Σ_{OL} no es posible alterar la respuesta natural (no forzada, $u = 0$) del sistema, mientras que en Σ_{CL} si es posible alterar la respuesta natural a través de K.
- Si $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_i) < 0 \Rightarrow$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la respuesta natural es estable porque no diverge (en particular tiende a cero). ¡Una respuesta natural estable es ideal para hacer que la respuesta general del sistema en lazo cerrado sea estable, simplemente colocando $u = 0$!

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- En Σ_{CL}, $\bar{q}(s), \bar{y}(t), \bar{\lambda}_i(K)$ dependen de K.
- Conocer las raices $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en función de K es clave para conocer la respuesta en el tiempo $\bar{y}(t)$ y en frecuencia (afectada por $\bar{q}(s)$).
- El control K permite alterar, e idealmente controlar, la respuesta en el tiempo y en frecuencia del sistema.
- En Σ_{OL} no es posible alterar la respuesta natural (no forzada, $u = 0$) del sistema, mientras que en Σ_{CL} si es posible alterar la respuesta natural a través de K.
- Si $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_i) < 0 \Rightarrow$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la respuesta natural es estable porque no diverge (en particular tiende a cero). ¡Una respuesta natural estable es ideal para hacer que la respuesta general del sistema en lazo cerrado sea estable, simplemente colocando $u = 0$!

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- Los λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ definen tiempos de respuesta o modos de vibración del sistema. En esencia definen el comportamiento del sistema. . . son como el ADN o una huella digital. . . *son el alma del sistema*. . .
- *Si el alma es la raíz del ser*, es razonable que λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ se llamen **raíces** de la ecuación *característica*. Por todos lados nos están diciendo: "Ojo!!! raíces – ecuación característica – comportamiento – alma" .
- ¡¡¡Dos sistemas son equivalentes si las raíces del numerador y denominador son las mismas. . . *tienen la misma alma, el mismo espíritu, aunque el cuerpo que los contiene se vea distinto*!!!.

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- Los λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ definen tiempos de respuesta o modos de vibración del sistema. En esencia definen el comportamiento del sistema. . . son como el ADN o una huella digital. . . *son el alma del sistema*. . .
- *Si el alma es la raíz del ser*, es razonable que λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ se llamen **raíces** de la ecuación *característica*. Por todos lados nos están diciendo: "Ojo!!! raíces – ecuación característica – comportamiento – alma" .
- ¡¡¡Dos sistemas son equivalentes si las raíces del numerador y denominador son las mismas. . . *tienen la misma alma, el mismo espíritu, aunque el cuerpo que los contiene se vea distinto*!!!.

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

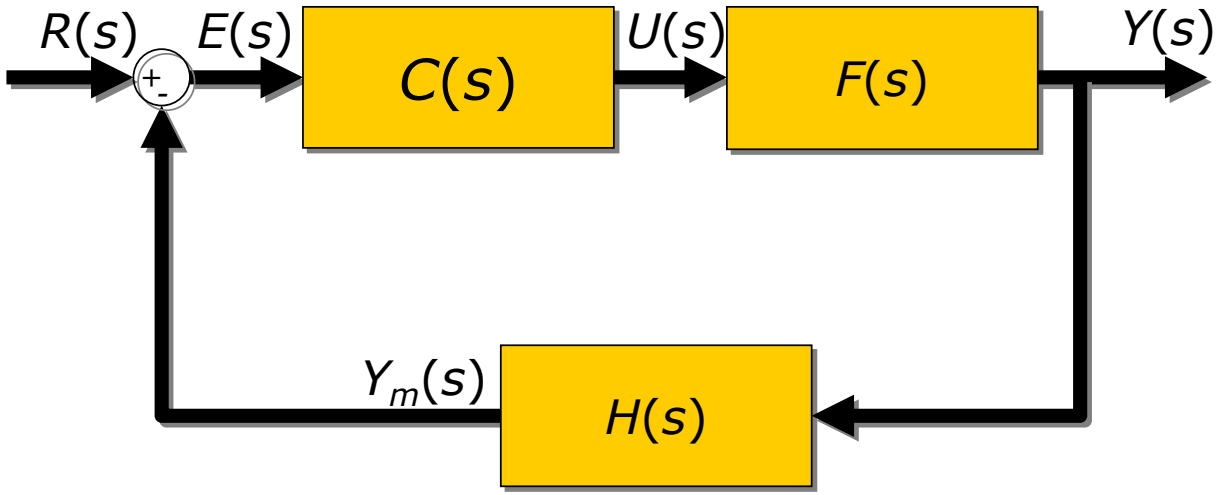
- Los λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ definen tiempos de respuesta o modos de vibración del sistema. En esencia definen el comportamiento del sistema. . . son como el ADN o una huella digital. . . *son el alma del sistema*. . .
- *Si el alma es la raíz del ser*, es razonable que λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ se llamen **raíces** de la ecuación *característica*. Por todos lados nos están diciendo: "Ojo!!! raíces – ecuación característica – comportamiento – alma" .
- ¡¡¡Dos sistemas son equivalentes si las raíces del numerador y denominador son las mismas. . . *tienen la misma alma, el mismo espíritu, aunque el cuerpo que los contiene se vea distinto*!!!.

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- Los λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ definen tiempos de respuesta o modos de vibración del sistema. En esencia definen el comportamiento del sistema. . . son como el ADN o una huella digital. . . *son el alma del sistema*. . .
- *Si el alma es la raíz del ser*, es razonable que λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ se llamen **raíces** de la ecuación *característica*. Por todos lados nos están diciendo: "Ojo!!! raíces – ecuación característica – comportamiento – alma" .
- ¡¡¡Dos sistemas son equivalentes si las raíces del numerador y denominador son las mismas. . . *tienen la misma alma, el mismo espíritu, aunque el cuerpo que los contiene se vea distinto*!!!.

Error de control en régimen permanente



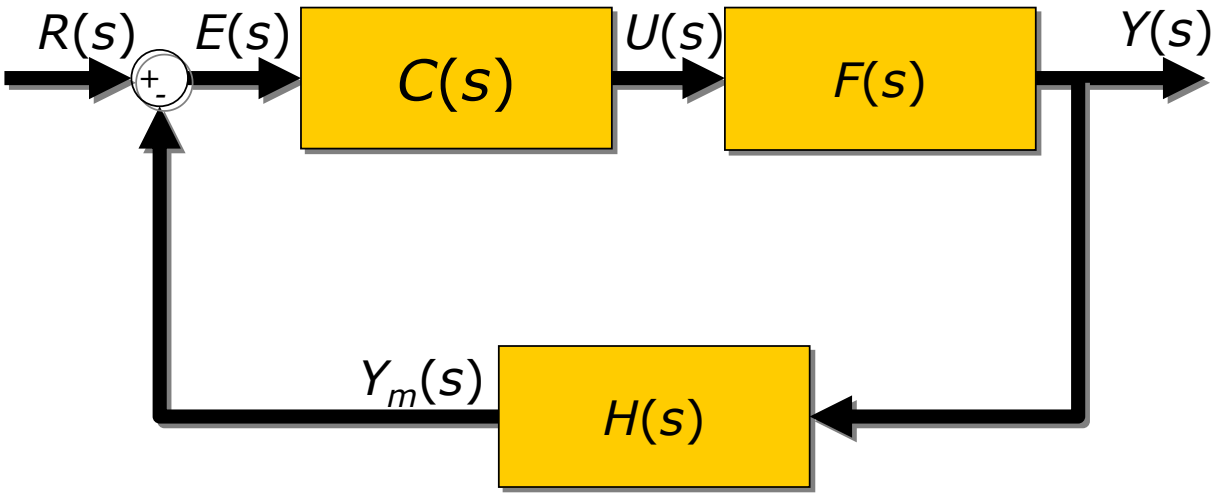
El **error de control** está dado por:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \qquad \wedge \qquad Y(s) = C(s)F(s)E(s)$$

$$\therefore E(s) = R(s) - H(s)C(s)F(s)E(s)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E(s) = \frac{1}{1 + C(s)F(s)H(s)} R(s)}$$

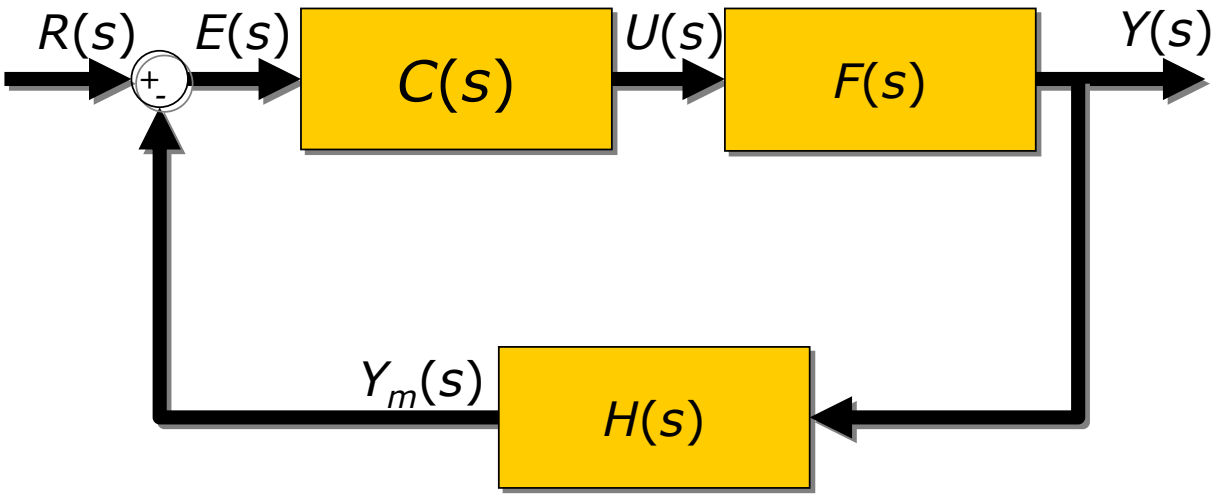
Error de control en régimen permanente



Luego, la **función de transferencia del error** es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + C(s)F(s)H(s)}$$

Error de control en régimen permanente

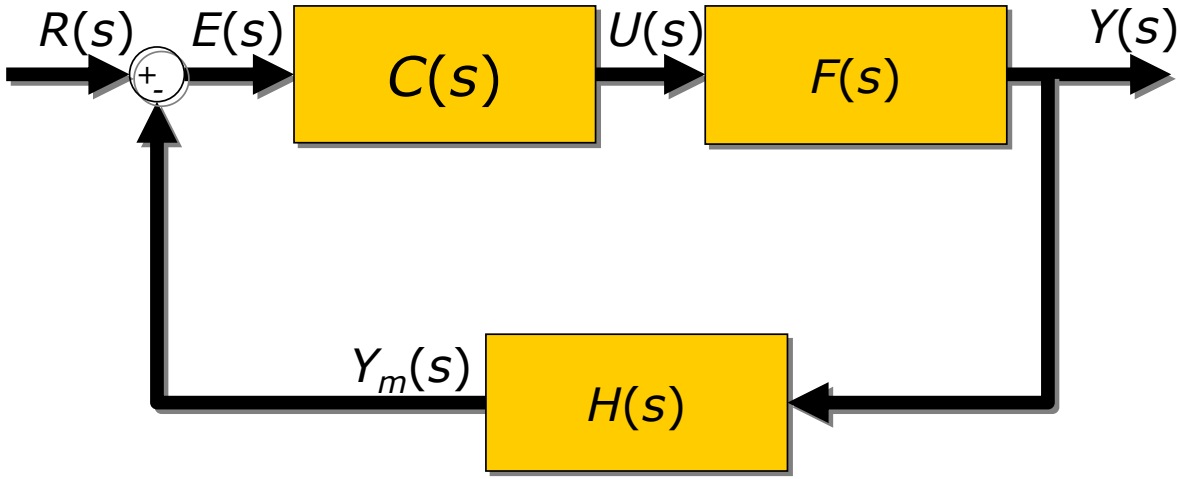


El **error en régimen permanente** vendrá dado por:

$$\underbrace{e_{ss}}_{steady\ state} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+C(s)F(s)H(s)}R(s)$$

Recordar: *Válido sólo para sistemas estables.*

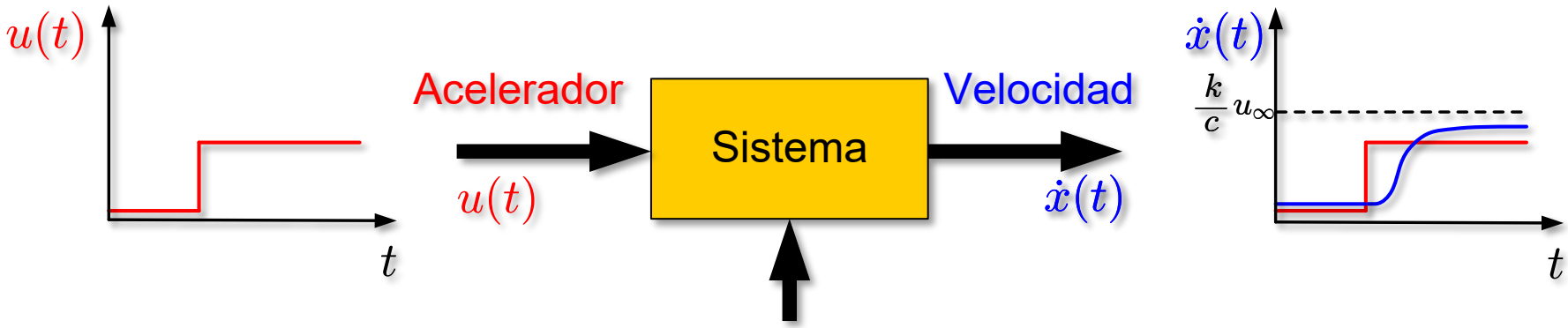
Error de control en régimen permanente



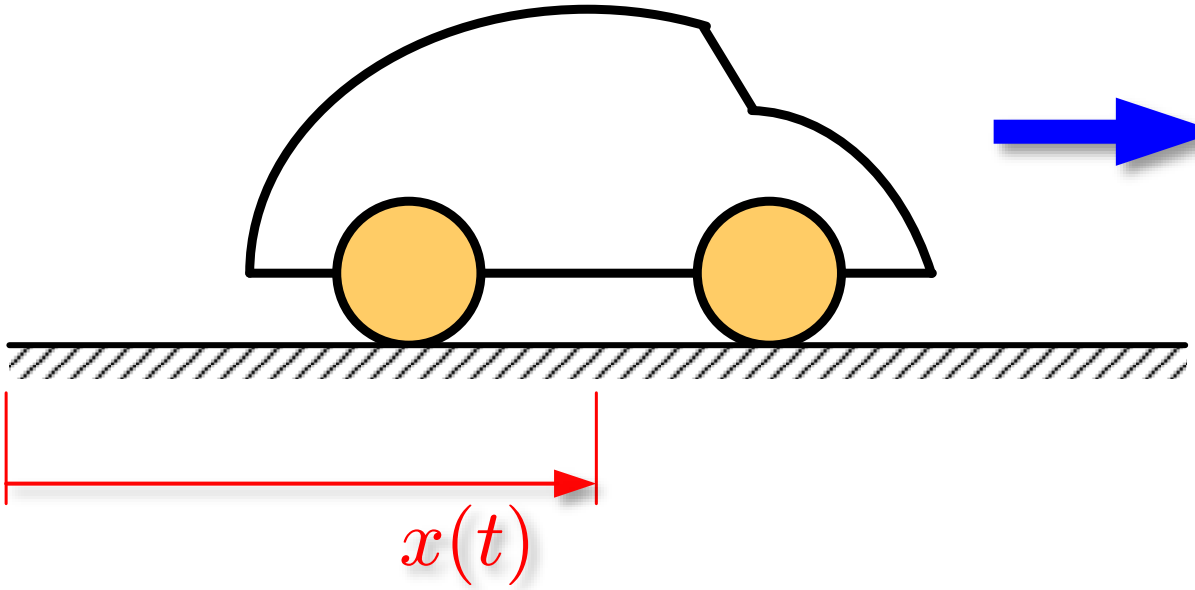
Otra manera de obtener la **función de transferencia del error** con respecto a la referencia:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) \\ &= R(s) - H(s)\frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)}R(s) \\ &= \frac{1}{1 + C(s)F(s)H(s)}R(s) \end{aligned}$$

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

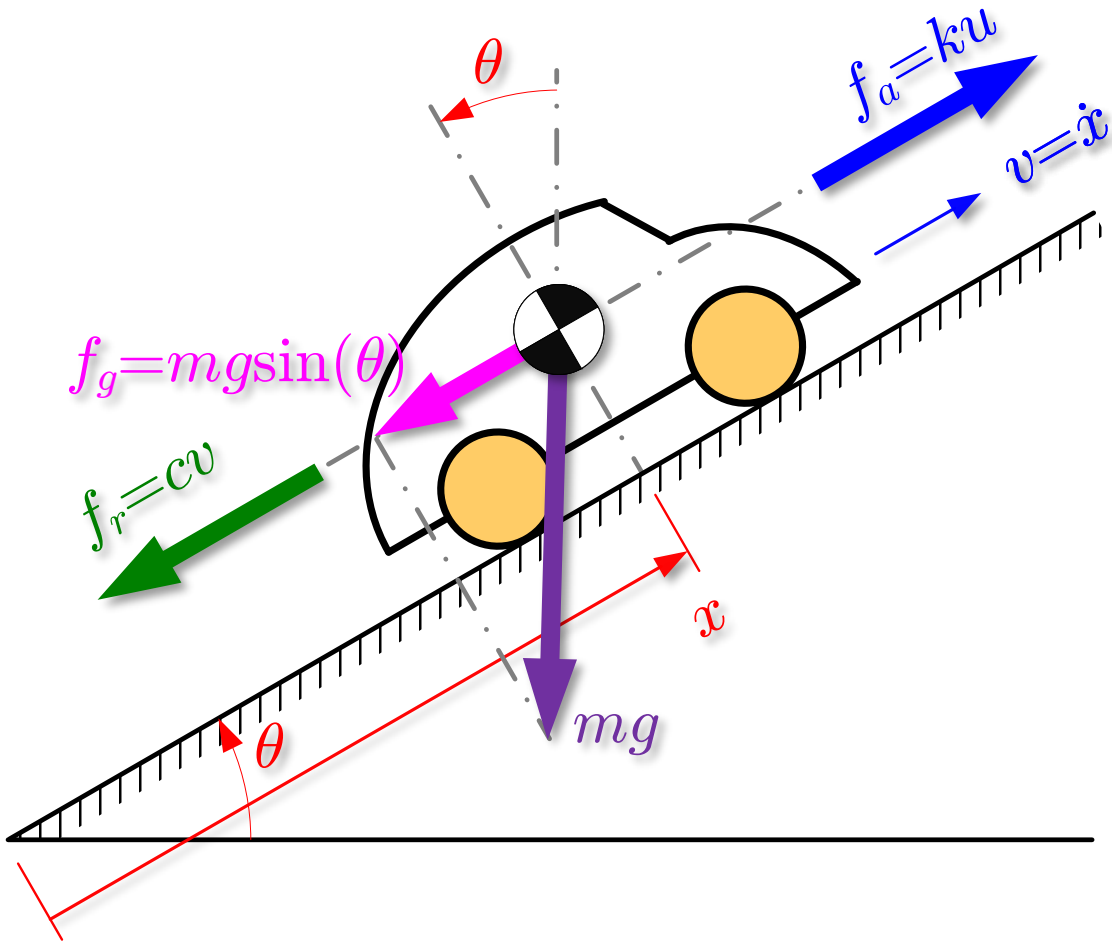


Pendientes, tipo de camino, viento, etc.



$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = v(t)$$

Ejemplo: Vehículo con Perturbación



$$\sum F_{x^v} : \; m\dot{v} = f_a - f_r - f_g = ku - cv - mg\sin(\theta)$$

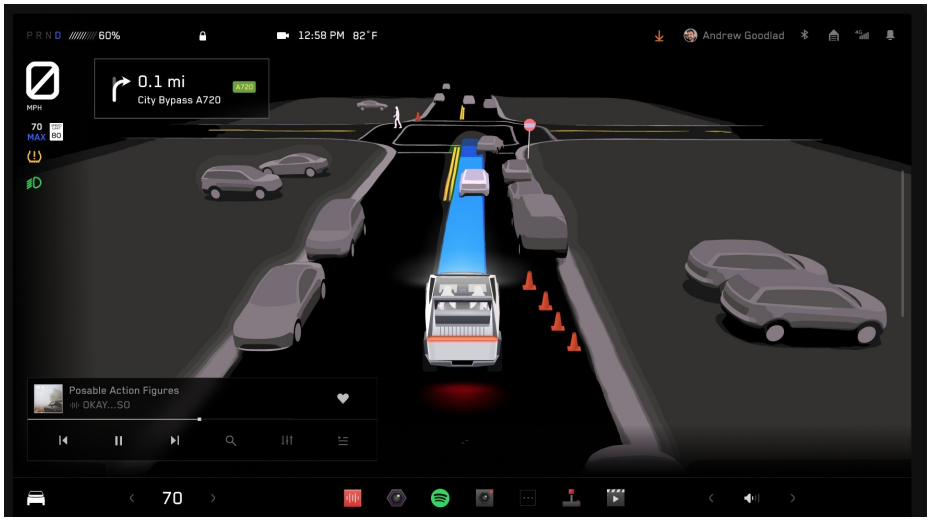
Ejemplo: Vehículo con Perturbación



Cybetruck de Tesla posee un sistema *autopilot* capaz de mantener la velocidad como un control tradicional de velocidad crucero, pero atento al tráfico (*Traffic-Aware Cruise Control*, TACC), capaz de reducir la velocidad o acelerar según el tráfico circundante.

https://robbreport.com/motors/cars/drive-review-tesla-cybertruck-1235600135/

https://www.tesla.com/ownersmanual/cybertruck/en_us/GUID-20F2262F-CDF6-408E-A752-2AD9B0CC2FD6.html



Cybetruck de Tesla posee un sistema *lane assist* capaz de mantener vehículo dentro del carril a partir de la detección de las líneas de la pista junto con información de posicionamiento GNSS.

https://www.autoevolution.com/news/tesla-cybertruck-is-still-months-away-from-getting-even-basic-driver-assistance-systems-233636.html

https://www.tesla.com/ownersmanual/cybertruck/en_us/GUID-ADA05DFF-963D-477D-9A51-FA8C8F6429F1.html

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

Aplicando la 2^{da} ley the Newton para equilibrio de fuerzas:

$$m\dot{v} \quad = \quad ku - c\,v - f_g$$

donde f_g corresponde a la perturbación debido a la pendiente del camino dada por:

$$f_g \quad = \quad mg\sin(\theta)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$m\,sV(s) - mv(0) \quad = \quad kU(s) - cV(s) - f_g\frac{1}{s}$$

por lo que:

$$V(s) \quad = \quad \frac{k}{ms+c}U(s) - \frac{1}{ms+c}f_g\frac{1}{s} + \frac{m}{ms+c}v(0)$$

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

Como:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s) = sX(s) - x(0)$$

entonces la posición corresponde a **integrar la velocidad** sumada a una **constante inicial** de posición (aparece como un escalón de posición):

$$X(s) = \frac{1}{s}V(s) + \frac{1}{s}x(0)$$

Reemplazando $V(s) = sX(s) - x(0)$, la ecuación en el dominio de Laplace para la posición sería:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= \frac{k}{ms+c}U(s) - \frac{1}{ms+c}f_g\frac{1}{s} + \frac{m}{ms+c}v(0) \\ \implies X(s) &= \frac{1}{s}\frac{k}{ms+c}U(s) - \frac{1}{s}\frac{1}{ms+c}f_g\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\frac{m}{ms+c}v(0) + \frac{1}{s}x(0) \end{aligned}$$

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

Otro camino para obtener la función de transferencia sería partir de la ecuación diferencial formulada en términos de la posición en vez de la velocidad:

$$m\ddot{x} = ku - c\frac{dx}{dt} - f_g$$

Luego, aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$m\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] = kU(s) - c\left[sX(s) - x(0)\right] - f_g\frac{1}{s}$$

Reordenando los términos:

$$\begin{aligned}(ms+c)sX(s) &= kU(s) + msx(0) + mv(0) + cx(0) - f_g\frac{1}{s} \\ \implies X(s) &= \frac{1}{s}\frac{k}{ms+c}U(s) + \frac{1}{s}\frac{m}{ms+c}v(0) + \frac{1}{s}x(0) - \frac{1}{s}\frac{1}{ms+c}f_g\frac{1}{s}\end{aligned}$$

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

Notar que:

1. Por ambos caminos se obtiene la misma expresión para $X(s)$ como era de esperarse.
2. El auto "tiene" dos funciones de transferencia según sea la variable controlada que se considere:
   1. Control de velocidad: $V(s) = F(s)U(s)$ con $F(s) = \frac{k}{ms+c}$.
   2. Control de posición: $X(s) = \frac{1}{s}V(s) = \frac{1}{s}F(s)U(s) = \frac{k}{s(ms+c)}U(s)$
3. La función de transferencia de la posición se obtiene de aplicar la operación integradora $\frac{1}{s}$ a la función de transferencia de la velocidad.

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

La velocidad en el tiempo ante un escalón de magnitud A al acelerador:

$$U(s) = \frac{A}{s}$$

puede obtenerse aplicando la transformada de Laplace inversa a:

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{k}{ms+c}U(s) - \frac{1}{ms+c}f_g\frac{1}{s} + \frac{m}{ms+c}v(0), \\ &= \frac{k}{ms+c}\frac{A}{s} - \frac{1}{ms+c}f_g\frac{1}{s} + \frac{m}{ms+c}v(0), \\ &= \frac{kA}{c}\left[\frac{1}{s} - \frac{m}{ms+c}\right] - \frac{f_g}{c}\left[\frac{1}{s} - \frac{m}{ms+c}\right] + \frac{m}{ms+c}v(0), \end{aligned}$$

lo que resulta en:

$$v(t) = \frac{kA - f_g}{c}\left[1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right] + e^{-\frac{c}{m}t}v(0).$$

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

La posición en el tiempo ante un escalón de magnitud A puede obtenerse de manera similar, aplicando la transformada de Laplace inversa a la expresión para $X(s)$ o bien integrando la velocidad:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(\tau)d\tau + x(0) \\ &= \int_0^t \frac{kA - f_g}{c}\left[1 - e^{-\frac{c}{m}\tau}\right] + e^{-\frac{c}{m}\tau}v(0)d\tau + x(0) \\ &= \frac{kA - f_g}{c}\left[t + \frac{m}{c}\left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right)\right] - \frac{m}{c}\left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right)v(0) + x(0) \end{aligned}$$

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

Cabe notar que:

1. El término $e^{-\frac{c}{m}t} - 1$ inicialmente vale 0, para $t = 0$, y tiene la forma de $1 - e^{-\frac{c}{m}t}$, pero negativo, por lo que el efecto se traduce en un leve retraso de la rampa t (la posición crece permanentemente).
2. Si $kA < f_g$, entonces el vehículo no sube la pendiente, ¡sino que retrocede!
3. Si $m >> 0$ y $c \approx 0$, entonces $c/m \approx 0$ y el roce aerodinámico le quita poca energía cinética al sistema.
4. Si $m \approx 0$, entonces $c/m >> 0$, la exponencial decae rápidamente y la velocidad aumenta rápidamente. Es decir, dada una fuerza kA, el auto acelera más si es más liviano como es de esperarse.

Ejemplo: Vehículo con Perturbación

¿Cuál es el valor de la velocidad y la posición en régimen permanente?

Asumiendo condiciones iniciales iguales a cero $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, y perturbación $f_g = 0$:

$$\begin{aligned} v(t=\infty) &= \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{kA}{c}\left[1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right] \\ &= \frac{kA}{c}\left[1 - e^{-\frac{c}{m}t}\Big|_{0}^{\infty}\right] = \frac{kA}{c} \\ x(t=\infty) &= \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{kA}{c}\left[t\Big|_{0}^{\infty} + \frac{m}{c}\left(e^{-\frac{c}{m}t}\Big|_{0}^{\infty} - 1\right)\right] = \infty \end{aligned}$$

Aplicación del TVF permite obtener los mismos resultados

$$v(t=\infty) = \lim_{s\to 0} sV(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{k}{ms + c}\frac{A}{\cancel{s}} = \frac{kA}{c}$$

$$x(t=\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}}\Big|_{0}^{\infty}\frac{k}{ms + c}\frac{A}{\cancel{s}} = \infty$$

Nota: Repita como ejercicio para el caso $x(0) \neq 0$, $v(0) \neq 0$ y $f_g \neq 0$.

Ejemplo: Control Velocidad Crucero con Control $C(s) = K_P$

Suponga el vehículo se encuentra en **lazo cerrado** con un controlador proporcional $C(s) = K_P$, la salida en régimen permanente ante una entrada de referencia

$$R(s) = \frac{V^{des}}{s}$$

será:

$$\begin{aligned} y_{ss} = \lim_{s\to 0} sY(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{C(s)F(s)}{1+C(s)F(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{K_P\frac{k}{ms+c}}{1+K_P\frac{k}{ms+c}}\frac{V^{des}}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{K_P k}{m\cancel{s}^{0}+c+K_P k}\frac{V^{des}}{\cancel{s}} \\ &= \frac{K_P k}{c+K_P k}V^{des} \end{aligned}$$

¡La salida $y_{ss} \to V^{des}$ solo si $K_P \to \infty$!
$\Rightarrow$ El controlador $C(s) = K_P$ no es suficiente para lograr que $v(t)$ alcance la velocidad deseada V^{des}.

Ejemplo: Control Velocidad Crucero con Control $C(s) = K_P$

El error en régimen permanente para el vehículo con control de velocidad crucero es:

$$\begin{aligned} e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+C(s)F(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+K_P\frac{k}{ms+c}}\frac{V^{des}}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{ms\overset{0}{\cancel{s}}+c}{ms\overset{0}{\cancel{s}}+c+K_Pk}\frac{V^{des}}{\cancel{s}} \\ &= \frac{c}{c+K_Pk}V^{des} \end{aligned}$$

¡El error $e_{ss} \to 0$ cuando $K_P \to \infty$!

Ejemplo: Control Velocidad Crucero con Control $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$

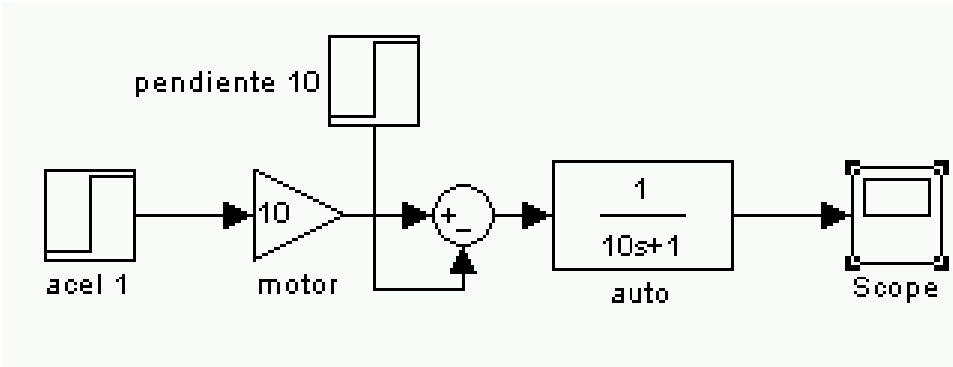
El error en régimen permanente para el vehículo con control de velocidad crucero es:

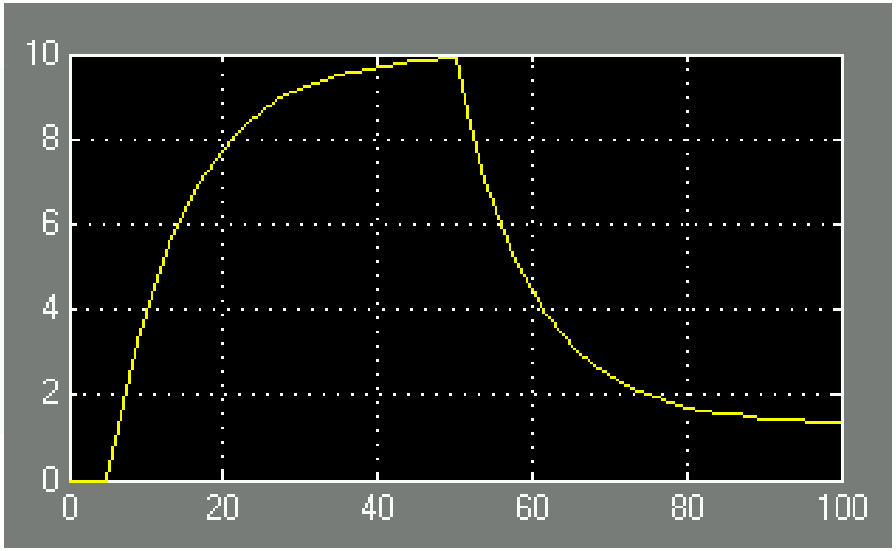
$$\begin{aligned} e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+C(s)F(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\left(K_P+\frac{K_I}{s}\right)\frac{k}{ms+c}}\frac{V^{des}}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{(ms\overset{0}{\cancel{+}}c)s\overset{0}{\cancel{+}}}{(ms\overset{0}{\cancel{+}}c)s\overset{0}{\cancel{+}}(K_Ps\overset{0}{\cancel{+}}K_I)k}\frac{V^{des}}{\cancel{s}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

¡El error $e_{ss} = 0$ si usamos accion integral $K_I \neq 0$ independiente del valor de K_P!

Simulación de la Respuesta del Vehículo con Perturbación - Lazo Abierto

$$\Sigma_{OL}: \qquad Y(s) = V(s) = \frac{10}{10s+1}U(s)$$

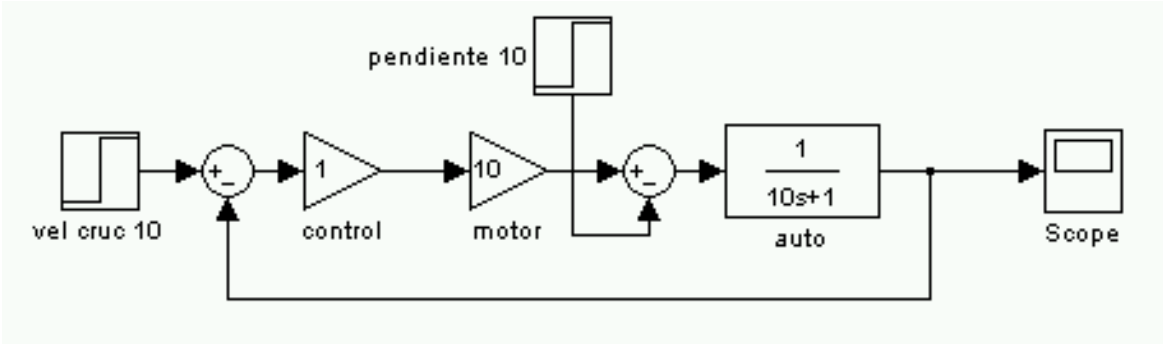


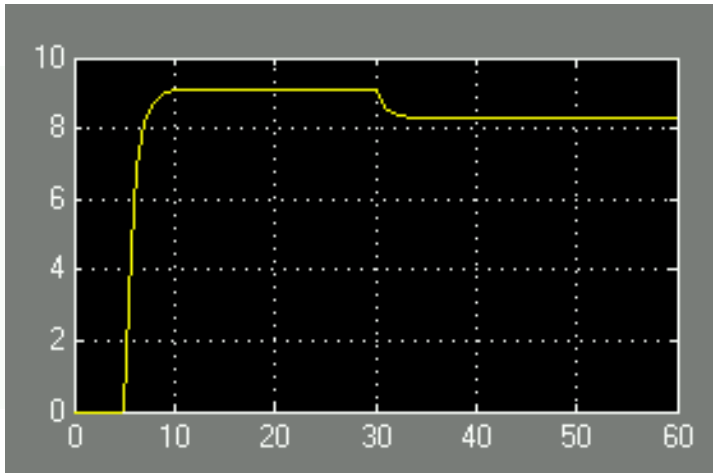


$$\Sigma_{CL}: \qquad \overline{Y}(s) = \overline{F}(s)R(s) = \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)}R(s)$$

Suponiendo un controlador puramente proporcional $C(s) = K$ y un sensor ideal $H(s) = 1$ se tiene:

$$\overline{Y}(s) = \frac{K\frac{10}{10s+1}}{1 + K\frac{10}{10s+1}}R(s) = \frac{10K}{10s + 1 + 10K}R(s)$$





Comportamiento de Sistemas de 2° orden

Sistema de 2° orden

La función de transferencia patrón es:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s)$$

y tiene ecuación caracaterística $q(s) = 0$ con raíces:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

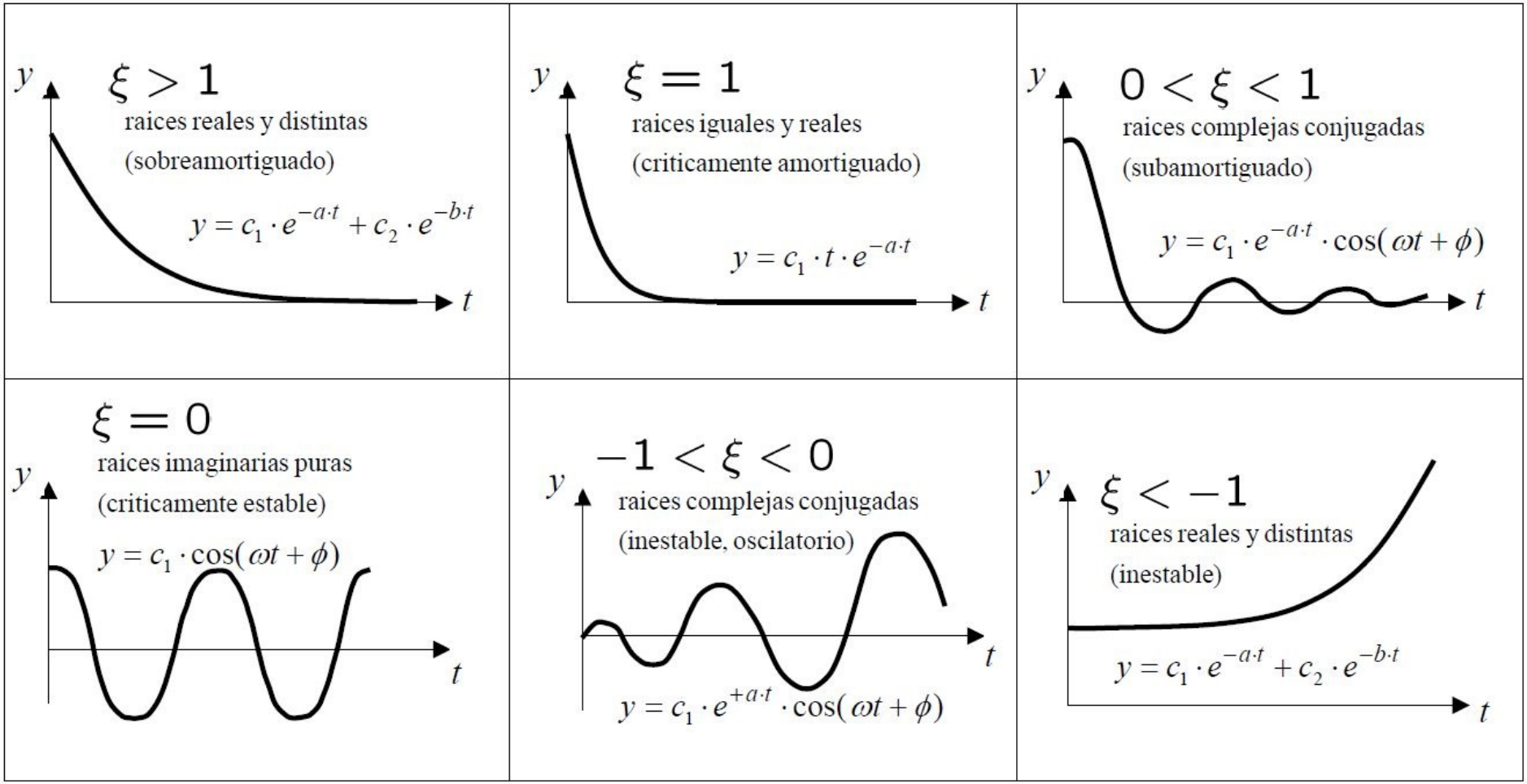
donde:

ξ: coeficiente de amortiguación

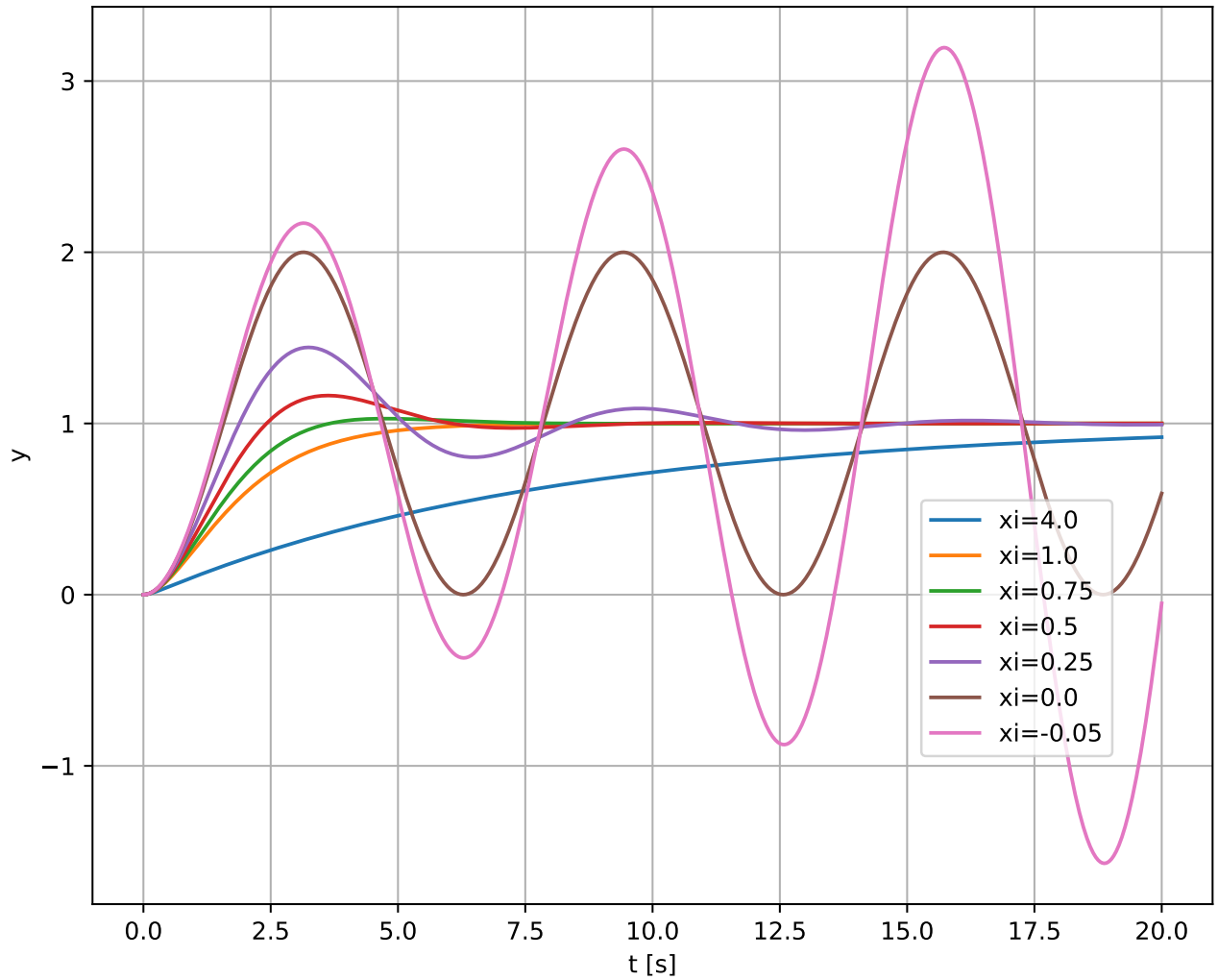
ω_n: frecuencia natural

Nota: ω_n es la frecuencia a la que oscila el sistema cuando $\xi = 0$, como podrá verificar al resuelver las racíces de $q(s) = 0$ cuando $\xi = 0$.

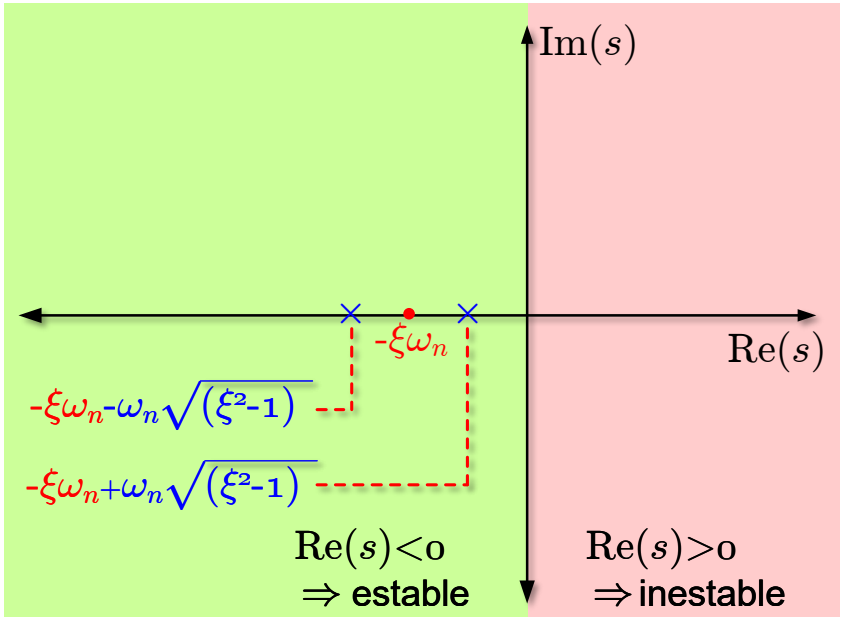
Comportamiento de Sistemas de 2° orden

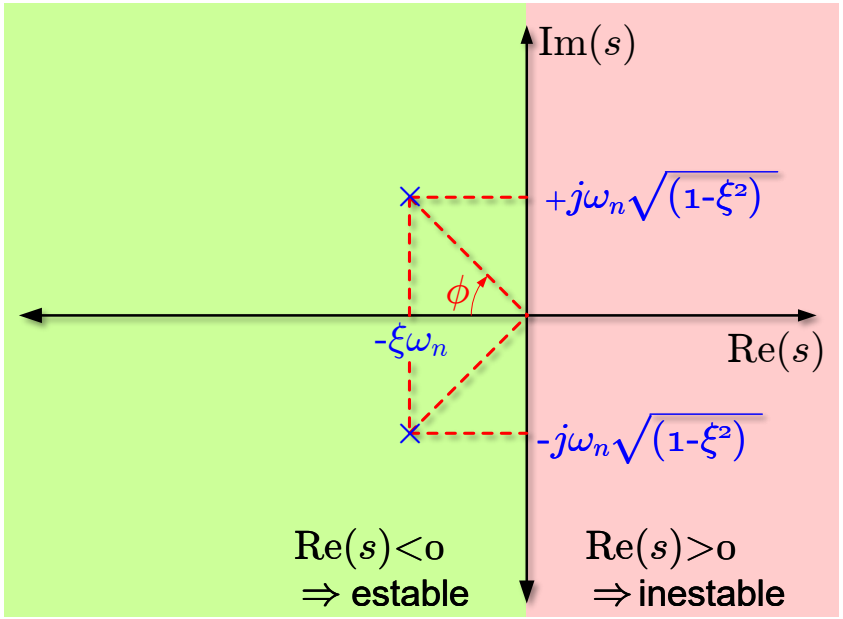


Comportamiento de Sistemas de 2° orden



Raíces en el plano-s

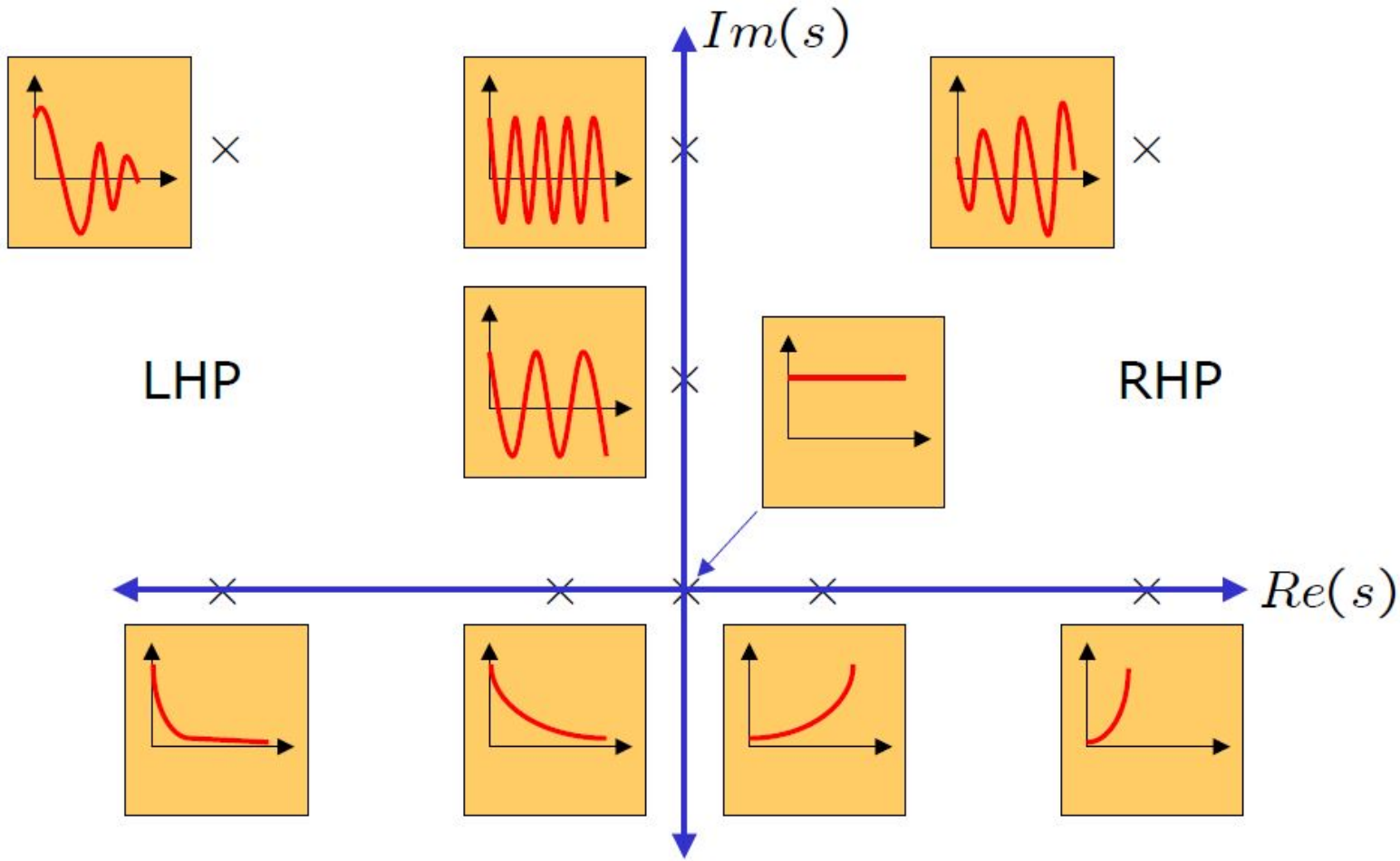




$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{Im}(s)=0\\ \wedge\\ \xi>1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{sobreamortiguado}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{Im}(s)\neq 0\\ \wedge\\ |\xi|<1\end{array}\right\} \Rightarrow |\phi|>0 \Rightarrow \text{subamortiguado}$$

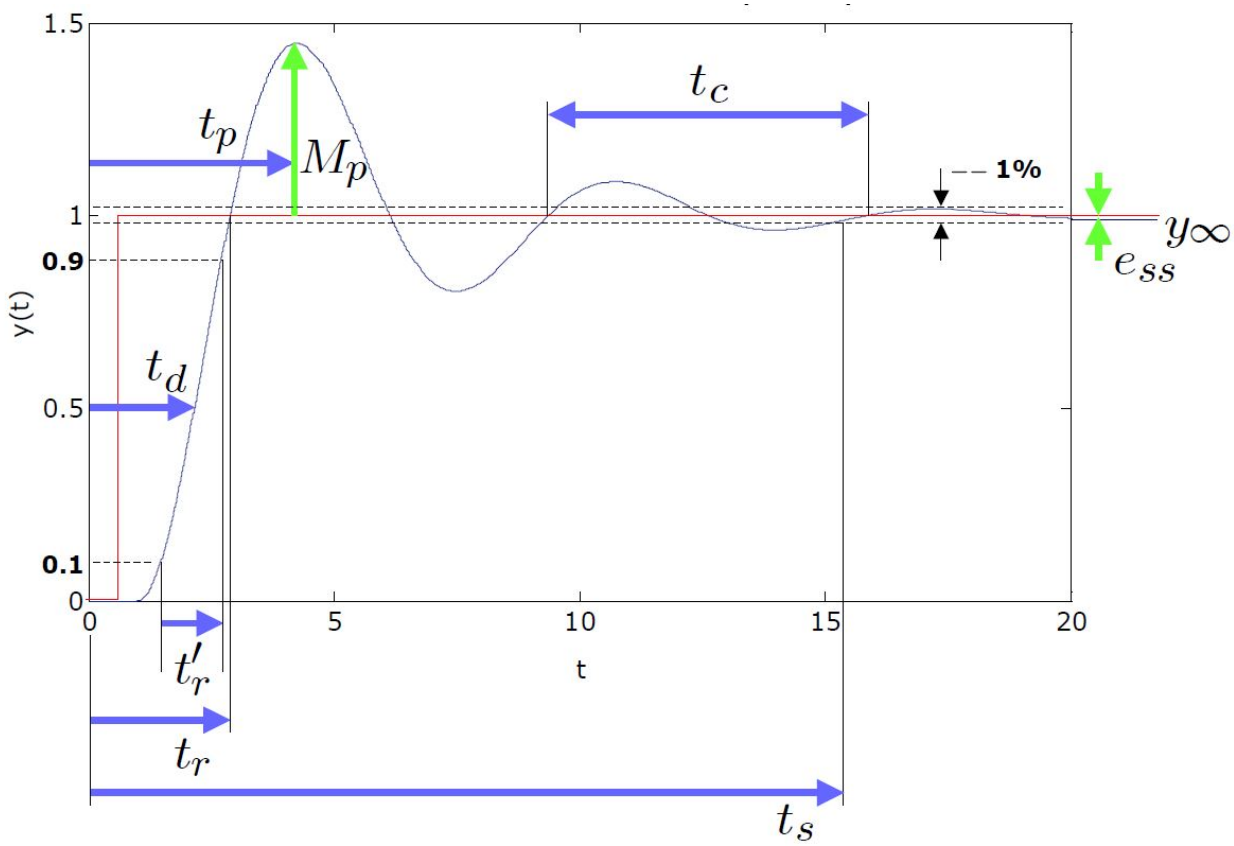
Respuestas naturales asociadas a polos en $\mathbb{C}$



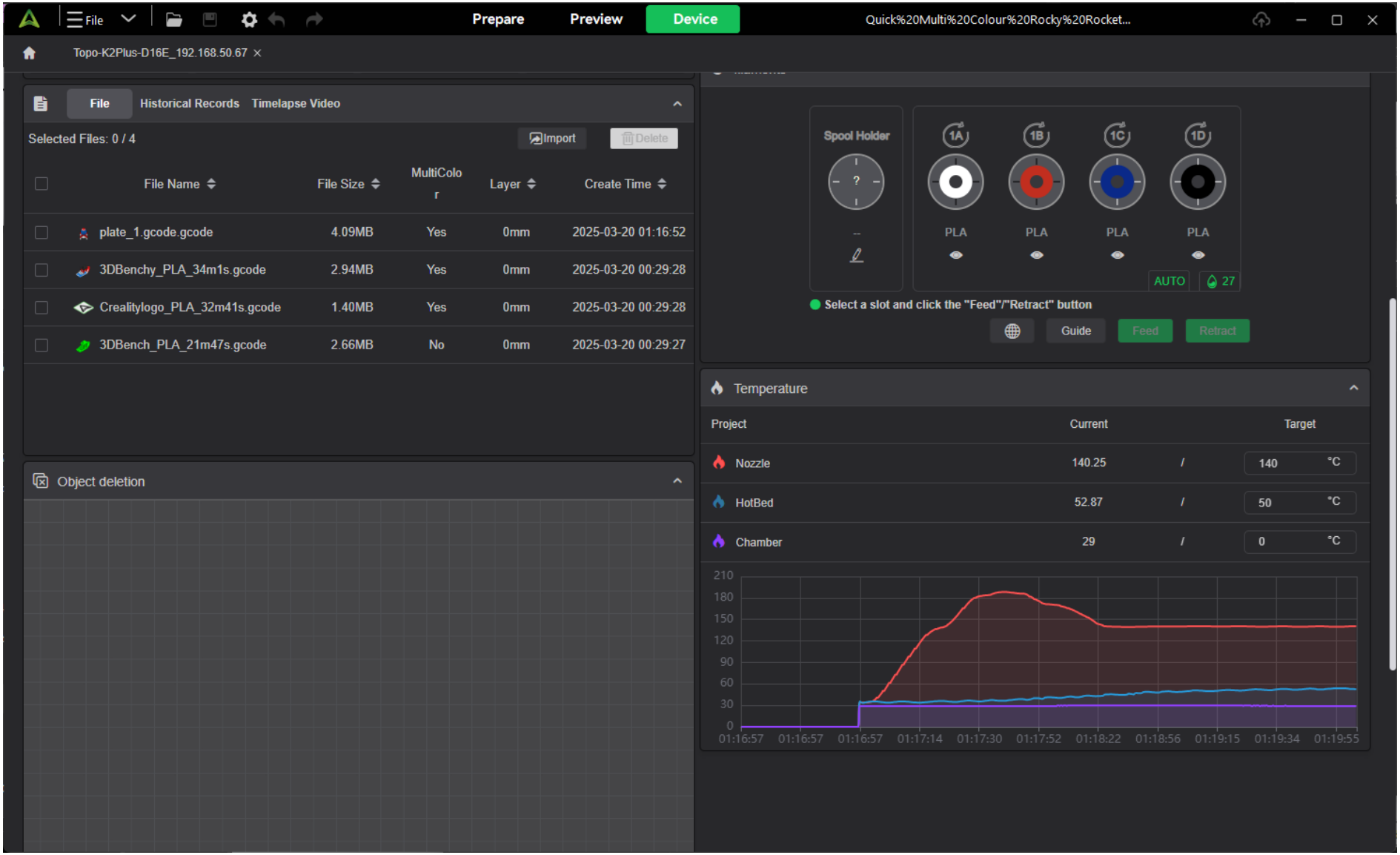
Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Parámetros de comportamiento de sistemas de 2° orden:

- Respuesta Estática (permanente): t_s, e_{ss}
- Respuesta Dinámica (transitoria): t_d, t_r, t_p, M_p

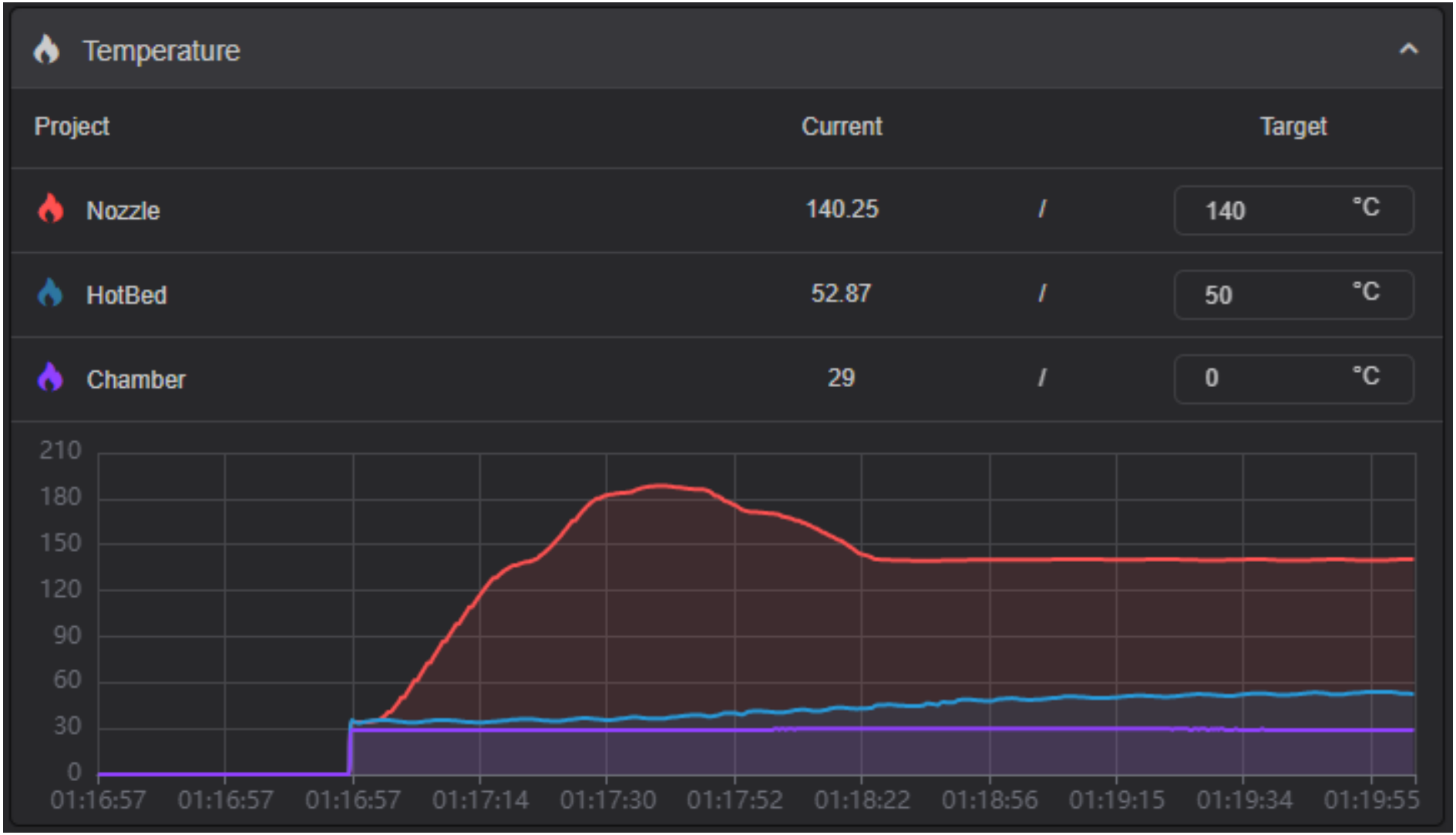


Control de temperatura de boquilla de impresora 3D



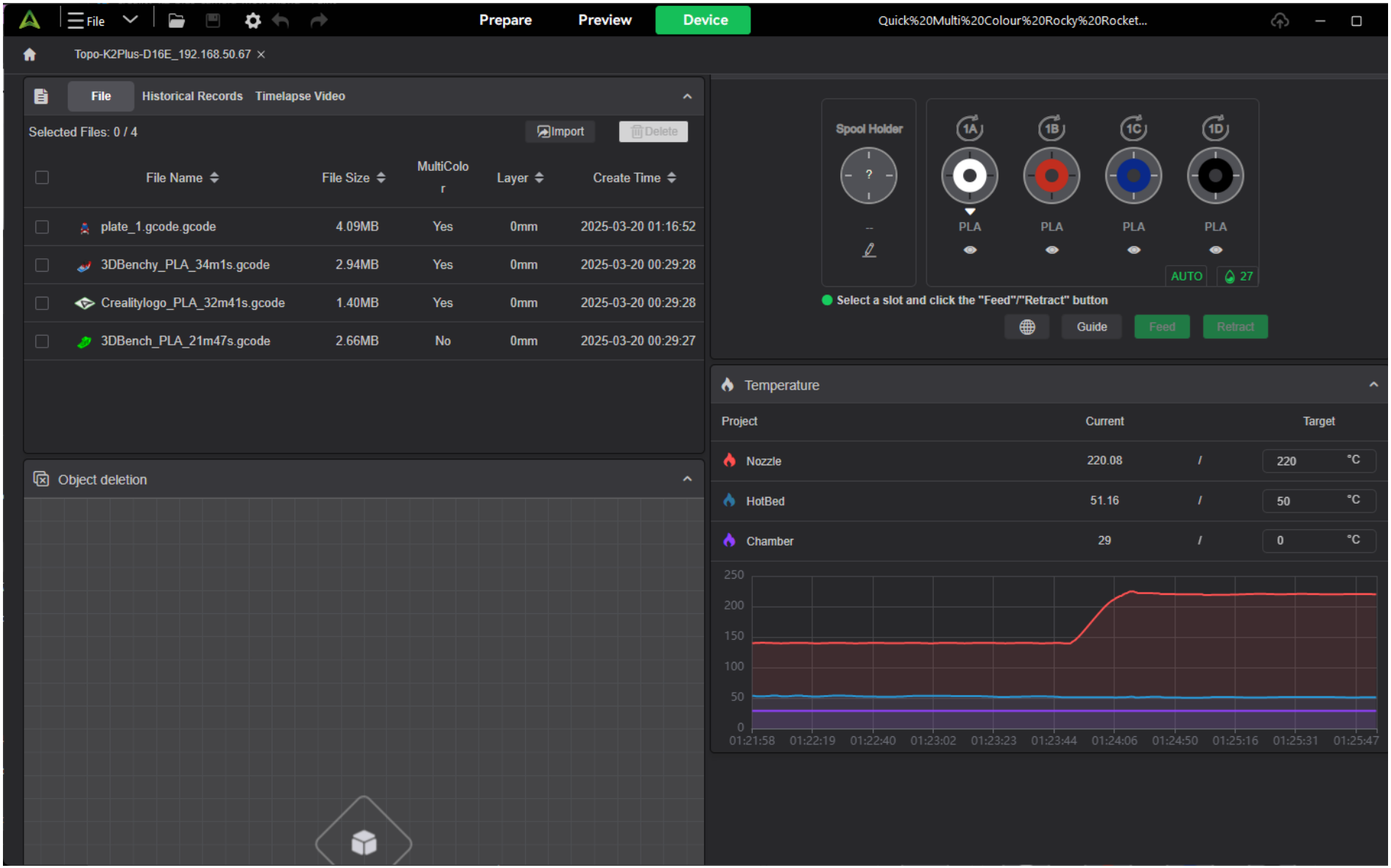
Respuesta del control en lazo cerrado de la Creality K2 Plus.

Control de temperatura de boquilla de impresora 3D



Respuesta del control en lazo cerrado de la Creality K2 Plus.

Control de temperatura de boquilla de impresora 3D



Respuesta del control en lazo cerrado de la Creality K2 Plus.

Indices de Desempeño o Cifras de Mérito

Son medidas cuantitativas del funcionamiento del sistema y en base a ellos puede desarrollarse el control óptimo de un sistema, es decir, minimizar el índice dado.

Por ejemplo, si el índice es *Integral of Quadratic Error*:

$$IQE = \int_0^T e^2(t)dt$$

Entonces para el diseño de controladores se persigue:

$$J = \min_{K(s)} IQE$$

Dada la planta a controlar y sujeto a que el lazo cerrado sea estable.

Indices de Desempeño o Cifras de Mérito

Otros índices usados:

- Integral of Absolute Error: $IAE = \int_0^T |e(t)|dt$
- Integral of Time and Absolute Error: $ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)|dt$
- Frecuencia, normas H_2 y $H_\infty = \int_\infty^\infty ||E(\omega)||d\omega$. Integral del espectro de frecuencia del error, n es norma (2 o ∞)
- Caso general: $\int_0^T f(e(t), y(t), u(t), t)dt$

Generalmente se incorpora la variable manipulada $u(t)$, para considerar saturación de estas variables:

Por ejemplo: $I = \int_0^T (|e(t)| + \rho|u(t)|)dt$, donde $\rho = \begin{cases} k : \text{cte} & \text{si} |u| > u_{max} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Caso cuadrático: $I = \int_0^T (e^2(t) + \rho \cdot u^2(t))dt$

(Tiene solución analítica vía Ecuación de Ricatti)

Si

$$Y(s) = \frac{a}{s^2 + bs + a} U(s) \qquad a > 0, 0 \leq b^2 < 4a$$

la respuesta al escalón unitario cuando $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ y $b^2 < 4a$ estará dada por:

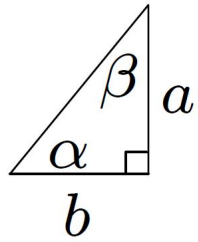
$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b} \frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)} e^{\mathsf{Re}(s)t} \sin\left[\mathsf{Im}(s)t - \arctan\left(\frac{\mathsf{Im}(s)}{\mathsf{Re}(s)}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b} \frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)} e^{\mathsf{Re}(s)t} \sin\left[\mathsf{Im}(s)t + \arctan\left(-\frac{\mathsf{Im}(s)}{\mathsf{Re}(s)}\right)\right] \end{aligned}$$

Porque $\arctan(-\alpha) = \arctan(\alpha)$

Repaso Señales y Sistemas

Recordando algunas cosas básicas de trigonometría...

- $\cos\alpha = \sin\alpha + 90°$, $\sin\alpha = \cos\alpha - 90°$
- $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$, $\alpha = 90 - \beta$
- $\arctan\dfrac{a}{b} = 90 - \arctan\dfrac{b}{a}$



Por lo tanto,

$$y(t) = 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b}\frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)}e^{\mathsf{Re}(s)t}\cos\left[\mathsf{Im}(s)t - \arctan\left(-\frac{\mathsf{Im}(s)}{\mathsf{Re}(s)} - 90°\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b}\frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)}e^{\mathsf{Re}(s)t}\cos\left[\mathsf{Im}(s)t + \arctan\left(-\frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)}\right)\right]$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Si

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s) \qquad \omega_n > 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

la respuesta al escalón unitario cuando $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ y $\xi < 1$ estará dada por:

$$y(t) = 1 - \frac{a}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left[\omega_n\sqrt{1-\xi^2} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

porque las raíces de la ecuación característica son:

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

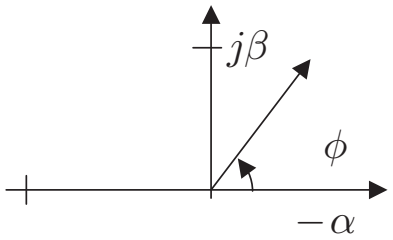
Definiendo:

$$\alpha = -\xi\omega_n \qquad \beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad \gamma = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\phi = \arctan(\gamma) \;\rightarrow\; \tan(\phi) = \frac{\beta}{-\alpha}$$

Es posible re-escribir la respuesta del sistema al escalón como:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta}e^{\alpha t}\sin(\beta t + \phi)$$



o por las relaciones trigonométricas:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta}e^{\alpha t}\cos\left(\beta t - \arctan\left(\gamma^{-1}\right)\right)$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

A partir de la respuesta del sistema al escalón expresada como:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)$$

es posible obtener expresiones para las especificaciones de la respuesta dinámica según se muestra a continuación.

Tiempo de Respuesta (Rise Time):

$$y(t_r) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha t_r} \sin(\beta t_r + \phi) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(\beta t_r + \phi) = 0$$

$$\Rightarrow \beta t_r + \phi = \pi$$

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\beta}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Tiempo de Peak (Overshoot Time):

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{\omega_m}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha t}[\alpha \sin(\beta t + \phi) + \beta \cos(\beta t + \phi)] = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\beta t + \phi) = -\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$$

$$\Rightarrow \tan(\pi + \beta t + \phi) = \tan(\phi)$$

$$\Rightarrow \pi + \beta t + \phi = \phi$$

$$t_p = \frac{\pi}{\beta}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Peak máximo o sobreoscilación (Maximum peak or Overshoot):

$$M_p = y(t_p) - 1 = \frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha \frac{\pi}{\beta}} \sin(\phi)$$

pero:

$$\sin(\phi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 (1-\xi^2)}} = \sqrt{1-\xi^2}$$

Por lo tanto:

$$M_p = e^{\alpha \frac{\pi}{\beta}} = e^{-\pi/\gamma}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Tiempo de estabilización (Settling Time):

$$||y(t) - 1|| \leq 0.01 \Rightarrow ||\frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)|| \leq 0.01$$

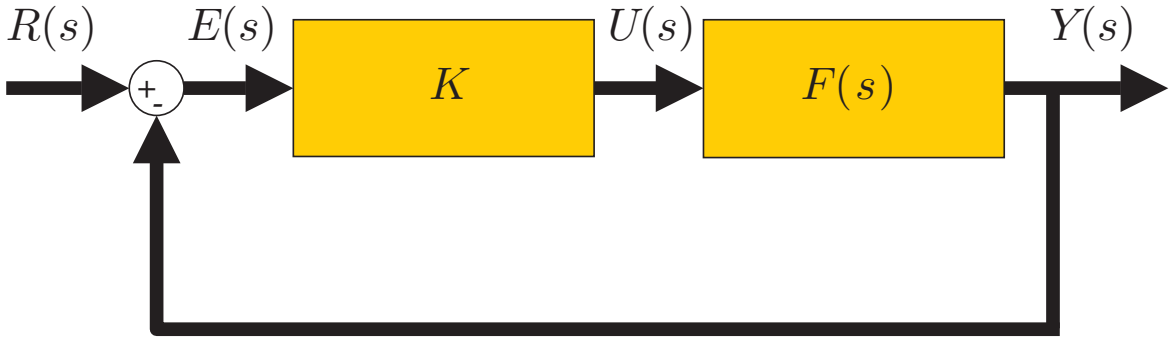
$$\Rightarrow e^{\alpha t} < 0.01 \frac{\beta}{\omega_n}$$

$$t_{ss} > \frac{4.61 - \log\left(\sqrt{1 - \xi^2}\right)}{\xi \omega_n}$$

Periodo de Cycling (Cycling Period):

$$\beta t_c = 2\pi \Rightarrow \quad t_c = \frac{2\pi}{\beta}$$

Ejemplo: Planta de 2° orden realimentada



$$F(s) = \frac{1}{s(s+p)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{KF(s)}{1+KF(s)}R(s) = \frac{K}{s^2+ps+K}R(s)$$

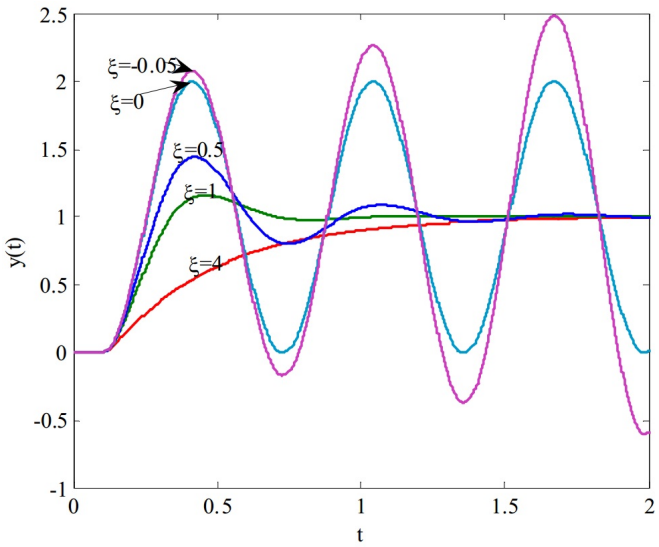
Cambiando la notación:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}R(s)$$

con:

$$\omega_n^2 = K \qquad \xi = \frac{p}{2\omega_n} = \frac{p}{2\sqrt{K}}$$

¿Qué ocurre con ω_n y ξ cuando varía K?



Respuesta al Escalón Unitario

Ejemplo: Control posición del vehículo

Asumiendo:

$$F(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{A}{s(ms+1)},$$

determine e_{ss} y obtenga el valor de controlador puramente proporcional $C(s) = K$ que asegure $t_p < 4$ y $M_p < 0.02$ ante una referencia escalón de posición deseada X^{des}.

1.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + C(s)F(s)H(s)} R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{1}{1 + K\frac{A}{s(ms+c)}} \frac{X^{des}}{\cancel{s}} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}(ms+c)}{\cancel{s}(ms+c) + KA} X^{des} = 0 \end{aligned}$$

Observación: No fue necesaria la acción integral como para le control de velocidad. ¿Por qué?

Ejemplo: Control posición del vehículo

2

$$\bar{F}(s) = \frac{KA}{s^2 + cs + KA} = \frac{KA/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{KA}{m}} \leftrightarrow \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \frac{KA}{m},\ \xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2m}\sqrt{\frac{m}{KA}}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\xi\omega_n = -\frac{c}{2m}$$

$$\Rightarrow \beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{KA}{m}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{4m^2}\frac{m}{KA}} = \frac{1}{2m}\sqrt{4KAm - c^2}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} < 4 \Rightarrow \pi^2 < 16\beta^2$$

$$\Rightarrow 4m^2\pi^2 < 16(4KAm - c^2)$$

$$\Rightarrow K > \frac{1}{16A}m\pi^2 + \frac{c^2}{4Am}$$

Ejemplo: Control posición del vehículo

2

$$\bar{F}(s) = \frac{KA}{s^2 + cs + KA} = \frac{KA/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{KA}{m}} \leftrightarrow \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \frac{KA}{m},\ \xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2m}\sqrt{\frac{m}{KA}}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\xi\omega_n = -\frac{c}{2m}$$

$$\Rightarrow \beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{KA}{m}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{4m^2}\frac{m}{KA}} = \frac{1}{2m}\sqrt{4KAm - c^2}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} < 4 \Rightarrow \pi^2 < 16\beta^2$$

$$\Rightarrow 4m^2\pi^2 < 16(4KAm - c^2)$$

$$\Rightarrow K > \frac{1}{16A}m\pi^2 + \frac{c^2}{4Am}$$

Ejemplo: Control posición del vehículo

3

$$
\begin{aligned}
M_p &= e^{\alpha\frac{\pi}{\beta}} < 0.02 \\
&\Rightarrow \alpha\frac{\pi}{\beta} < \ln(0.02) \\
&\Rightarrow \alpha\pi < \ln(0.02)\beta \\
&\Rightarrow -\frac{c}{2m}\pi < \ln(0.02)\frac{1}{2m}\sqrt{4KAm - c^2} \\
&\Rightarrow c\pi > -\ln(0.02)\sqrt{4KAm - c^2} \\
&\Rightarrow c^2\pi^2 > \ln^2(0.02)(4KAm - c^2) \\
&\Rightarrow \frac{c^2(\pi^2 + \ln^2(0.02))}{4\ln^2(0.02)Am} > K
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Control posición del vehículo

Si $m = 1000$, $c = \frac{1}{2}\ln^2(0.02) \approx 15$, $A = 1$, $\pi^2 = \approx 10$ entonces:

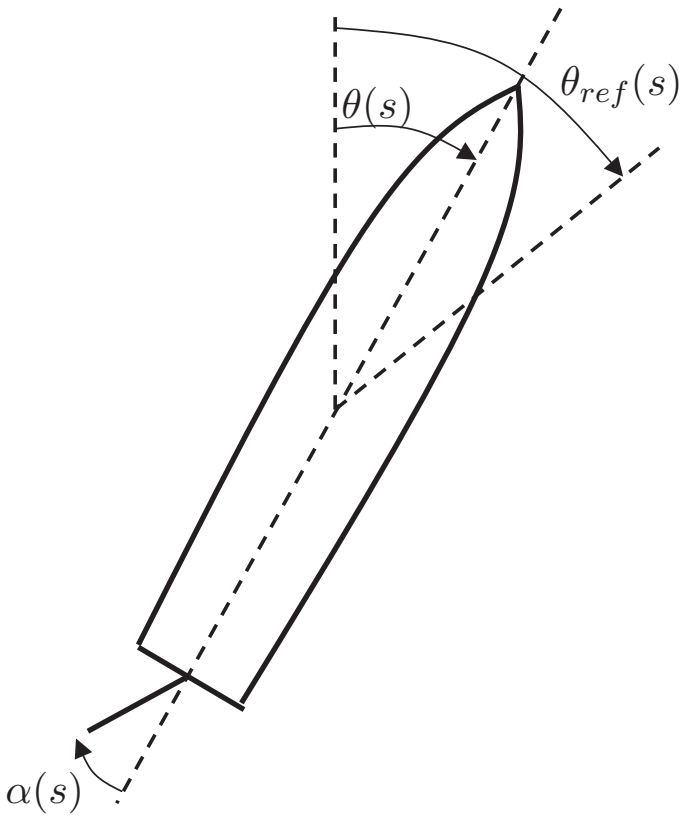
$$t_p < 4 \Rightarrow K > \frac{1}{16}1000 \cdot 10 + \frac{1}{4}\frac{1}{4 \cdot 1000} > 625$$

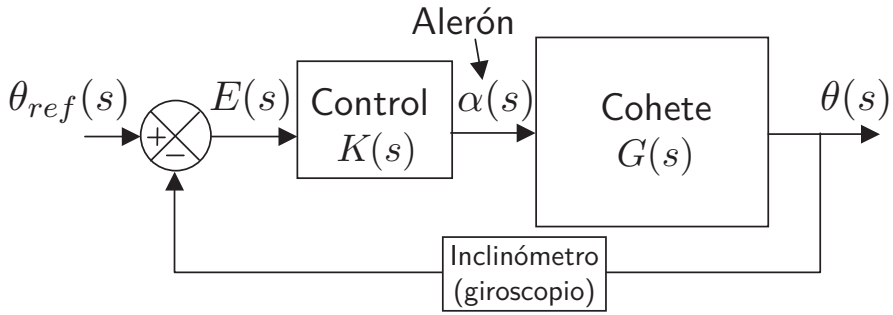
y

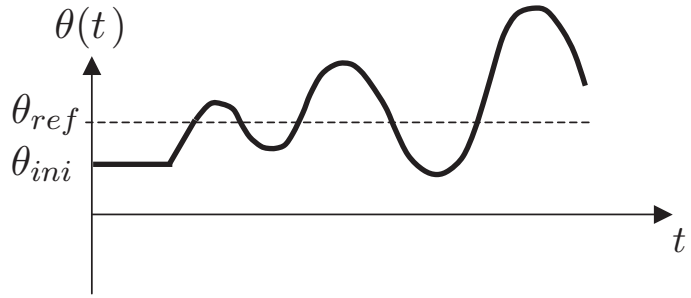
$$M_p < 0.02 \Rightarrow K < \frac{1}{4} \cdot \frac{10 + 15}{4 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 1000} < 10^{-4}$$

Atención: No existe K que satisfaga ambas restricciones. Se requiere priorizar, transar, o cambiar a un controlador PD...

Comportamiento de sistemas de 3er orden: Ejemplo Cohete espacial







Dinámica y Estática:

- Régimen transitorio: $s \neq 0$ (estabilidad, respuestas rápidas, dinámica, etc.)
- Régimen permanente: $s = 0$ (valores estacionarios, error permanente, etc.)

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{s(s+0.6)(s+0.13)}$$

Si realimentamos a través de un controlador proporcional $K(s) = K$, tenemos:

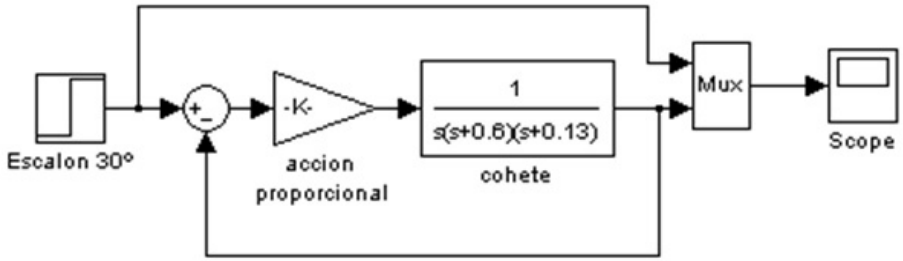
$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + 0.73s^2 + 0.078s + K}$$

Por lo que se tiene la siguiente ecuación característica:

$$q(s) = s^3 + 0.73s^2 + 0.078s + K$$

Comportamiento de sistemas de 3er orden: Ejemplo Cohete espacial

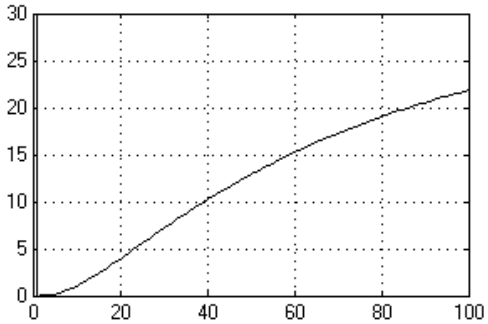
Supónga que el cohete inicialmente asciende en forma vertical ($\theta_{ref} = 0°$) y luego se cambia la referencia a 30° de manera que el cohete adopte un ángulo adecuado para salir de la atmósfera terrestre. El modelo llevado a Simulink es:



i) Para $K = 0.001$, las raíces del sistema realimentado son:

$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.6035,\ -0.1117,\ -0.0148)$$

y la respuesta en el tiempo:

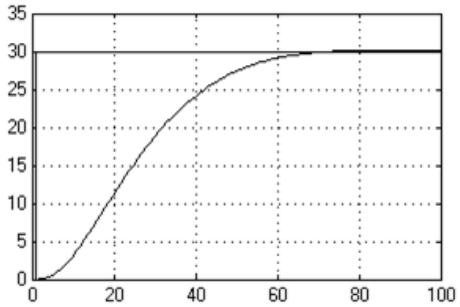


Se aprecia un comportamiento extremadamente lento. Se aumentará la ganancia para "apurar" la respuesta (nótese que a los 100 segundos aun no se logra alcanzar la nueva referencia de 30°).

ii) Para $K = 0.003$, las raíces del sistema realimentado son:

$(s_1, s_2, s_3) = (-0.6102,\ -0.0599 - 0.365j,\ -0.0599 + 0.0365j$ Raíces complejas

La respuesta en el tiempo:

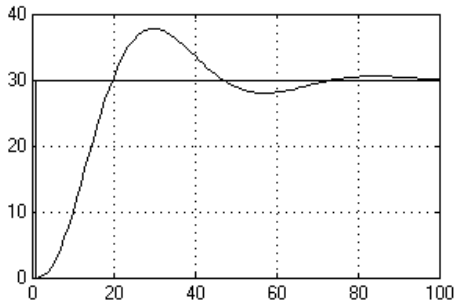


Con esta ganancia, se logra alcanzar el valor deseado dentro de los 100 segundos, sin embargo, ello aún es excesivamente lento, por lo que se sigue aumentando la ganancia.

iii) Para $K = 0.01$, las raíces del sistema realimentado son:

$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.6316,\ -0.0492 - 0.1158j,\ -0.0492 + 0.1158j)$$

y la respuesta en el tiempo:

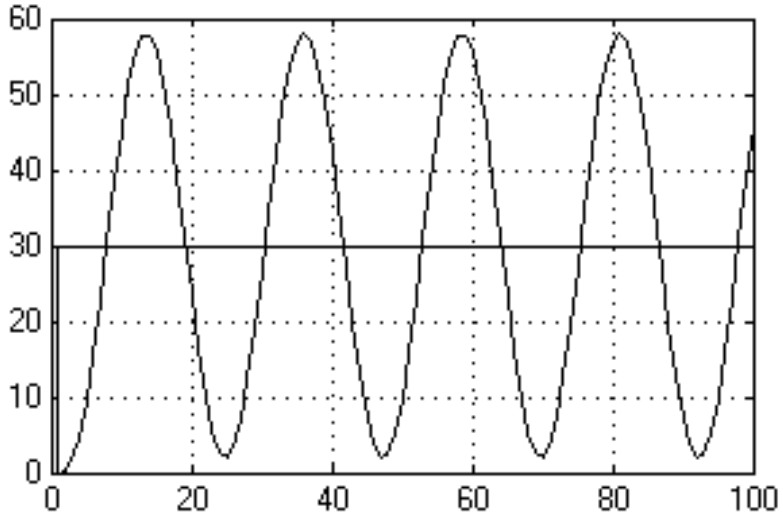


La respuesta efectivamente es mas rápida, sin embargo es también oscilatoria. Sigamos aumentando la ganancia...

iv) Para $K = 0.057$, las raíces del sistema realimentado son:

$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.7301,\ -0.2794j,\ 0.2794j)$$

¡Nótese que existen dos raíces imaginarias puras! Su respuesta en el tiempo es:

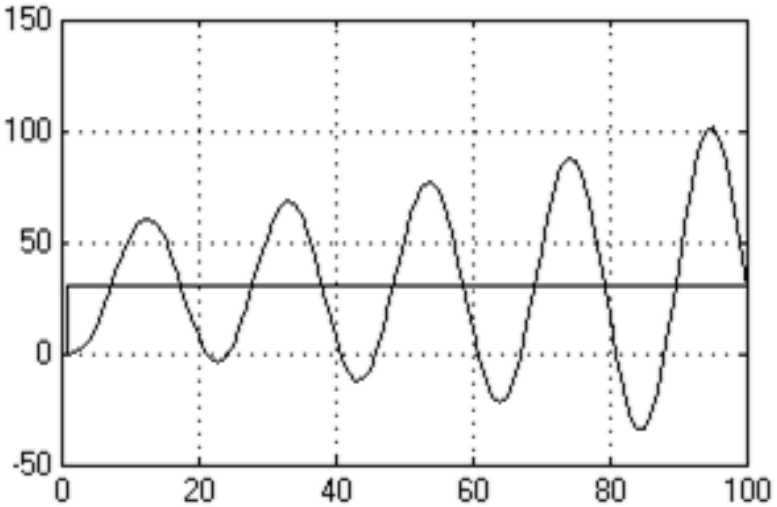


v) Para $K = 0.07$, las raíces del sistema realimentado son:

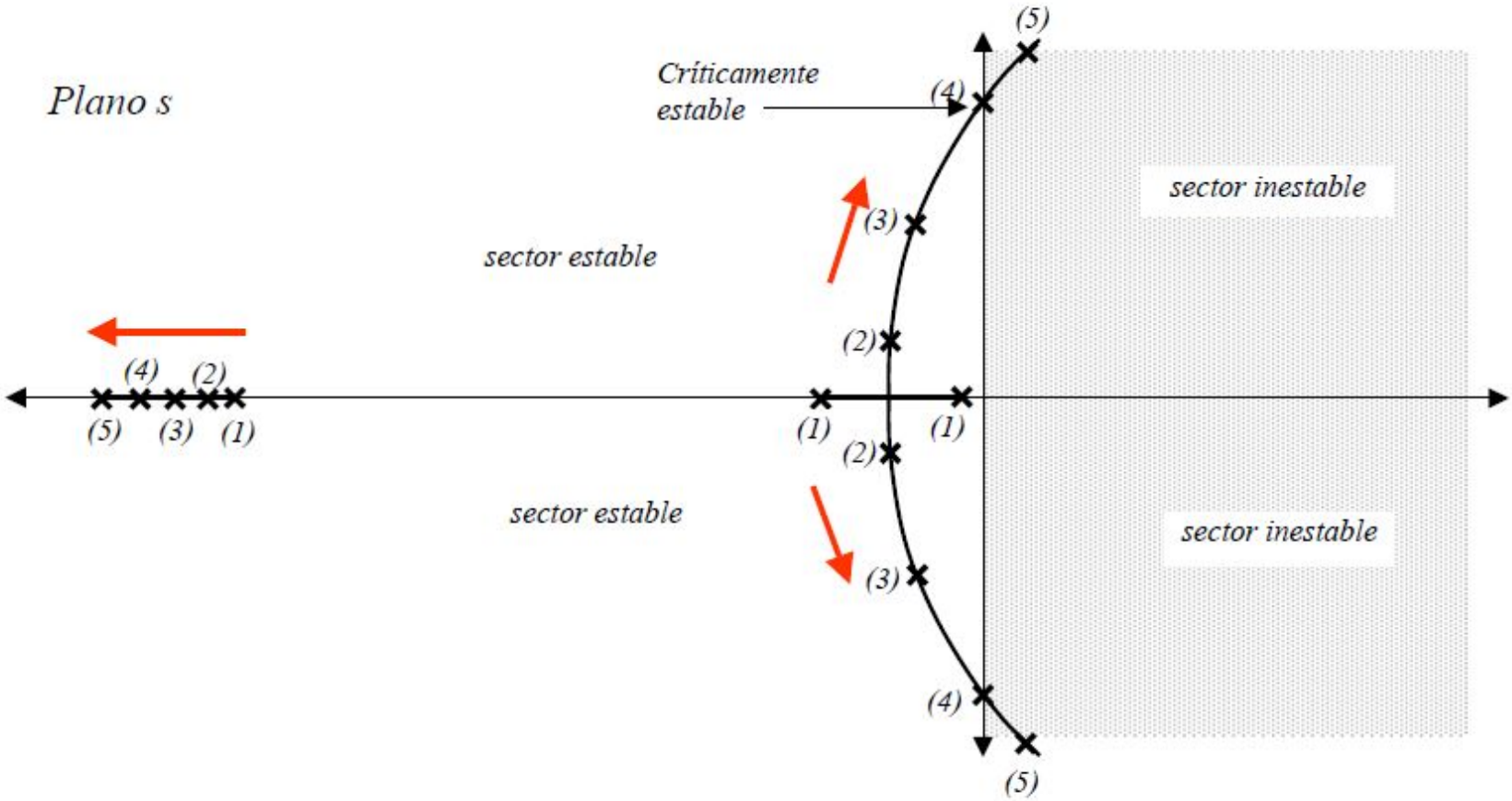
$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.7504,\ 0.0102 - 0.3053j,\ 0.0102 + 0.3053j)$$

¡Nótese que existen dos raíces con parte real positiva!

Su respuesta temporal es:



Comportamiento de Sistemas de 3^{er} Orden: Ejemplo Cohete Espacial



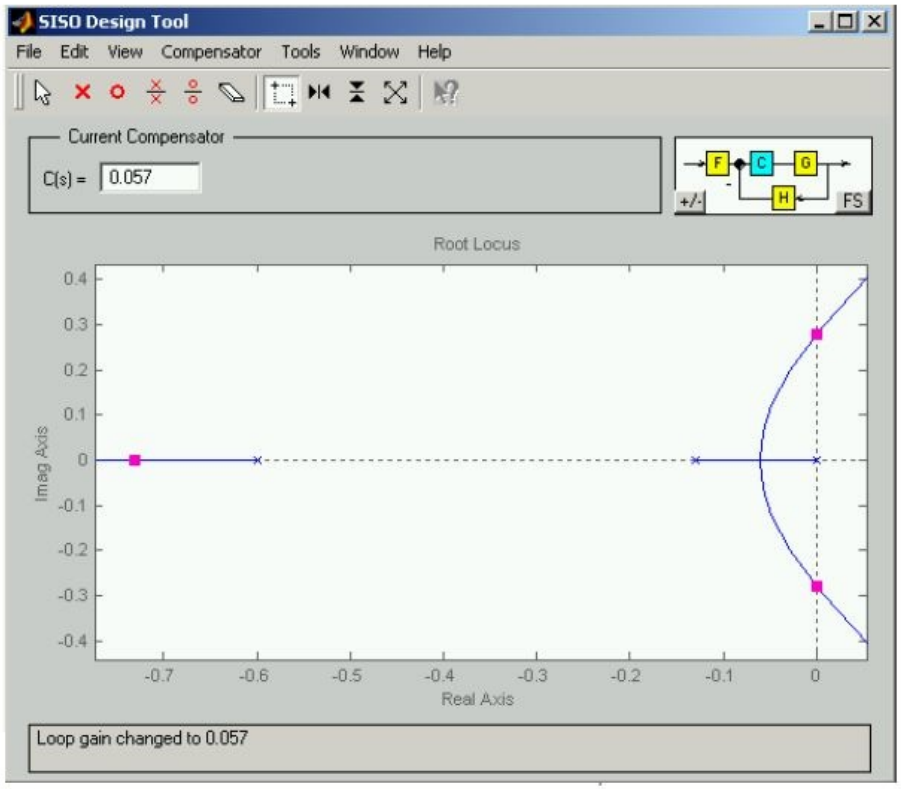
Comportamiento de Sistemas de 3^{er} Orden: Ejemplo Cohete Espacial

¿Qué herramientas existen para saber si las raíces de un sistema son inestables?

- Computador: función Python `r, k = rlocus(sys)`
- Computador: función Matlab `rtool(sys)`
- Criterio de Routh-Hurwitz

-Función Matlab ***rltool***

```
>> num=[0 0 0 1];
>> den=conv([1 0.6 0],[1 0.13]);
>> rltool(tf(num,den))
```



Sistemas de control realimentado... lo aprendido

☞ Debes saber que...

En este capítulo hemos aprendido sobre:

- Concepto de sistema.
- Diferencia entre lazo abierto y lazo cerrado (sistema realimentado).
- Función de transferencia de lazo abierto y cerrado.
- Función de transferencia del error.
- Control proporcional-integral-derivativo (control PID).
- Métricas de desempeño (e.g. IAE, IQE, ITAE).
- Cálculo de características de la respuesta de sistemas de primer y segundo orden (error en régimen permanente e_{ss}, tiempo de respuesta t_r, tiempo de sobreoscilación o peak máximo t_p, sobreoscilación u overshoot M_p, tiempo de estabilización t_{ss}.
- Beneficios de la realimentación se resumen en que esta permite:
  - Estabilizar sistemas que en lazo abierto son inestables.
  - Ajustar la velocidad de respuesta y características transitorias (sea inestable o no el sistema en lazo abierto).
  - Reducir el error en régimen perpamente (sea inestable o no el sistema en lazo abierto).
  - Mejorar la tolerancia (y/o rechazo) a perturbaciones externas.
  - Reducir la sensibilidad del sistema ante variaciones de los parámetros del proceso.

Sistemas de control realimentado... a seguir aprendiendo

☞ Debes saber que...

Diseñar controladores implica **modelar el sistema** y **caracterizar el sistema realimentado** en términos de:

- Simulación de la **respuesta dinámica** (calcular respuesta con y sin realimentación) en el dominio del tiempo. El control altera la ubicación de polos y ceros, y la ubicación de polos y ceros determina las características de la respuesta... potencialmente dañando incluso la estabilidad del sistema por un mal diseño del controlador.
- Análisis de **márgenes estabilidad** (e.g. obtenidos por métodos de RH, LGR, Nyquist, Bode)... para asegurar que el control estabiliza el sistema y no lo desestabiliza.
- Cálculo de **métricas de desempeño**... para evaluar e identificar el controlador que logra un mejor comportamiento del sistema respecto de otros controladores.
- Análisis de **controlabilidad** y **observabilidad**... este punto debiese realizarse como primer paso después de modelar el sistema y antes de los puntos anteriores. Se estudiará hacia el final del curso porque los criterios fueron descubiertos posteriormente al desarrollo de las herramientas para analizar la respuesta dinámica en el tiempo, en frecuencia y la estabilidad del sistema.

Referencias Adicionales

- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Enami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 8^a ed. (1^a ed. 1986), Pearson Education Limited, 2019.
- G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2001.

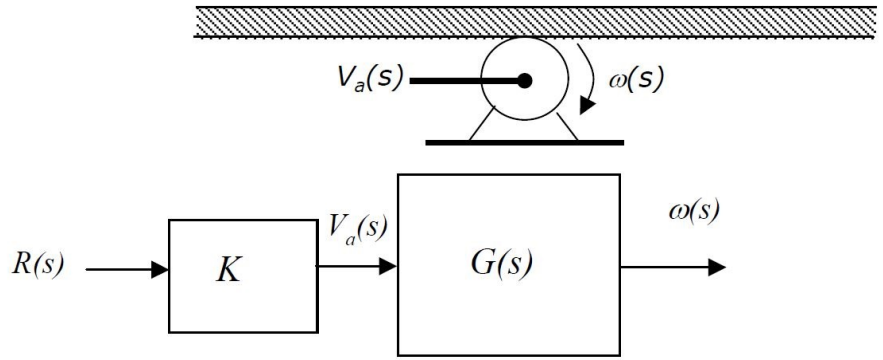
ANEXO

– Otros ejemplos y ejercicios propuestos –

Respuesta Transitoria de Sistemas Realimentados de 1^{er} Orden

Ejemplo fabricación acero

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_0}{T_0 s + 1}$$



Lazo abierto: escalón

$$R(s) = \frac{R_0}{s}$$

$$V_a(s) = \frac{K}{s} R_0 \quad \text{(Tabla de valores estáticos que entrega } R_0 \text{ para un determinado } \omega_0)$$

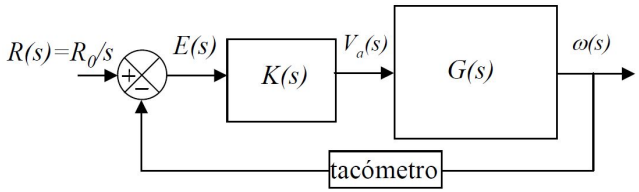
$$\omega(s) = G(s) \cdot V_a(s) = \frac{K \cdot K_0}{s(T_0 s + 1)} R_0 \text{ y } \omega(t) = K_0 \cdot K \cdot R_0 \cdot (1 - e^{-t/T_0})$$

Por lo que se requiere hacer $K = \frac{1}{K_0}$, y con ello $\omega(t) = R_0 \cdot (1 - e^{-t/T_0})$

La técnica anterior sin embargo, puede resultar extremadamente lenta e inexacta. ¿Por qué?
Solución: Lazo cerrado

Respuesta Transitoria de Sistemas Realimentados de 1^{er} Orden

Ejemplo fabricación acero



$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{K \cdot G(s) + 1} = \frac{K \cdot K_0}{T_0 \cdot s + K \cdot K_0 + 1} = \frac{\frac{K \cdot K_0}{K \cdot K_0 + 1}}{\frac{T_0}{K \cdot K_0 + 1} \cdot s + 1}$$

Si $R(s) = \frac{R_0}{s}$ (escalón de monto R_0 en $t = 0$), entonces:

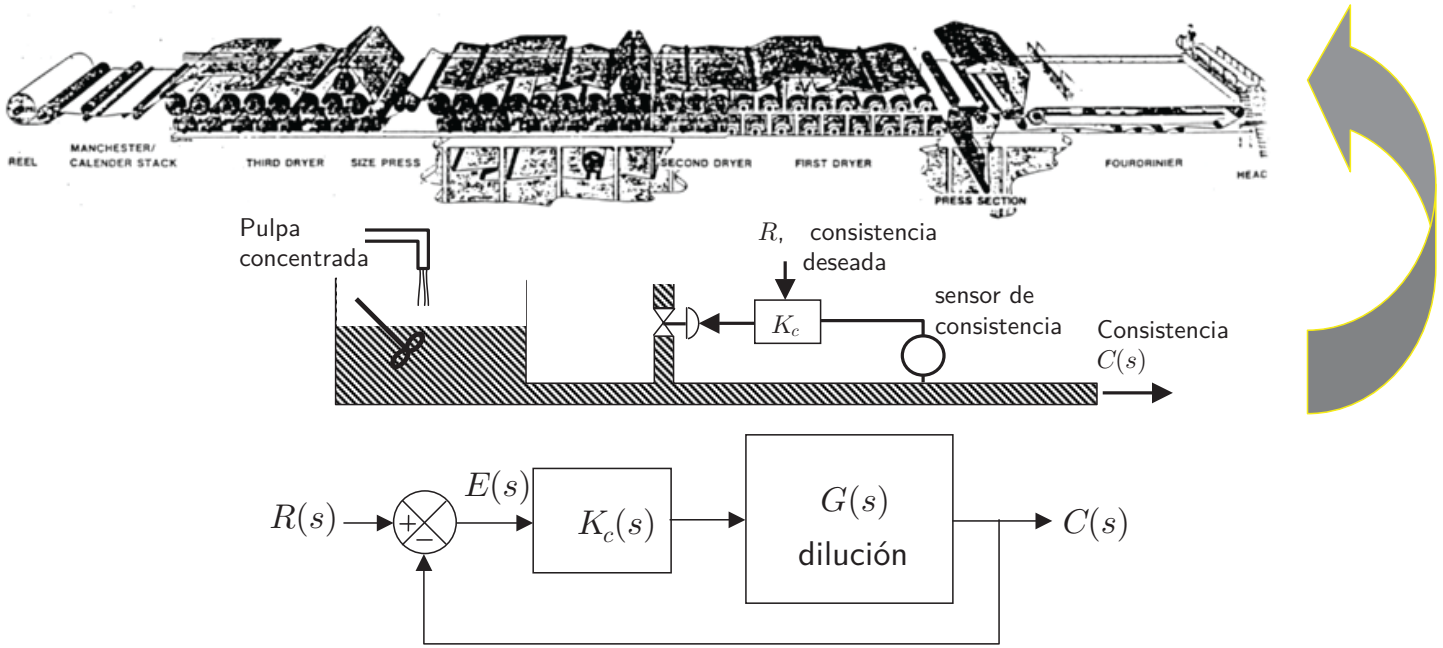
$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K \cdot K_0 \cdot R_0}{K \cdot K_0 + 1}}{s \cdot (\frac{T_0}{K \cdot K_0 + 1} \cdot s + 1)}$$

En el tiempo: $\omega(t) = \frac{K \cdot K_0 \cdot R_0}{K \cdot K_0 + 1}(1 - e^{\frac{K \cdot K_0 + 1}{T_0} t})$

- Si K es grande, la constante de la exponencial disminuye y el proceso es más rápido.
- Si K es grande, el valor final de $\omega(s)$ tenderá a R_0.

¿Cuánto es el error permanente para escalón de monto R_0?

Ejemplo: Control de Concentración de Pulpa en Fabricación de Papel



Suponiendo $K_c(s) = \frac{-K}{10s+1}$ y $G(s) = \frac{-1}{2s+1}$ determine:

1. La función $C(s)/R(s)$.
2. El error estacionario para un cambio escalón en la consistencia deseada $R(s) = A/s$.
3. El valor de K requerido para un error permisible en estado estacionario menor que 1%.