Repaso: Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales Invariantes

◁ ▷

Contenidos

1 Introducción . . . 1
2 Método 1: Solución por el Método de Variación de Parámetros . . . 2
2.1 Solución homogénea . . . 2
2.2 Solución particular . . . 4
3 Método 2: Solución Utilizando la Transformada de Laplace y Fracciones Parciales . . . 5
4 Método 3: Solución Utilizando la Matriz de Transición de Estados . . . 6
5 Expansión en Fracciones Parciales . . . 8
6 Obtención de la Ecuación Diferencial en el Espacio del Estado . . . 10
7 Cálculo de la Matriz de Transición de Estado $e^{\mathbf{A}t}$ . . . 12
7.1 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando series de Taylor . . . 12
7.2 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando la transformada de Laplace . . . 13
7.3 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ distintos . . . 13
7.4 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ repetidos . . . 15
8 Cálculo del Vector de Estado Inicial $\mathbf{x}(0)$ a Partir de las Condiciones Iniciales $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$, $\dddot{y}(0)$, ..., $y^{(n)}(0)$ de la Ecuación Diferencial (1) . . . 16
9 Ejemplos . . . 18
9.1 Ejemplo: Sistema Σ_1 . . . 18
9.2 Ejemplo: Sistema Σ_2 . . . 25

1 Introducción

Este documento resume los tres métodos principales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden n con parámetros invariantes definidas por:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u, \quad (1)$$

o en forma más compacta:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\frac{d^{n-i}y}{dt^{n-i}} = \sum_{i=0}^{m} b_{m-i}\frac{d^{m-i}u}{dt^{m-i}}, \quad (2)$$

con condiciones iniciales en $t = 0$,

$$\frac{d^i y}{dt^i}(0),\ i = 0, 1, 2 \ldots, n-1, \quad (3)$$

y donde $u : t \to u(t) \in \mathbb{R}$ es la señal de entrada, $y : t \to y(t)\mathbb{R}$ es la señal de salida, $t \in \mathbb{R}$ es la variable independiente, típicamente el tiempo, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, m$ son parámetros reales constantes, y $n \geq m$.

Los tres métodos principales para la solución de (1) con condiciones iniciales (3) que se explican a continuación son:

1. Método de Variación de Parámetros
2. Método Basado en la Transformada de Laplace y Descomposición en Fracciones Parciales
3. Método Basado en la Matriz de Transición de Estados

Al final de este documento se presenta paso a paso la aplicación de estos métodos a la obtención de la solución de dos sistemas descritos por (1). En los textos [1, 2] puede encontrar una gran cantidad de ejercicios resueltos que pueden ser útiles en el repaso de algunos de los métodos.

2 Método 1: Solución por el Método de Variación de Parámetros

El primer método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes fue desarrollado por Euler, quien observó que las soluciones tienen la forma $e^{\lambda t}$ con λ posiblemente un número complejo. Si $y(t) = e^{\lambda t}$ y $u(t) = 0$, se reemplazan en (1), es posible verificar que existen n posibles valores de λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ que satisfacen la ecuación diferencial homogénea (la ecuación (1) con $u(t) = 0$). Puede verificarse que la combinación lineal de términos $e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, también satisface (1) puesto que cada término por separado satisface (1). Definiendo la base de las soluciones como:

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\} \quad \stackrel{def}{=} \quad \left\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_{n-1} t}, e^{\lambda_n t}\right\} \tag{4}$$

la solución $y_h(t)$ a la ecuación diferencial homogénea será la combinación lineal:

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \tag{5}$$

con coeficientes c_i constantes (entre los cuales posiblemente algunos forman pares complejos conjugados) que dependen de los valores de las condiciones iniciales (3).

Por otro lado, la solución $y_p(t)$ a la ecuación diferencial no-homogénea (la ecuación (1) con $u(t) \neq 0$) se obtiene también en términos de la base (4), pero asumiendo coeficientes variables $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_i(t) \tag{6}$$

Para encontrar los valores de los coeficientes $a_i(t)$ es necesario considerar que la solución particular $y_p(t)$ satisface (1). La solución completa será entonces $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. A continuación se resumen los pasos para encontrar las soluciones homogénea y particular.

2.1 Solución homogénea

Como se mencionó, la solución homogénea se obtiene cuando la señal de entrada es nula, es decir $u(t) = 0$, $t \geq 0$. Por esta razón la solución también recibe el nombre de *respuesta natural* o *respuesta de entrada cero (zero-input response)*.

1. Reemplace $\frac{d^n}{dt^n}$ por s^n y $u = 0$ en (1) para obtener la *ecuación característica*:

$$q(s) \quad \stackrel{def}{=} \quad s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 \;=\; 0 \tag{7}$$

2. Obtenga las raíces λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ que resuelven (7) y construya una base de soluciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Como se asumió que (1) tiene coeficientes reales, entonces es posible construir una base $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ real considerando los siguientes casos:

   (a) **Raíz $\lambda_i \in \mathbb{R}$ no repetida**
   El elemento de la base simplemente se elige como

   $$y_i = e^{\lambda_i t} \tag{8}$$

   (b) **Par de raíces $\lambda_i = \lambda_j^\star = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ complejas conjugadas no repetidas**
   Si se definen en este caso los elementos de la base como

   $$\{y_i, y_j\} = \{e^{\lambda_i t}, e^{\lambda_j^\star t}\} \tag{9}$$

   estos serán complejos. Sin embargo, como $\lambda_j = \lambda_i^\star$, la base original $\{y_1, y_2\} = \{e^{\lambda_i t}, e^{\lambda_i^\star t}\}$ puede redefinirse como las siguientes combinaciones lineales de la base original:

   $$\begin{aligned}\{y_1, y_2\} &= \left\{\frac{e^{\lambda_i t} + e^{\lambda_i^\star t}}{2}, \frac{e^{\lambda_i t} - e^{\lambda_i^\star t}}{j2}\right\} \\ &= \left\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right\},\end{aligned} \tag{10}$$

   donde $\alpha = \mathrm{Re}\{\lambda_i\}$ y $\beta = \mathrm{Im}\{\lambda_i\}$, para obtener una base real.

   (c) **Raíz $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de multiplicidad k (repetida k veces)** En este caso los elementos de la base asociados a la raíz λ_i de multiplicidad k serán:

   $$\{y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k-1}\} = \left\{e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \ldots, t^{k-2}e^{\lambda_i t}, t^{k-1}e^{\lambda_i t}\right\} \tag{11}$$

   (d) **Par de raíces $\lambda_i = \lambda_j^* = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ complejas conjugadas de multiplicidad k (repetidas k veces)**

   $$\begin{aligned}\{y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}, \ldots, y_{i+2k-2}, y_{i+2k-1}\} = \big\{&e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t), te^{\alpha t}\cos(\beta t), te^{\alpha t}\sin(\beta t), \\ &t^2 e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \ldots \\ &t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^{k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\big\}\end{aligned} \tag{12}$$

   Nótese que este caso es una combinación de los dos anteriores. Además observe que si el par de raíces $\lambda_i, \lambda_i^* \in \mathbb{C}$ esta repetido k veces, esto significa que hay un total de $2k$ raíces asociadas a la base de soluciones homogéneas, por lo tanto, la ecuación diferencial deberá tener orden $n \geq 2k$.

3. Construya (5). Para obtener los coeficientes c_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, en general será necesario obtener primero la solución particular $y_p(t)$, y luego reemplazar $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ en $\frac{d^i y}{dt^i}|_{t=0} = \frac{d^i y}{dt^i}(0)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, para obtener un conjunto de ecuaciones que permitan encontrar los coeficientes c_i. Sin embargo, si $\left.\frac{d^i y_p}{dt^i}\right|_{t=0} = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, entonces es posible resolver el sistema de ecuaciones:

   $$\begin{aligned} y_h(t)\big|_{t=0} &= y(0) \\ \left.\frac{dy_h}{dt}(t)\right|_{t=0} &= \frac{dy}{dt}(0) \\ &\vdots \\ \left.\frac{d^{n-1}y_h}{dt^{n-1}}(t)\right|_{t=0} &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)\end{aligned}$$

   para encontrar los coeficientes c_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Notar que esta última situación ocurre siempre que el sistema original no esté forzado, ya que cuando $u(t) = 0$, se tiene automáticamente que $y_p(t) = 0$.

2.2 Solución particular

La solución particular a la ecuación no-homegénea (o forzada) y_p se obti mediante el *método de variación de parámetros* utilizando la base $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de (4) y definiendo:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_i(t) \tag{13}$$

donde a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son parámetros que deben encontrarse según se explica a continuación.

1. Para la función de entrada $u(t)$ calcule en forma explícita el lado derecho de (1) como:

$$f(t) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i}(t)$$

2. Como $y_p(t)$ debe satisfacer (1), al reemplazar (13) en (1) se obtiene un conjunto de n ecuaciones, la cuales al aplicar la regla de Cramer y el Wronskiano, equivalen a resolver:

$$a_i'(t) = \frac{W(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ f \end{bmatrix}, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

donde $a_i'(t) \stackrel{def}{=} \frac{da_i}{dt}$, y $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es el Wronskiano de la base (4), el cual se construye a partir de las derivadas $y_i^{(k)} \stackrel{def}{=} \frac{d^k y_i}{dt^k}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ de los elementos de la base como:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1'} & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{15}$$

y similarmente:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ f \end{bmatrix}, y_{i+1}, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & f & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{16}$$

3. Una vez obtenidas las n ecuaciones (14), deben integrarse para obtenerse los coeficientes $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

4. Una vez obtenida la expresión para $y_p(t)$ en (13), escriba la solución general como:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_i(t) \tag{17}$$

y reemplacela en el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y(t)\big|_{t=0} &= y(0) \\ \frac{dy}{dt}(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{dy}{dt}(0) \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0) \end{aligned}$$

para obtener los coeficientes c_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, a partir del sistema de ecuaciones resultantes. En la expresión anterior los términos del lado derecho $\frac{d^k y}{dt^k}(0)$ representan las n condiciones iniciales.

3 Método 2: Solución Utilizando la Transformada de Laplace y Fracciones Parciales

El método para encontrar la solución de la ecuación diferencial (1) empleando la transformada de Laplace se resume en los siguientes pasos.

1. Aplique la propiedad de la transformada de Laplace $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) s^{n-k}$$

a la ecuación diferencial (1), para obtener:

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[\sum_{k=1}^{i} y^{k-1}(0)s^{i-k}\right] &= \\ (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s) + \sum_{i=0}^{m} b_{m-i}\left[\sum_{k=1}^{i} u^{k-1}(0)s^{i-k}\right] & \qquad (18) \end{aligned}$$

La ecuación anterior es posible re-escribirla como:

$$Y(s) = F(s)U(s) + c\left(s, \mathbf{a}_{0:n-1}, \mathbf{b}_{0:m}, \mathbf{y}^{(0:n-1)}(0), \mathbf{u}^{(0:m-1)}(0)\right) \qquad (19)$$

donde

- $\mathbf{a}_{0:n-1} \stackrel{def}{=} \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$,
- $\mathbf{b}_{0:m} \stackrel{def}{=} \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m\}$,
- $\mathbf{y}^{(0:n-1)}(0) \stackrel{def}{=} \{y(0), y^{(1)}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\}$,
- $\mathbf{u}^{(0:m-1)}(0) \stackrel{def}{=} \{u(0), u^{(1)}(0), \ldots, u^{(m-1)}(0)\}$,
- $F(s)$ es la llamada *función de transferencia*, la cual se define como:

$$F(s) \stackrel{def}{=} \frac{p(s)}{q(s)} \qquad (20)$$

con

$$p(s) \stackrel{def}{=} b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \qquad (21)$$

y

$$q(s) \stackrel{def}{=} s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{22}$$

Observe que (22) corresponde al polinomio de la ecuación característica (7).

2. Descomponga (19) en términos más simples mediante fracciones parciales (vea la sección 5), para obtener:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(s)$$

donde $\phi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ son las fracciones parciales.

3. Finalmente calcule la respuesta $y(t)$ aplicando la transformada de Laplace inversa a la expresión anterior, es decir:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^{-1}\{\phi_i(s)\} \tag{23}$$

Observe que la solución homogénea puede obtenerse como

$$\boxed{y_h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{c\left(s, \mathbf{a}_{0:n-1}, y^{(0:n-1)}\right)\right\}}$$

puesto que $U(s) = 0$, mientras que la solución particular está dada por

$$\boxed{y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)U(s)\}}$$

4 Método 3: Solución Utilizando la Matriz de Transición de Estados

Otra alternativa para encontrar la solución de (1) es formular la ecuación diferencial como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el espacio de los estados como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{24}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ es la señal de entrada, y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m\times p}$ son las matrices que definen el sistema.

Algunas ventajas de este enfoque son:

- Sistema de primer orden
- Facilita la aplicación de métodos computacionales rápidos y eficientes
- Facilita el análisis de tipo geométrico de la trayectoria del estado

Al igual que en el caso escalar, $\dot{y} = \alpha y + \beta u$, en el cual la solución homogénea es $y_h(t) = e^{\alpha t}y(0)$ y la solución particular es $y_p(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\beta u(\tau)d\tau$, en el caso de (24) la solución puede escribirse como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{25}$$

El primer término del lado derecho de la expresión anterior corresponde a la solución homogénea, mientras que los últimos dos términos corresponden a la solución particular.

Cabe notar que la solución (25) a (24) puede encontrarse aplicando la transformada de Laplace a (24), lo cual resulta en:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (26)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (27)$$

Despejando $\mathbf{X}(s)$ a partir de (26) y reemplazando en (27) se obtiene:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

donde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad de $n \times n$.

Finalmente, aplicando la transformada de Laplace inversa a la ecuación anterior se obtiene (25). Esta última formulación que emplea la transformada de Laplace es importante porque entrega una manera alternativa para calcular la matriz de transición de estado $e^{\mathbf{A}t}$ como:

$$\phi(t) \stackrel{def}{=} e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} \quad (28)$$

En resumen, para resolver la ecuación diferencial (1) mediante su formulación en el espacio de los estados (24) es necesario:

- Transformar (1) a (24) según se explica en la sección 6.
- Calcular la matriz de transición de estado $e^{\mathbf{A}(t)}$, a partir de su serie de Taylor, su transformada de Laplace (28), o la diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$.
- Calcular la integral de convolución entre $e^{\mathbf{A}(t)}$ y $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$.

5 Expansión en Fracciones Parciales

Si $F(s) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}\{f(t)\}$ es una función racional (la razón de dos polinomios en s), la manera más simple para encontrar $f(t)$ a partir de su transformada de Laplace $F(s)$ es expandir $F(s)$ como la suma de términos más simples que pueden encontrarse en tablas. El método para realizar dicha descomposición de $F(s)$ se denomina *expansión mediante fracciones parciales* y se resume en los pasos que se describen a continuación:

1. Considere $F(s)$ representado por la razón de dos polinomios:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{p(s)}{q(s)} \tag{29}$$

   Factorizando los polinomios del denominador y el numerador $p(s)$ y $q(s)$, respectivamente, en productos de factores de sus raíces:

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} \tag{30}$$

   Es posible demostrar que es posible encontrar constantes C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que la expresión anterior pueda también escribirse como:

$$\begin{aligned} F(s) = & \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_{j-1}}{s - p_{j-1}} \\ & + \frac{C_j}{s - p_j} + \frac{C_{j+1}}{(s - p_j)^2} + \cdots + \frac{C_{j+k-1}}{(s - p_j)^k} \\ & + \frac{C_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \frac{C_n}{s - p_n} \end{aligned} \tag{31}$$

   En la expansión anterior los términos del lado derecho de la primera fila y última fila están asociados a raices (polos) p_i todos distintos reales o complejos, mientras que los términos de la segunda fila en el lado derecho están todos asociados a una raíz p_j que se encuentra repetida k veces.

2. Para encontrar los coeficientes C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, consideraremos los siguientes tres casos:

   (a) **Raíces p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, distintas**:
   Multiplicando ambos lados de la expansión de $F(s)$ en (31) por $(s - p_i)$ se tiene:

$$(s - p_i)F(s) = \frac{C_1(s - p_i)}{s - p_1} + \frac{C_2(s - p_i)}{s - p_2} + \cdots + C_i + \cdots + \frac{C_n(s - p_i)}{s - p_n}$$

   y por lo tanto, evaluando en $s = p_i$, se obtiene:

$$C_i = [(s - p_i)F(s)]_{s=p_i} = \frac{\prod_{j=1}^{m}(p_i - z_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(p_i - p_j)} \tag{32}$$

   (b) **Raíz p_i repetida k veces**:
   De manera similar al caso anterior, al multiplicar ambos lados de la expansión de $F(s)$ en (31) por $(s - p_i)^k$ se tiene:

$$C_{i+k-1} = \Big[(s - p_i)^k F(s)\Big]_{s=p_i} = \frac{\prod_{j=1}^{m}(p_i - z_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(p_i - p_j)} \tag{33}$$

   Para encontrar el coeficiente C_{i+k-2} del término que contiene $(s - p_i)^{k-1}$ es cuestión de tomar la derivada del lado derecho de (33) y evaluar nuevamente en $s = p_i$, y repetir este proceso para

encontrar C_{i+k-3}, C_{i+k-4}, hasta obtener C_i. En forma general, si C_h es el coeficiente asociado al término $1/(s-p_i)^h$, $h = 1, 2, 3, \ldots, k$:

$$C_h = \frac{1}{(k-h)!}\left[\frac{d^{k-h}}{ds^{k-h}}\left[(s-p_i)^k F(s)\right]\right]_{s=p_i}, \quad h = k, k-1, k-2, \ldots, 2, 1 \tag{34}$$

(c) **Par de raices complejas conjugadas** p_i:
En este caso es posible utilizar las mismas reglas que en el primer caso para raices distintas. Si $p_1 = \alpha + j\beta$ y $p_2 = \alpha - j\beta$, entonces:

$$C_1 = \frac{\prod_{j=1}^{m}(p_1 - z_j)}{\prod_{j=1, j\neq 1}^{n}(p_1 - p_j)} \tag{35}$$

y $C_2 = C_1^\star$, porque para $s \in \mathbb{C}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $f(s) = (s-r_1)(s-r_2) = s^2 - (r_1+r_2)s + r_1 r_2$ se cumple que

$$f(s^\star) = (s^\star)^2 - (r_1+r_2)s^\star + r_1 r_2 = [s^2 - (r_1+r_2)s + r_1 r_2]^\star = [f(s)]^\star$$

Por lo tanto, al evaluar (35) en $s = p_2 = p_1^\star$, se obtiene $C_2 = C_1^\star$, y así la expansión del par de raices complejas conjudas se puede re-escribir como:

$$g(s) = \frac{C_1}{s+p_1} + \frac{C_1^\star}{s+p_1^\star}$$

Al aplicar la transformada de Laplace inversa se tendrá:

$$g(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_1^\star e^{p_1^\star t}$$

Si $C_1 = c + jd$, entonces reagrupado las partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned} g(t) &= c[e^{p_1 t} + e^{p_1^\star t}] + jd[e^{p_1 t} - e^{p_1^\star t}] \\ &= ce^{\alpha t}[e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}] + jde^{\alpha t}[e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}] \\ &= 2ce^{\alpha t}\cos(\beta t) - 2de^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ &= 2e^{\alpha t}[c\cos(\beta t) - d\sin(\beta t)] \\ &= 2e^{\alpha t}\sin(\beta t + \phi),\ c = \sin(\phi),\ d = -\cos(\phi), \phi = \operatorname{atan}\left(-\frac{c}{d}\right) \end{aligned}$$

De esta manera es posible verificar que las exponenciales $e^{p_i t}$ y $e^{p_i^\star t}$, las cuales son complejas conjugadas, se pueden recombinar en términos de sinusoides que no contienen constantes complejas. Otra manera de obtener las constantes para las fracciones parciales asociadas a los términos complejos conjugados es utilizar un solo término de segundo orden de la forma:

$$g(s) = \frac{C_1 s + C_2}{s^2 + as + b}$$

en vez de dos términos primer orden como los de la ecuación (31). Luego se completan cuadrados de modo que $g(s)$ se escriba como:

$$\frac{C_1 s + C_2}{s^2 + as + b} = \frac{C_1(s + \frac{a}{2}) - C_1\frac{a}{2} + C_2}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b}$$

donde C_1, C_2 se eligen igualando coeficientes de $F(s)$ una vez que todas las demás posibles constantes en la expansión han sido encontradas.
Luego aplicando la transformada de Laplace inversa y la propiedad $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$:

se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = C_1 e^{-\frac{a}{2}t}\cos\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t\right) - \frac{C_1\frac{a}{2}-C_2}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}e^{-\frac{a}{2}t}\sin\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t\right)$$

Es posible verificar que la frecuencia angular de las sinusoides $\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$ coincide con β, puesto que las raíces de s^2+as+b son $s=-\frac{a}{2}\pm j\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$, y en el caso de la expansión en fracciones parciales simples las raices son $s=\alpha\pm j\beta$ según la definición de p_1 y p_2 consideradas al inicio de este caso con raices complejas conjugadas. Asímismo la tasa de decaimiento de la exponencial α (parte real de la raices $s=\alpha\pm j\beta$), coincide con la tasa de decaimiento de la exponencial $\frac{a}{2}$, de esta segunda forma. Igualando las constantes en ambas formas de obtener las solución es posible verificar que:

$$C_1 = 2c$$

mientras que

$$\frac{C_1\frac{a}{2}-C_2}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} = 2d$$

y por lo tanto,

$$C_2 = ac - 2d\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$$

6 Obtención de la Ecuación Diferencial en el Espacio del Estado

Definiendo el *operador derivador* como:

$$s = \ \tfrac{d}{dt} \tag{36}$$

es posible reescribir (1) como

$$q(s)y = p(s)u \tag{37}$$

donde $p(s)$ y $q(s)$ son expresiones polinomiales del operador derivador, y por lo tanto, son operadores sobre la señal de entrada u y la señal de salida y, respectivamente. Específicamente:

$$p(s) \ \stackrel{def}{=} \ \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \tag{38}$$

y

$$q(s) \ \stackrel{def}{=} \ s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \tag{39}$$

El *operador de transferncia* se define como el operador que relaciona la salida y con la entrada u como:

$$F(s) \ \stackrel{def}{=} \ \tfrac{y}{u} \ = \ \tfrac{p(s)}{q(s)} \tag{40}$$

permitiendo reescribir (37) como:

$$y = F(s)u \tag{41}$$

Si se introduce una variable (señal) auxiliar x, y se definen la salida y y la entrada u respectivamente como

$$y = p(s)x \tag{42}$$
$$u = q(s)x \tag{43}$$

es posible observar que el par de expresiones (42) y (43) es otra manera de expresar el sistema descrito por la ecuación diferencial (1). De hecho, la relación entre la salida y la entrada de un sistema descrito por estas dos últimas ecuaciones se mantiene igual a la del sistema (37), puesto que el operador de transferencia en ambos casos es el mismo:

$$F(s) = \frac{y}{u} = \frac{p(s)x}{q(s)x} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Introduciendo n variables de estado $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ definidas como derivadas de la varible auxiliar:

$$\begin{aligned} x_1 &= s^0 x = x \\ x_2 &= sx \\ x_3 &= s^2 x \\ &\vdots \\ x_i &= s^{i-1} x \\ &\vdots \\ x_n &= s^{n-1} x \end{aligned}$$

es posible plantear un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, cuyo operador de transferencia es igual al que se asocia con (37), y por lo tanto, el sistema de n ecuaciones constituye una representación alternativa del mismo sistema (37). Para obtener el sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden se derivan las n variables de estado con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= sx = x_2 \\ \dot{x}_2 &= s^2 x = x_3 \\ \dot{x}_3 &= s^3 x = x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= s^i x = x_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= s^n x = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i + u \end{aligned}$$

La última ecuación se obtiene utilizando la defincón $u = q(s)x$ introducida en (43). Para completar la descripción del sistema utilizando las variables de estado se reescribe la salida y como

$$y = p(s)x = \sum_{i=0}^{m} b_i x_i$$

Para tener una representación más compacta del sistema se prefiere una notación matricial (ver ecuación (24)):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \tag{44}$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el llamado *vector de estado*, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ es la *salida*, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ es la *entrada*, y las matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ se definen de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & b_2 - a_2 b_n & b_3 - a_3 b_n & b_4 - a_4 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{array}\right] \tag{47}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \tag{48}$$

Las matrices obtenidas se encuentran en la llamada *forma canónica controlable*. Existe otra forma equivalente llamada *forma canónica observable* en la cual las matrices son:

$$\mathbf{A_o} = \mathbf{A}^T \tag{49}$$
$$\mathbf{B_o} = \mathbf{C}^T \tag{50}$$
$$\mathbf{C_o} = \mathbf{B}^T \tag{51}$$
$$\mathbf{D_o} = \mathbf{D} \tag{52}$$

Es importante tener presente que el vector de estado $\mathbf{x}_o$ correspondiente a la forma canónica observable es un vector de estado distinto al de la forma canónica controlable $\mathbf{x}$. Ambos vectores representan la dinámica de un mismo proceso, pero en sistemas de coordenadas distintos, y por lo tanto, al utilizar condiciones iniciales para resolver el sistema (24) debe tenerse la precaución de utilizar la condición inicial en el sistema de coordenadas apropiado. Ambos vectores de estado $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_o$ se relacionan por una transformación de coordenadas.

7 Cálculo de la Matriz de Transición de Estado $e^{\mathbf{A}t}$

7.1 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando series de Taylor

La serie de Taylor de la exponencial de una matriz $\mathbf{A}t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots + \mathbf{A}^kt^k + \cdots \tag{53}$$

Una alternativa para calcular la matriz de transición de estado es calcular las potencias $\mathbf{A}^k t^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ de la matriz $\mathbf{A}t$ e identificar las series que se forman elemento a elemento en la sumatoria de matrices. Una vez identificadas las series elemento por elemento será posible reescribir la matriz de transición de estados en términos de las funciones equivalentes a cada serie.

7.2 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando la transformada de Laplace

Utilizando (28) es posible obtener la matriz de transición de estado. En términos simples, la expresión en (28) puede justificarse considerando que en el caso escalar $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} = (s-a)^{-1}$, mientras que en el caso matricial $\mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Luego,

$$e^{\mathbf{A}t} \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}. \tag{54}$$

7.3 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ distintos

Considere una matriz diagonal:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \;=\; \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

con elementos λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ no necesariamente distintos. Usando la expansión de Taylor (53) es fácil verificar que

$$e^{\mathbf{A}_d t} = e^{\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} t\right)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

y por lo tanto, el calculo de la exponencial de una matriz diagonal se reduce al calculo de exponenciales de cada elemento de la diagonal. Para aprovechar esta ventaja de las matrices diagonales, es posible encontrar una transformación de la matriz original $\mathbf{A}$ que la convierta en una matriz diagonal $\mathbf{A}_d$. Este proceso se denomina diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$ y emplea la matriz de vectores propios o eigenvectores $\mathbf{P}$ asociados a los eigenvalores de $\mathbf{A}$ como se explica a continuación.

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **distintos**, entonces los eigenvectores correspondientes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ serán linealmente independientes y forman una base para $\mathbb{R}^n$, la matriz $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \; \cdots \; \mathbf{v}_n]$ es invertible y

$$\boxed{\mathbf{A}_d \;=\; \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}} \tag{55}$$

El resultado (55) puede demostrarse recordando que por definición los eigenvectores satisfacen:

$$(\lambda_i I - \mathbf{A})\mathbf{v}_i \;=\; \mathbf{0}_{n\times 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}[\lambda_1\mathbf{v}_1\ \lambda_2\mathbf{v}_2\ \cdots\ \lambda_n\mathbf{v}_n] &= [\mathbf{A}\mathbf{v}_1\ \mathbf{A}\mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{A}\mathbf{v}_n],\\ \mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} &= \mathbf{A}\mathbf{P},\end{aligned}$$

y por lo tanto, multimplicando $\mathbf{P}^{-1}$ por la izquierda de la expresión anterior se obtiene (55).

El resultado (55) es útil para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ a partir de la matriz diagonal $\mathbf{A}_d = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{P}^{-1} \tag{56}$$

La relación (56) puede demostrarse considerando que la solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{57}$$

para un vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es (por (24)–(25) con $\mathbf{C} = \mathbf{I}$):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Si se introduce una transformación lineal de coordenadas $\mathbf{T}$ invertible de modo que:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \tag{58}$$

es posible por la transformación anterior obtener una ecuación diferencial matricial en las coordenadas del vector $\mathbf{z}$ como:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \tag{59}$$

Eligiendo la matriz de transformación como la inversa de la matriz de eigenvectores:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$$

la ecuación diferencial (59) se reduce a:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_d\mathbf{z} \tag{60}$$

cuya solución es:

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{z}(0)$$

Considerando que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ por (58), la solución anterior puede escribirse en términos del vector $\mathbf{x}$ como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{T}\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

demostrándose así (56).

7.4 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ repetidos

Los resultados de la sección anterior pueden generalizarse para el caso en que existan eigenvalores λ_i repetidos. La demostración de la generalización de los resultados anteriores se explica en detalle en [3, 4]. A continuación se el procedimiento general para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ se resume en los siguientes pasos:

1. Obtenga los eigenvalores $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ de $\mathbf{A}$.

2. Obtenga los vectores propios de $\mathbf{A}$:

   (a) Si λ_i no está repetido, resuelva

   $$\mathbf{P}\mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{A}\mathbf{P}$$

   donde $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n]$ es la matriz de eigenvectores $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ asociados a λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

   (b) Si λ_i está repetido k veces, es decir tiene multiplicidad k, resuelva:

   $$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^l \mathbf{p}$$

   con $l = 1, 2, 3, \ldots, k$. Para obtener k o más vectores propios generalizados $\mathbf{p}$. Luego deberá elegir un subconjunto de k vectores $\mathbf{p}$ que sean linealmente independientes para construir una matriz de eigenvectores generalizados $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n]$.

3. Calcule la matriz

   $$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{A}_d\mathbf{P}^{-1}$$

   donde $\mathbf{A}_d = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n)$. El orden de los valores propios debe ser consistente con el orden de los vectores propios empleados en $\mathbf{P}$.

4. Calcule la matriz

   $$\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}.$$

   Esta matriz debe ser nilpotente de orden k, esto significa que $\mathbf{N}^l = \mathbf{0}_{n\times n}$, para todo $l > k$.

5. Calcule la matriz de transición de estado como:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{P}^{-1}\left[\mathbf{I} + \mathbf{N}t + \frac{\mathbf{N}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{N}^k t^k}{k!}\right] \qquad (61)$$

Observación

Si los valores λ_i son complejos conjugados, los vectores propios también serán en general vectores complejos. Una manera de evitar trabajar con matrices que contienen elementos complejos es construir las matrices $\mathbf{A}_d$ y $\mathbf{P}$ como se explica a continuación.

Considere que el eigenvector $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ está asociado al vector propio $\mathbf{p}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i$. Si $\beta_i \neq 0$ entonces existirá un eigenvalor $\lambda_{i+1}^\star = \alpha_i - j\beta_i$ y un vector propio asociado $\mathbf{p}_i = \mathbf{v}_i - j\mathbf{w}_i$.
En vez de definir:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \lambda_i & 0 & \vdots \\ \cdots & 0 & \lambda_i^\star & \vdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}_d t} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & e^{\lambda_i t} & 0 & \vdots \\ \cdots & 0 & e^{\lambda_i^\star t} & \vdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{P} = [\cdots \ \mathbf{p}_i \ \mathbf{p}_i^\star \ \cdots]$$

defina

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \alpha & -\beta & \vdots \\ \cdots & \beta & \alpha & \vdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}_d t} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & e^{\alpha t}\cos(\beta t) & -e^{\alpha t}\sin(\beta t) & \vdots \\ \cdots & e^{\alpha t}\sin(\beta t) & e^{\alpha t}\cos(\beta t) & \vdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{P} = [\cdots \ \mathbf{w}_i \ \ \mathbf{v}_i \ \cdots]$$

La solución obtenida con esta redefinición de la base es exactamente la misma. La demostración de estos resultados puede encontrarse en [3, 4].

8 Cálculo del Vector de Estado Inicial $\mathbf{x}(0)$ a Partir de las Condiciones Iniciales $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$, $\dddot{y}(0)$, ..., $y^{(n)}(0)$ de la Ecuación Diferencial (1)

A partir de (25) y recordando que

- $e^{\mathbf{A}t}|_{t=0} = \mathbf{I}$
- $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$
- Para $f(\alpha,\beta) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} g(\alpha,\beta)d\beta$ la regla de Leibniz para la derivada de una integral establece que $\frac{df}{d\alpha} = g(\alpha,\beta)|_{\beta=b(\alpha)}\frac{db}{d\alpha} - g(\alpha,\beta)|_{\beta=a(\alpha)}\frac{da}{d\alpha} + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha,\beta)d\beta$

es posible obtener:

$$\begin{aligned} y(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \mathbf{D}u(0) \\ \dot{y}(0) &= \left[\mathbf{C}\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\right]_{t=0}\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}\mathbf{B}u(t)\right]_{t=0} + \left[\mathbf{C}\mathbf{A}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau\right]_{t=0} + \mathbf{D}\frac{du}{dt}(0) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) + \mathbf{D}\frac{du}{dt}(0) \\ &= \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{D}\frac{du}{dt}(0) \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) &= \mathbf{C}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2} \\
&= \mathbf{C}\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2} \\
&= \mathbf{C}\frac{d}{dt}\left[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\right] + \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2} \\
&= \mathbf{C}\left[\mathbf{A}\frac{d}{dt}\mathbf{x} + \mathbf{B}\frac{du}{dt}\right] + \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2} \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}\left[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\right] + \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt} + \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2} \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{B}u + \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt} + \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2}
\end{aligned}$$

Es posible verificar que la k-ésima derivada de la respuesta $y(t)$ del sistema satisface

$$y^{(k)}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{B}u + \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt} + \cdots + \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}} + \mathbf{D}\frac{d^ku}{dt^k}$$

Por lo tanto, para un sistema de orden n con condiciones inciales $y^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, es posible encontrar $\mathbf{x}(0)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}\mathbf{x}(0) &= y(0) - \mathbf{D}u(0) \\
\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) &= y^{(1)}(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) - \mathbf{D}\frac{du}{dt}(0) \\
\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) &= y^{(2)}(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt}(0) - \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2}(0) \\
&\vdots \\
\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) &= y^{(k)}(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt}(0) - \cdots - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}(0) - \mathbf{D}\frac{d^ku}{dt^k}(0) \\
&\vdots \\
\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) &= y^{(n-1)}(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt}(0) - \cdots - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(0) - \mathbf{D}\frac{d^nu}{dt^n}(0)
\end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones anteriores puede escribirse matricialemnte como:

$$\mathcal{O}\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{y}}$$

con

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y(0) - \mathbf{D}u(0) \\ y^{(1)}(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) - \mathbf{D}\frac{du}{dt}(0) \\ y^{(2)}(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt}(0) - \mathbf{D}\frac{d^2u}{dt^2}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}u(0) - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{du}{dt}(0) - \cdots - \mathbf{C}\mathbf{B}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(0) - \mathbf{D}\frac{d^nu}{dt^n}(0) \end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{O}$ es invertible, entonces el sistema es *observable*. Esto significa que se puede inferir el estado $\mathbf{x}(0)$ a partir del conocimiento de la entrada $u(t)$, la salida $y(t)$ y las derivadas hasta orden $n-1$ en $t=0$ de la entrada y la salida:

$$\mathbf{x}(0) \;=\; \mathcal{O}^{-1}\bar{\mathbf{y}}.$$

Si $u(t)$ es tal que $u(0)=0$ y $\frac{d^k u}{dt^k}(0)=0$, $k=1,2,\ldots,n-1$, entonces el estado inicial simplemente estará dado por:

$$\mathbf{x}(0) \;=\; \mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix} y(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

Otra situación en la que el valor de $u(t)$ y sus derivadas en $t=0$ no afecta el valor del estado inicial es cuando $\mathbf{CB}=0$ y $\mathbf{D}=0$. En este caso también la expresión anterior permite calcular el valor inicial del vector de estado a partir de las condiciones inciales de la respuesta.

9 Ejemplos

En esta sección se consideran dos ejemplos, los cuales se resolveran con cada uno de los métodos antes expuestos:

Sistema 1 (Σ_1)

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \qquad & \ddot{y}+\dot{y}=u \\ & IC:\ y(0)=1, \dot{y}(0)=-2 \\ & u(t)=\sin(t) \end{aligned} \tag{62}$$

Sistema 2 (Σ_2)

$$\begin{aligned} \Sigma_2: \qquad & y^{(4)}+4y^{(3)}+8y^{(2)}+8y^{(1)}+4y=u^{(2)}-u \\ & IC:\ y(0)=1,\ y^{(1)}(0)=-1,\ y^{(2)}(0)=0,\ y^{(3)}(0)=0 \\ & u(t): \text{escalón unitario} \end{aligned} \tag{63}$$

A continuación se muestra la aplicación de los tres métodos aplicados al sistema Σ_1, y en la sección subsiguiente la aplicación de los mismos tres métodos al sistema Σ_2.

9.1 Ejemplo: Sistema Σ_1

Σ_1-Método 1

1. La ecuación característica del sistema Σ_1 es

$$q(\lambda)=\lambda^2+\lambda=0,$$

y sus raíces son $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. Por lo tanto, la base de las soluciones es:

$$\{y_1,y_2\}=\{e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t}\}=\{1,e^{-t}\}$$

2. Obtenemos primero la solución particular empleando el método de variación de parámetros (ver sección 2.2). Para esto se construye el Wronskiano:

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

y las ecuaciones para los parámetros variables:

$$\dot{a}_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \sin(t) & -e^{-t} \end{vmatrix}}{|W(y_1, y_2)|} = \frac{-e^{-t}\sin(t)}{-e^{-t}} = \sin(t),$$

$$\dot{a}_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin(t) \end{vmatrix}}{|W(y_1, y_2)|} = \frac{\sin(t)}{-e^{-t}} = -e^{t}\sin(t).$$

Integrando ambas expresiones se obtine:

$$a_1(t) = -\cos(t)$$

y

$$a_2(t) = -\int_0^t e^{\tau}\sin(\tau)d\tau = -e^t\sin(t) + \int_0^t e^{\tau}\cos(\tau)d\tau = -e^t\sin(t) + e^t\cos(t) - 1 + \int_0^t e^{\tau}\sin(\tau)d\tau$$

Como

$$-\int_0^t e^{\tau}\sin(\tau)d\tau = -e^t\sin(t) + e^t\cos(t) - 1 + \int_0^t e^{\tau}\sin(\tau)d\tau$$

es posible concluir que

$$-2\int_0^t e^{\tau}\sin(\tau)d\tau = -e^t\sin(t) + e^t\cos(t) - 1$$

Por lo lo tanto,

$$a_2(t) = \frac{1}{2}e^t[\cos(t) - \sin(t)] - \frac{1}{2}$$

La solución particular será entonces

$$y_p(t) = a_1(t)y_1(t) + a_2(t)y_2(t) = -\cos(t) - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}[\cos(t) - \sin(t)] = -\frac{e^{-t}}{2} - \frac{1}{2}[\cos(t) + \sin(t)]$$

3. La solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1 + c_2e^{-t}$$

y la solución general

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Empleando las condiciones iniciales, se determinan las constantes c_1 y c_2 a partir de:

$$y(0) = y_h(0) + y_p(0) = c_1 + c_2 - 1 = 1$$

y

$$\dot{y}(0) = \dot{y}_h(0) + \dot{y}_p(0) = -c_2 = -2,$$

las cuales se resuelven para encontrar $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$.

La solución general será entonces:

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}[\cos(t) + \sin(t)]$$

Como $\sin(t+\phi) = \sin(t)\cos(\phi) + \cos(t)\sin(\phi)$, es posible definir $\cos(\phi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sin(\phi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, y por lo tanto, $\tan(\phi) = \sin(\phi)/\cos(\phi) = 1$, implica $\phi = -3\pi/4$ (considerando el cuadrante), y la solución puede expresarse como:

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

■

Para verificar que la solución se obtuvo correctamente puede emplearse un software de cálculo simbólico como Maple. En Maple la solución se obtiene ejecutando el código que se muestra en la fig. 1, con el cual se obtiene la gráfica de la respuesta que se presenta en la fig. 2.

```
> ode1:=diff(y(t),t$2)+diff(y(t),t)-sin(t);

                    / 2      \
                    |d       |   /d      \
             ode1 := |--- y(t)| + |-- y(t)| - sin(t)
                    |  2     |   \dt     /
                    \dt      /

> ans1:=dsolve(ode1);

     ans1 := y(t) = - 1/2 sin(t) - 1/2 cos(t) - exp(-t) _C1 + _C2

> yf:=subs({_C1=-3/2,_C2=0},rhs(ans1));

            yf := - 1/2 sin(t) - 1/2 cos(t) + 3/2 exp(-t)

> plot(yf,t=0..20);
```

Figura 1: Código en Maple para la solución del sistema Σ_1.

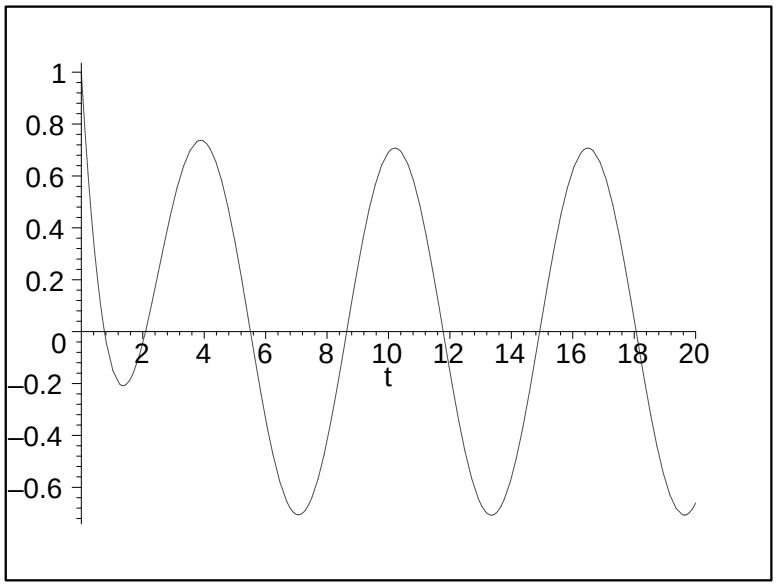


Figura 2: Solución del sistema Σ_1 obtenida empleando Maple.

La ecuación diferencial (62) puede implementarse en Simulink como se ilustra en la fig. 3.

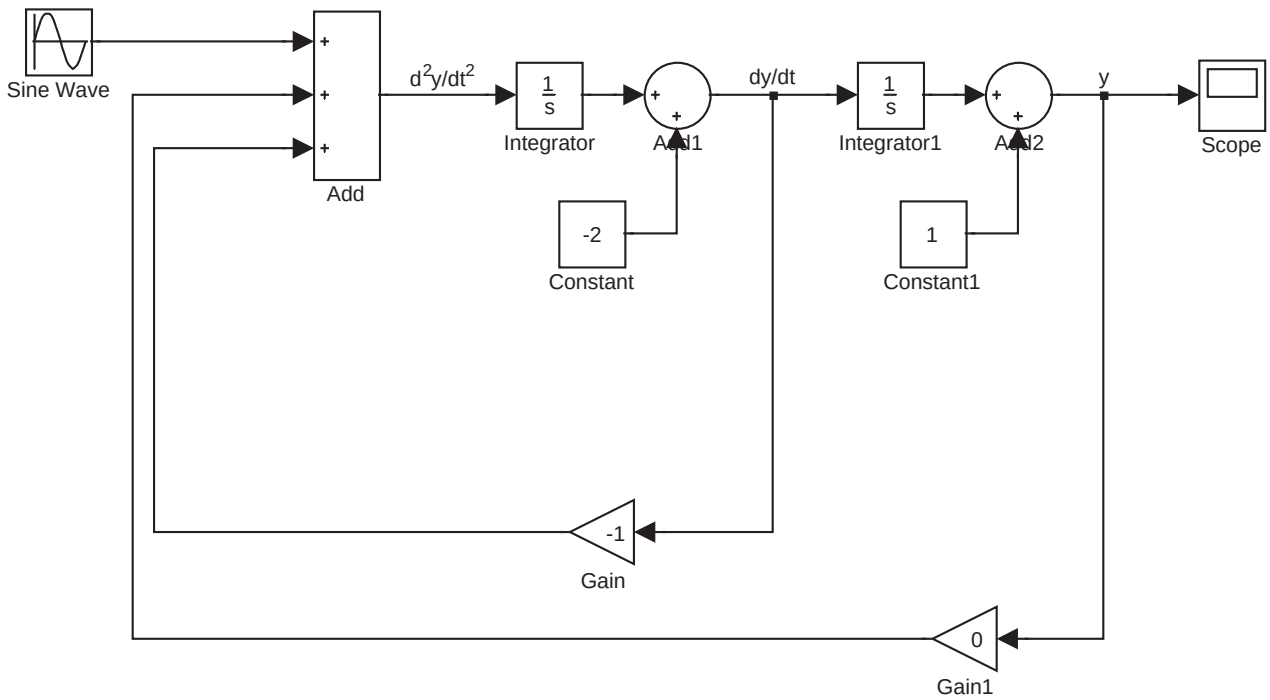


Figura 3: Implementación del sistema Σ_1 en Simulink.

El resultado obtenido utilizando Simulink es consistente con la evaluación exacta del resultado en forma cerrada obtenido con Maple como se puede apreciar en la fig. 4. La falta de suavidad en la curva se debe a que el paso de integración no es lo suficientemente pequeño.

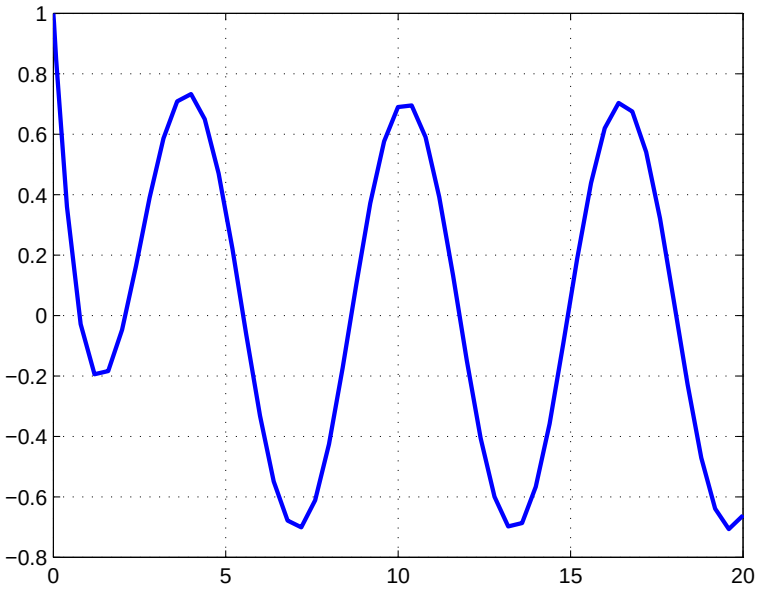


Figura 4: Solución numérica del sistema Σ_1 empleando Simulink.

Σ_1-Método 2

1. Aplicando la transformada de Laplace a (62):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + sY(s) - y(0) = U(s)$$

Reagrupando términos

$$s(s+1)Y(s) = U(s) + sy(0) + y^{(1)}(0) + y(0)$$

Reemplazando los valores de las condiciones iniciales y la trasnformada de Laplace de la señal de entrada $U(s) = \frac{1}{s^2+1}$ en la ecuación anterior se tiene

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+1)} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s(s+1)}$$

2. Empleando la descomposición en fracciones parciales:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} - \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] \\ &= \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+j} + \frac{C_4}{s-j} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right]_{s=0} = 1 \\ C_2 &= \left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]_{s=-1} = -\frac{1}{2} \\ C_3 &= \left[\frac{1}{s(s+1)(s-j)}\right]_{s=-j} = -\frac{1}{2(1-j)} \\ C_4 &= \left[\frac{1}{s(s+1)(s+j)}\right]_{s=+j} = -\frac{1}{2(1+j)} = C_3^\star \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-j}\frac{1}{s+j} + \frac{1}{1+j}\frac{1}{s-j}\right]$$

3. Aplicando la transformada inversa de Laplace a la expresión anterior:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\left[\frac{1+j}{2}e^{-jt} + \frac{1-j}{2}e^{jt}\right] && (64)\\ &= \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} + \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right] && (65)\\ &= \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}[\cos(t)+\sin(t)] && (66)\end{aligned}$$

Es posible observar que la solución obtenida es exactamente la misma que la obtenida emplenado el primer método. ■

Σ_1-Método 3

1. En primer lugar será necesario obtener la representación del sistema (62) en el espacio de los estados. Para esto se procede como se explica en 6, para obtener las matrices en forma canónica controlable:

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

2. Luego debe calcularse la matriz de transición de estado mediante alguno de los tres métodos descritos en la sec. 7.

   (a) **Empleanto la serie de Taylor de $e^{\mathbf{A}t}$**: Es necesario calcular:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\\ A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ A^3 &= A\cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = A\end{aligned}$$

   Es posible concluir que $A^{2k} = A^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, mientras que $A^{2k+1} = A$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Luego,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \ldots\\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\\ \hline 0 & 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots\end{array}\right]\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

   (b) **Empleanto la tranformada de Laplace para encontrar $e^{\mathbf{A}t}$**: Utilizando (54) o (28) es posible obtener la matriz de transición de estado. El primer paso es calcular $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

(c) **Empleando la diagonalización de $\mathbf{A}$**: Considerando los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, que se obtienen a partir de la ecuación característica:

$$q(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s(s+1) = 0.$$

Los eigenvectores se obtienen resolviendo:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^s \\ p_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \lambda_i, i = 1, 2.$$

Específicamente, los eigenvectores son:

$$\mathbf{p}^{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Utilizando $\mathbf{A}_d$, se calcula:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

3. Una vez obtenida la matriz de transición de estado, la solución (25) se puede escribir para el sistema Σ_1 como:

$$\begin{aligned} y(t) &= [1\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t [1\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(\tau) d\tau \\ &= x_1(0) + x_2(0)(1-e^{-t}) + \int_0^t (1-e^{-(t-\tau)}) \sin(\tau) d\tau \\ &= x_1(0) + x_2(0)(1-e^{-t}) - \cos(t) - e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \sin(\tau) d\tau \\ &= x_1(0) + x_2(0)(1-e^{-t}) - \cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{e^{-t}}{2} \\ &= x_1(0) + x_2(0)(1-e^{-t}) - \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

Como $y(0) = 1$, se tiene que cumplir que

$$y(0) = 1 = x_1(0) - 1 \ \Rightarrow \ x_1(0) = 2$$

y

$$\dot{y}(0) = -2 = x_2(0) \ \Rightarrow \ x_2(0) = -2$$

Finalmente la solución se reduce a:

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}[\cos(t) + \sin(t)]$$

Una vez más es posible confirmar la misma solución que la obtenida mediante los dos métodos precedentes.

■

9.2 Ejemplo: Sistema Σ_2

Por comodidad se enuncia nuevamente el sistema Σ_2 presentado en (63):

$$\begin{aligned}\Sigma_2: \quad & y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 8y^{(1)} + 4y = u^{(2)} - u \\ & IC:\ y(0) = 1,\ y^{(1)}(0) = -1,\ y^{(2)}(0) = 0,\ y^{(3)}(0) = 0 \\ & u(t): \text{escalón unitario}\end{aligned}$$

A continuación se muestra el uso de los tres métodos aplicados en la obtención de la solución del sistema Σ_2.

Σ_2-Método 1

1. La ecuación característica del sistema Σ_1 es

$$q(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0.$$

Es posible verificar que esta ecuación característica corresponde a la factorización:

$$q(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

Cada uno de los polinomios cuadráticos tiene raíces:

$$\lambda_1 = -1 + j$$

y

$$\lambda_2 = -1 - j$$

Por lo tanto, tenemos un par de raíces complejas conjugadas que además se encuentra repetido. Esto implica que la base de las soluciones es:

$$\begin{aligned}\{y_1, y_2, y_3, y_4\} &= \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_2 t}\} \\ &= \{e^{(-1+j)t}, e^{(-1-j)t}, te^{(-1+j)t}, te^{(-1-j)t}\} \\ &= \{e^{-t}\sin(t), e^{-t}\cos(t), te^{-t}\sin(t), te^{-t}\cos(t)\}\end{aligned}$$

2. Obtenemos primero la solución particular empleando el método de variación de parámetros (ver sección 2.2). Para esto se construye el Wronskiano:

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & y_4(t) \\ \frac{dy_1}{dt} & \frac{dy_2}{dt} & \frac{dy_3}{dt} & \frac{dy_4}{dt} \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} & \frac{d^2y_2}{dt^2} & \frac{d^2y_3}{dt^2} & \frac{d^2y_4}{dt^2} \\ \frac{d^3y_1}{dt^3} & \frac{d^3y_2}{dt^3} & \frac{d^3y_3}{dt^3} & \frac{d^3y_4}{dt^3} \end{bmatrix}$$

Calculando las derivadas de la base $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) \\
\frac{dy_2}{dt} &= -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\
\frac{dy_3}{dt} &= e^{-t}\sin(t) - te^{-t}\sin(t) + te^{-t}\cos(t) \\
\frac{dy_4}{dt} &= e^{-t}\cos(t) - te^{-t}\cos(t) - te^{-t}\sin(t) \\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= e^{-t}\sin(t) - 2\,e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\
\frac{d^2y_2}{dt^2} &= e^{-t}\cos(t) + 2\,e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) \\
\frac{d^2y_3}{dt^2} &= -2e^{-t}\sin(t) + 2e^{-t}\cos(t) + te^{-t}\sin(t) - 2te^{-t}\cos(t) - te^{-t}\sin(t) \\
\frac{d^2y_4}{dt^2} &= -2e^{-t}\cos(t) - 2e^{-t}\sin(t) + te^{-t}\cos(t) + 2te^{-t}\sin(t) - te^{-t}\cos(t) \\
\frac{d^3y_1}{dt^3} &= -e^{-t}\sin(t) + 3e^{-t}\cos(t) + 3e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) \\
\frac{d^3y_2}{dt^3} &= -e^{-t}\cos(t) - 3e^{-t}\sin(t) + 3e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) \\
\frac{d^3y_3}{dt^3} &= 3e^{-t}\sin(t) - 6e^{-t}\cos(t) - 3e^{-t}\sin(t) - te^{-t}\sin(t) + 3te^{-t}\cos(t) + 3te^{-t}\sin(t) - te^{-t}\cos(t) \\
\frac{d^3y_4}{dt^3} &= 3e^{-t}\cos(t) + 6e^{-t}\sin(t) - 3e^{-t}\cos(t) - te^{-t}\cos(t) - 3te^{-t}\sin(t) + 3te^{-t}\cos(t) + te^{-t}\sin(t)
\end{aligned}$$

El determinante del Wronskiano se reduce luego de simplificar a

$$|W(y_1, y_2, y_3, y_4)| = 4e^{(-4t)}$$

Sea $f(t) = \frac{d^2u}{dt^2} - u$ con $u = u(t)$ definido como la función escalón, entonces:

$$f(t) = \delta'(t) - u(t).$$

Definiendo además $\mathbf{v} = [0\ 0\ 0\ f(t)]^T$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|W(\mathbf{v}, y_2, y_3, y_4)| &= 2e^{-3t}(\cos(t) + t\sin(t))f(t) \\
|W(y_1, \mathbf{v}, y_3, y_4)| &= 2e^{-3t}(-\sin(t) + t\cos(t))f(t) \\
|W(y_1, y_2, \mathbf{v}, y_4)| &= -2e^{-3t}\sin(t)f(t) \\
|W(y_1, y_2, y_3, \mathbf{v})| &= -2e^{-3t}\cos(t)f(t)
\end{aligned}$$

Con esto es posible obtener las relaciones $\dot{a}_i(t) = |W(y_1, y_2, \ldots, \mathbf{v}, y_{i+1}, \ldots, y_n)|/|W(y_1, y_2, \ldots, y_n)|$ de los coeficientes de la solución particular:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1(t) &= \frac{1}{2}e^t(\cos(t) + t\sin(t))f(t) \\
\dot{a}_2(t) &= \frac{1}{2}e^t(\cos(t) + t\sin(t))f(t) \\
\dot{a}_3(t) &= \frac{1}{2}e^t\sin(t)f(t) \\
\dot{a}_4(t) &= \frac{1}{2}e^t\cos(t)f(t)
\end{aligned}$$

Integrando las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}e^t\cos(t) - \frac{1}{4}e^t\sin(t) + \frac{1}{4}e^t t\cos(t) - \frac{1}{4}e^t t\sin(t) \\
a_2(t) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^t\cos(t) + \frac{1}{2}e^t\sin(t) - \frac{1}{4}e^t t\cos(t) - \frac{1}{4}e^t t\sin(t) \\
a_3(t) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}e^t\sin(t) \\
a_4(t) &= -\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^t\cos(t) + \frac{1}{4}e^t\sin(t)
\end{aligned}$$

La respuesta particular será entonces:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{4} a_i(t)y_i(t) = \frac{1}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{3}{4}e^{-t}t\sin(t) + \frac{1}{4}e^{-t}t\cos(t) - \frac{1}{4}$$

Es posible verificar que

$$\begin{aligned}
y_p(0) &= 0 \\
\frac{dy_p}{dt}(0) &= 0 \\
\frac{d^2y_p}{dt^2}(0) &= 1 \\
\frac{d^3y_p}{dt^3}(0) &= -4
\end{aligned}$$

3. Por otro lado, la solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t) + c_4y_4(t) = c_1e^{-t}\sin(t) + c_2e^{-t}\cos(t) + c_3te^{-t}\sin(t) + c_4te^{-t}\cos(t)$$

y la solución general

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Empleando las condiciones iniciales, se determinan las constantes c_i, $i = 1, 2, 3, 4$ a partir de:

$$\begin{aligned}
y(0) &= y_h(0) + y_p(0) = c_2 = 1 \\
\dot{y}(0) &= \dot{y}_h(0) + \dot{y}_p(0) = c_1 - c_2 + c_4 = -1 \\
\ddot{y}(0) &= \ddot{y}_h(0) + \ddot{y}_p(0) = -2c_1 + 2c_3 - 2c_4 + 1 = 0 \\
\dddot{y}(0) &= \dddot{y}_h(0) + \dddot{y}_p(0) = 2c_1 + 2c_2 - 6c_3 - 4 = 0
\end{aligned}$$

las cuales se resuelven para encontrar $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = 1$, $c_3 = -\frac{1}{2}$ y $c_4 = \frac{1}{2}$.

La solución general será entonces:

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) - \frac{1}{2}te^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}te^{-t}\cos(t) \\
&\quad + \frac{1}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{3}{4}e^{-t}t\sin(t) + \frac{1}{4}e^{-t}t\cos(t) - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{5}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t}\sin(t) + \frac{3}{4}te^{-t}\cos(t) - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

De lo anterior $\lim_{t\to\infty} y(t) = -\frac{1}{4}$, como puede apreciarse en la fig. 5. ■

Al igual que en el ejemplo anterior, es posible graficar la solución obtenida en forma analítica y compararla cualitativamente con aquella obtenida numéricamente utilizando una herramienta de simulación como Simulink. La gráfica realizada en Maple de la solución analítica se muestra en la figura 5.

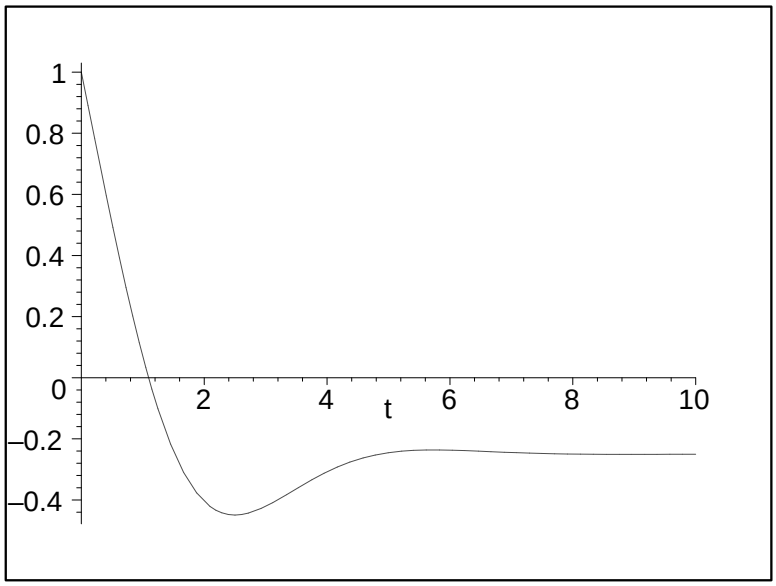


Figura 5: Solución del sistema Σ_2 obtenida empleando Maple.

La ecuación diferencial (63) puede implementarse en Simulink como se ilustra en la fig. 6.

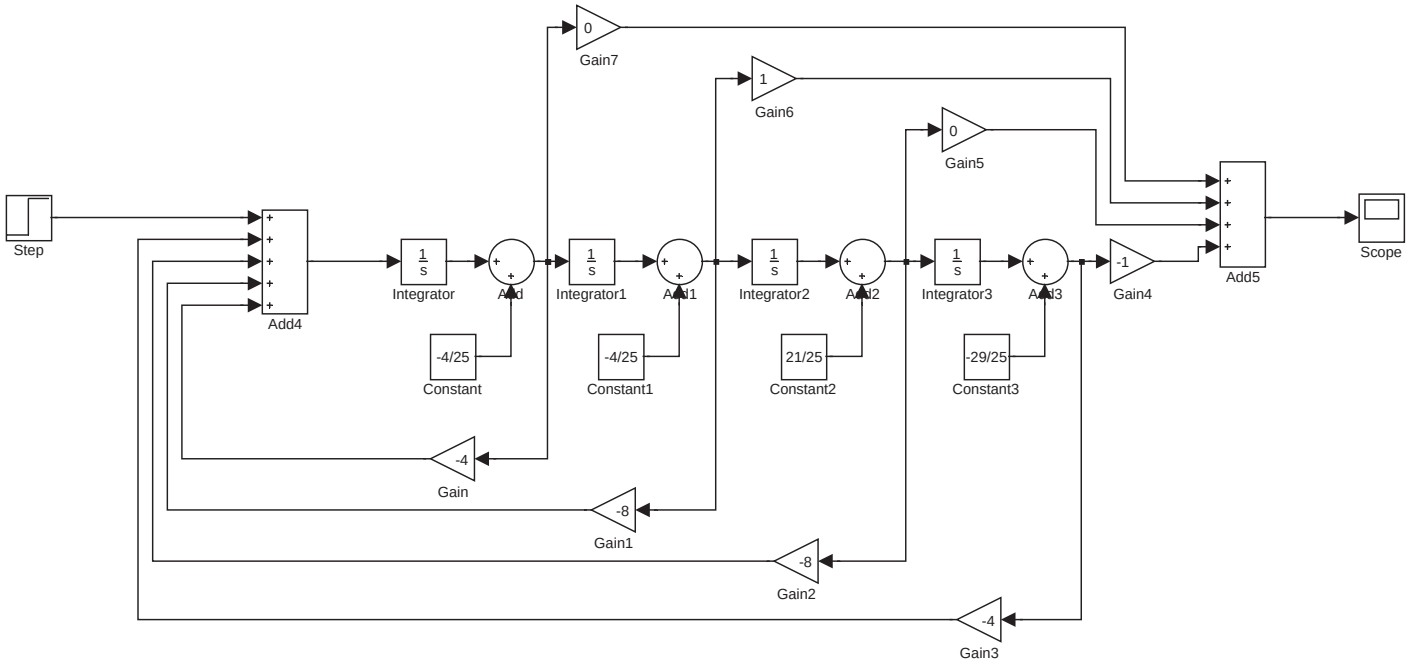


Figura 6: Implementación del sistema Σ_2 en Simulink.

Una vez más el resultado obtenido utilizando Simulink que se presenta en la fig. 7 es consistente con la evaluación exacta del resultado obtenido analíticamente. con Maple como se puede apreciar en la fig. 7. A diferencia de la simulación realizada para el sistema Σ_1, en este caso el paso de integración es el adecuado para obtener una curva suave y fiel a la curva exacta realizada a partir de la solución analítica.

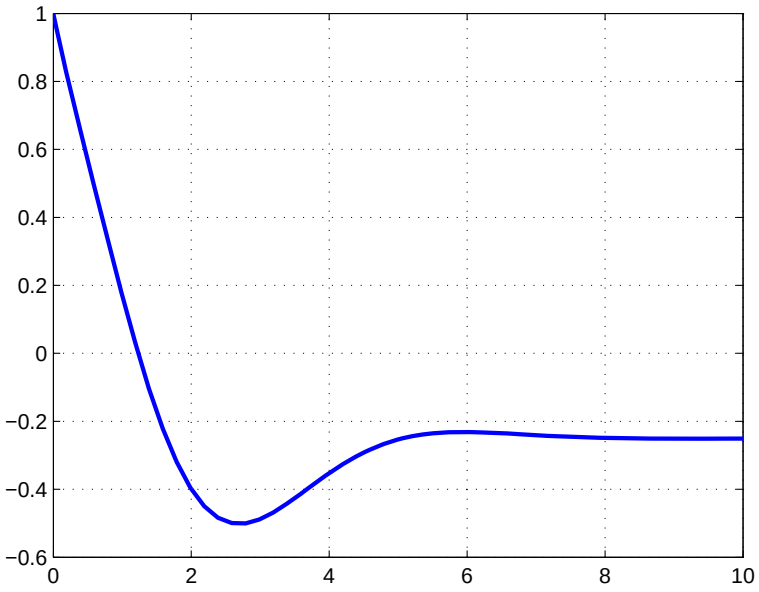


Figura 7: Solución numérica del sistema Σ_2 empleando Simulink.

Σ_2-Método 2

1. Aplicando la transformada de Laplace a (63):

$$\begin{aligned} s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y^{(1)}(0) - sy^{(2)}(0) - y^{(3)}(0) & \\ +4\left[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy^{(1)}(0) - y^{(2)}(0)\right] & \\ +8\left[s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right] & \\ +8\left[sY(s) - y(0)\right] & \\ +4Y(s) &= s^2U(s) - su(0) - u^{(1)}(0) - U(s) \end{aligned}$$

Reagrupando términos

$$\begin{aligned} (s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4)Y(s) &= s^3y(0) + s^2[y^{(1)}(0) + 4y(0)] + s[y^{(2)}(0) + 4y^{(1)}(0) + 8y(0)] \\ &\quad +[y^{(3)}(0) + 4y^{(2)}(0) + 8y^{(1)}(0) + 8y(0)] \\ &\quad +(s^2 - 1)U(s) - su(0) - u^{(1)}(0) \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de las condiciones iniciales y la trasnformada de Laplace de la señal de entrada $U(s) = \frac{1}{s}$ en la ecuación anterior se tiene

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

con la solución a entrada cero (*zero-input response*)

$$Y_{zi}(s) = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}\left[s^3 + 3s^2 + 4s\right]$$

y la solución a estado cero (*zero-state response*)

$$Y_{zs}(s) = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}\left[s - \frac{1}{s} - su(0) - u^{(1)}(0)\right]$$

2. Notando que las raíces de la ecuación característica son $\lambda = -1 \pm j$ y están repetidas dos veces, la descomposición en fracciones parciales tendrá la forma:

$$Y_{zi}(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 4s}{(s-\lambda)^2(s-\lambda^\star)^2} = \frac{C_1}{s-\lambda} + \frac{C_2}{(s-\lambda)^2} + \frac{C_3}{s-\lambda^\star} + \frac{C_4}{(s-\lambda^\star)^2}$$

con $\lambda = -1 + j$.

Luego,

$$C_2 = [Y_{zi}(s)(s-\lambda)^2]_{s=\lambda} = \left[\frac{s^3 + 3s^2 + 4s}{(s-\lambda^\star)^2}\right]_{s=\lambda} = \frac{(-1+j)^3 + 3(-1+j)^2 + 4(-1+j)}{(j2)^2} = \frac{1}{2}$$

y

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{ds}Y_{zi}(s)(s-\lambda)^2\right]_{s=\lambda} = \left[\frac{(3s^2+6s+4)(s-\lambda^\star)^2 - 2(s^3+3s^2+4s)(s-\lambda^\star)}{(s-\lambda^\star)^4}\right]_{s=\lambda} \\ &= \left[\frac{(-2)(j2)^2 - 2(-2)(j2)}{(j2)^4}\right] = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ya que $\lambda^2 = (-1+j)(-1+j) = -2j$ y $\lambda^3 = \lambda^2(-1+j) = 2 + j2$.

Dado que la raíz asociada a C_3 es el conjugado de la raíz asociada a C_1, entonces $C_3 = C_1^\star = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$. Similarmente, $C_4 = C_2^\star = \frac{1}{2}$.

Aplicando la transformada inversa de Laplace, la respuesta a entrada cero es

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) &= \frac{e^{-t}}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) + \frac{je^{-t}}{2}(e^{jt} - e^{-jt}) + \frac{1}{2}\left(te^{-t}(e^{jt} + e^{-jt})\right) \\ &= e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) + te^{-t}\cos(t) \end{aligned}$$

3. Similarmente, la solución a estado cero puede obtenerse considerando que:

   - $u(0) = 1$
   - $u^{(1)}(0) = \delta(0)$
   - $\delta(0)t = 0$, para $t = 0$.
   - $\delta(0)\sin(t) = 0$, para $t = 0$.

   con lo cual la respuesta a estado cero se reduce a:

$$Y_{zs}(s) = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}\left[-\frac{1}{s} - \delta(0)\right]$$

   o reagrupando:

$$Y_{zs}(s) = \underbrace{\frac{-1}{s(s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4)}}_{Y_{zs1}} + \underbrace{\frac{-\delta(0)}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}}_{Y_{zs2}}$$

   Los términos Y_{zs1} e Y_{zs2} pueden expandirse mediante fracciones parciales según:

$$Y_{zs1} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s-\lambda} + \frac{C_2}{(s-\lambda)^2} + \frac{C_3}{s-\lambda^\star} + \frac{C_4}{(s-\lambda^\star)^2}$$

y

$$Y_{zs2} = \frac{D_1}{s-\lambda} + \frac{D_2}{(s-\lambda)^2} + \frac{D_3}{s-\lambda^\star} + \frac{D_4}{(s-\lambda^\star)^2}$$

con $\lambda = -1+j$ y

$$\begin{aligned}
C_0 &= [Y_{zs1}(s)s]_{s=0} = -\frac{1}{4} \\
C_2 &= C_4^\star = [Y_{zs1}(s)(s-\lambda)^2]_{s=\lambda} = \left[\frac{-1}{s(s-\lambda^\star)^2}\right]_{s=\lambda} \\
&= \frac{-1}{(-1+j)(j2)^2} = \frac{1}{4(-1+j)} \\
C_1 &= C_3^\star = \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{ds}Y_{zs1}(s)(s-\lambda)^2\right]_{s=\lambda} = \left[\frac{(s-\lambda^\star)^2+2s(s-\lambda^\star)}{s^2(s-\lambda^\star)^4}\right]_{s=\lambda} \\
&= \frac{(j2)^2+2(-1+j)j2}{(-1+j)^2(j2)^4} = \frac{2+j}{j8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= D_4^\star = [Y_{zs2}(s)(s-\lambda)^2]_{s=\lambda} = \left[\frac{-\delta(0)}{(s-\lambda^\star)^2}\right]_{s=\lambda} \\
&= \frac{-\delta(0)}{(j2)^2} = \frac{\delta(0)}{4} \\
D_1 &= D_3^\star = \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{ds}Y_{zs2}(s)(s-\lambda)^2\right]_{s=\lambda} = \left[\frac{2\delta(0)}{(s-\lambda^\star)^3}\right]_{s=\lambda} \\
&= \frac{2\delta(0)}{(j2)^3} = \frac{\delta(0)}{-j4}
\end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a los términos de las expansiones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned}
y_{zs1}(t) &= -\frac{1}{4}u(t) + \left(\frac{1}{8}-j\frac{1}{4}\right)e^{\lambda t} + \left(\frac{1}{8}+j\frac{1}{4}\right)e^{\lambda^\star t} + \frac{1}{8}(-1-j)te^{\lambda t} + \frac{1}{8}(-1+j)te^{\lambda^\star t} \\
&= -\frac{1}{4}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) - \frac{1}{4}te^{-t}\cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t}\sin(t)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
y_{zs2}(t) &= -\frac{\delta(0)}{j4}e^{\lambda t} + \frac{\delta(0)}{j4}e^{\lambda^\star t} + \frac{1}{4}te^{\lambda t} + \frac{1}{4}te^{\lambda^\star t} \\
&= -\frac{\delta(0)}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{\delta(0)}{2}te^{-t}\cos(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
y_{zs}(t) &= y_{zs1}(t) + y_{zs2}(t) \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t}\sin(t) - \frac{1}{4}te^{-t}\cos(t) - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{5}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t}\sin(t) + \frac{3}{4}te^{-t}\cos(t) - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Es posible observar que la solución obtenida es exactamente la misma que la obtenida emplenado el primer método. ■

Σ_2-Método 3

Utilizando el procedimiento de la sección 6 es posible obtener fácilmente las siguientes matrices de la forma canónica controlable que definen al sistema Σ_2 en el espacio de los estados:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & -8 & -4 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Debido a la dimensión del sistema, aplicar la expansión de Taylor o la tranformada de Laplace para encontrar la matriz de transición de estado $e^{\mathbf{A}t}$ puede resultar bastante más tedioso y complicado que utilizar el método basado en la diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$. Por otro lado, este sistema es interesante porque tiene un par de raíces complejas conjugadas que están repetidas, y permitirá ilustrar la aplicación del método general de diagonalización. Los pasos que se realizarán para obtener $e^{\mathbf{A}t}$ se resumen en:

1. Cálculo de la matriz de vectores propios generalizados $\mathbf{P}$.
2. Cálculo de la matriz $\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{A}_d\mathbf{P}^{-1}$.
3. Cálculo de la matriz $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$.
4. Cálculo de la matriz de transición de estado $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{P}^{-1}\left[\mathbf{I} + \mathbf{N}t + \frac{\mathbf{N}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{N}^k t^k}{k!}\right]$.

Estos pasos se desarrollan detalladamente a continuación.

1. Cálculo de la matriz $\mathbf{P}$ de vectores propios generalizados de $\mathbf{A}$:

   $$\mathbf{P}\mathbf{A}_d = A\mathbf{P}$$

   Sea

   $$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

   Luego $\mathbf{P}\mathbf{A}_d = \mathbf{A}\mathbf{P}$ con $\mathbf{A}_d = \mathbf{diag}(\lambda, \lambda^\star, \lambda, \lambda^\star)$ resultará en el sistema de ecuaciones:

   $$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}\mathbf{A}_d & = & \mathbf{A}\mathbf{P} \\ \begin{bmatrix} a\lambda & b\lambda^\star & c\lambda & d\lambda^\star \\ e\lambda & f\lambda^\star & g\lambda & h\lambda^\star \\ i\lambda & j\lambda^\star & k\lambda & l\lambda^\star \\ m\lambda & n\lambda^\star & o\lambda & p\lambda^\star \end{bmatrix} & = & \\ & & \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \\ -4a-8e-8i-4m & -4b-8f-8j-4n & -4c-8g-8k-4o & -4d-8h-8l-4p \end{bmatrix} \end{array}$$

De las expresiones anteriores se obtiene que:

$$\begin{aligned}
e &= a\lambda \\
f &= b\lambda^\star \\
g &= c\lambda \\
h &= d\lambda^\star \\
i &= e\lambda = a\lambda^2 \\
j &= f\lambda^\star = b\lambda^{\star 2} \\
k &= g\lambda = c\lambda^2 \\
l &= h\lambda^\star = d\lambda^{\star 2} \\
m &= i\lambda = e\lambda^2 = a\lambda^3 \\
n &= j\lambda^\star = f\lambda^{\star 2} = b\lambda^{\star 3} \\
o &= k\lambda = g\lambda^2 = c\lambda^3 \\
p &= l\lambda^\star = h\lambda^{\star 2} = d\lambda^{\star 3} \\
m\lambda &= a\lambda^4 = -4a - 8e - 8i - 4m = a(-4 - 8\lambda - 8\lambda^2 - 4\lambda^3) \\
n\lambda^\star &= b\lambda^{\star 4} = -4b - 8f - 8j - 4n = b(-4 - 8\lambda^\star - 8\lambda^{\star 2} - 4\lambda^{\star 3}) \\
o\lambda &= c\lambda^4 = -4c - 8g - 8k - 4o = c(-4 - 8\lambda - 8\lambda^2 - 4\lambda^3) \\
p\lambda^\star &= d\lambda^{\star 4} = -4d - 8h - 8l - 4p = d(-4 - 8\lambda^\star - 8\lambda^{\star 2} - 4\lambda^{\star 3})
\end{aligned}$$

Las últimas cuatro ecuaciones son redundantes, ya que corresponden a la ecuación característica, y por lo tanto, se satisfacen automáticamente. Luego la matriz de eigenvectores puede definirse como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a\lambda & b\lambda^\star & c\lambda & d\lambda^\star \\ a\lambda^2 & b\lambda^{\star 2} & c\lambda^2 & d\lambda^{\star 2} \\ a\lambda^3 & b\lambda^{\star 3} & c\lambda^3 & d\lambda^{\star 3} \end{bmatrix}$$

Eligiendo $a = b = c = d = 1$ y considerando que $\lambda = -1 + j$, $\lambda^2 = -j2$, $\lambda^3 = 2 + j2$ entonces

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1+j & -1-j & -1+j & -1-j \\ -j2 & j2 & -j2 & j2 \\ 2+j2 & 2-j2 & 2+j2 & 2-j2 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz calculada anteriormente no es invertible! Esto se debe a la presencia de para de raíces repetidas, lo cual causa que las dos últimas columnas de $\mathbf{P}$ sean iguales a las dos primeras. Por esta razón, será necesario calcular los eigenvectores generalizados resolviendo:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 \mathbf{p}_{\lambda_i} = 0$$

para las dos raíces repetidas $\lambda_i = \lambda, \lambda^\star$. Sin embargo, como las dos raíces repetidas son complejas conjugadas, el eigenvector generalizados $\mathbf{p}_\lambda = \mathbf{p}^\star_{\lambda^\star}$. Es decir, basta calcular el espacio nulo de $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^2$ definido por los eigenvectores generalizados $\mathbf{p}_\lambda$, puesto que el espacio nulo de $(\lambda^\star \mathbf{I} - \mathbf{A})^2$ definido por vectores $\mathbf{p}_{\lambda^\star}$ que son complejo conjugado de $\mathbf{p}_\lambda$.

Calculando

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 8 & 8 & \lambda + 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & -2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -2\lambda & 1 \\ -4 & -8 & \lambda^2 + 8 & -2\lambda - 4 \\ 8\lambda + 16 & 16\lambda + 28 & 16\lambda + 24 & \lambda^2 + 8\lambda + 8 \end{bmatrix}$$

y reemplazando $\lambda = -1 + j$ se obtiene

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = \begin{bmatrix} -j2 & 2-j2 & 1 & 0 \\ 0 & -j2 & 2-j2 & 1 \\ -4 & -8 & 8-j2 & -2-j2 \\ 8+j8 & 12+j16 & 8+j16 & j6 \end{bmatrix}$$

Es posible verificar que $\mathrm{rank}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^2) = 2$, y por lo tanto, la dimensión de espacio nulo de $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^2)$ es dos. Esto significa que existen dos vectores $\mathbf{p}_\lambda$ que satisfacen $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^2)\mathbf{p}_\lambda = \mathbf{0}_{4\times 1}$. Dado que $\mathbf{p}_\lambda \stackrel{def}{=} [p_1\ p_2\ p_3\ p_4]^T$ es de dimensión 4, pero el espacio nulo es un subespacio de dimensión 2, entonces existen dos variables independientes. Por esto asumiremos primero que $p_1 = 1$. Luego $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^2)\mathbf{p}_\lambda = \mathbf{0}_{4\times 1}$ con $\mathbf{p}_\lambda = [1\ p_2\ p_3\ p_4]^T$ resulta en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -j2 + 2p_2 - j2p_2 + p_3 &= 0 && (67)\\ -j2p_2 + 2p_3 - j2p_3 + p_4 &= 0 && (68)\\ -4 - 8p_2 + 8p_3 - j2p_3 - 2p_4 - j2p_4 &= 0 && (69)\\ 8 + j8 + 12p_2 + j16p_2 + 8p_3 + j16p_3 + j6p_4 &= 0 && (70) \end{aligned}$$

De (67) y (68) se obtiene

$$\begin{aligned} p_3 &= j2 - (2 - j2)p_2 \\ p_4 &= j2p_2 - (2 - j2)p_3 = j2p_2 - (2 - j2)j2 + (2 - j2)^2 p_2 = -j6p_2 - 4 - j4 \end{aligned}$$

las cuales al reemplazarse en (69) permiten encontrar

$$\begin{aligned} -4 - 8p_2 + (8 - j2)[j2 - (2 - j2)p_2] - (2 + j2)[-j6p_2 - (4 + j4)] &= 0 \\ -(32 - j32)p_2 + j32 &= 0 \\ p_2 = \frac{j}{1-j} &= -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} p_3 &= j2 - 2(1 - j)\frac{j}{(1-j)} = 0 \\ p_4 &= -1 - j \end{aligned}$$

Reempleazando p_2, p_3 y p_4 en (70) se verifica que esta ecuación es linealmente dependiente puesto que p_2, p_3 y p_4 satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned} 8 + j8 + 12p_2 + j16p_2 + 8p_3 + j16p_3 + j6p_4 &= 0 \\ 8(1 + j) + 6(-1 + j) + 8(-1 - j) - j6(1 + j) &= (8 - 6 - 8 + 6) + j(8 + 6 - 8 - 6) = 0 \end{aligned}$$

Observando que p_3 resultó ser cero, es decir el vector propio generalizado no cubre el espacio en la dirección de la tercera coordenada, se repite el procedimiento anterior pero asumiendo que el otro vector $\mathbf{p}_\lambda$ si podría cubrir la dirección de la tercena coordenada y que por lo tanto $p_3 \neq 0$. En particular,

asumiendo $p_3 = 1$ se obtienen las siguientes ecuaciones de $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^2\mathbf{p}_\lambda = \mathbf{0}_{4\times 1}$ para $\mathbf{p}_\lambda = [p_1\ p_2\ 1\ p_4]^T$:

$$\begin{aligned} p_1 &= -j\frac{1}{2} - (1+j)p_2 \\ p_4 &= j2p_2 - 2(1-j) \\ -4[-j\frac{1}{2} - (1+j)p_2] - 8p_2 - 8 - j2 - 2(1+j)[j2p_2 - 2(1-j)] &= 0 \\ j2 + 4(1+j)p_2 - 8p_2 - 8 - j2 + 4(1-j)p_2 + 8 &= 0 \\ p_2 &= 0 \\ p_1 &= -j\frac{1}{2} \\ p_4 &= -2(1-j) \end{aligned}$$

De esta manera el espacio nulo de $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ estará definido por los vectores:

$$\mathbf{p}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-j) \\ 0 \\ -1-j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_\lambda = \begin{bmatrix} -j\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -2+j2 \end{bmatrix}$$

Con estos vectores definimos la matriz de eigenvectores generalizados como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1+j & -1-j & -\frac{1}{2}(1-j) & -\frac{1}{2}(1+j) \\ -j2 & j2 & 0 & 0 \\ 2+j2 & 2-j2 & -1-j & -1+j \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que sólo se utilizó uno de los eigenvectores generalizados, puesto que la última columna es el complejo conjugado de uno de los $\mathbf{p}_\lambda$ obtenidos anteriormente. Se incluye el conjugado de $\mathbf{p}_\lambda$ puesto que este se asocia a un eigenvector generalizado asociado a $\lambda^\star$.

2. El cálculo de $\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{A}_d\mathbf{P}^{-1}$ resulta en

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

3. El cálculo de $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$ resulta en:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Es posibble verificar que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}_{4\times 4}$.

4. La matriz de transición de estados se calcula finalmente como:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{P}^{-1}\left[\mathbf{I} + \mathbf{N}t + \frac{\mathbf{N}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{N}^k t^k}{k!}\right]$$

con $k = 1$, puesto que $\mathbf{N}$ es nilpotente de orden 1, es decir $\mathbf{N}^{k+1} = 0$ para $k \geq 1$.

Calculando se obtiene la multiplicación de matrices se obtiene:

$$\mathbf{P}e^{\mathbf{A}_d t}\mathbf{P}^{-1} = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos(t)+2\sin(t) & 3\sin(t) & \frac{3}{2}\sin(t) & \frac{1}{2}\sin(t) \\ -2\sin(t) & \cos(t)-2\sin(t) & -\sin(t) & -\frac{1}{2}\sin(t) \\ 2\sin(t) & 2\sin(t) & \cos(t)+2\sin(t) & \sin(t) \\ -4\sin(t) & -6\sin(t) & -6\sin(t) & \cos(t)-2\sin(t) \end{bmatrix}$$

Finalmente la multiplicación por $\mathbf{I}+\mathbf{N}t$ de la expresión anterior resulta en:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos(t)+2\sin(t)-t\cos(t)+t\sin(t) & 3\sin(t)+t\sin(t)-2t\cos(t) \\ -2\sin(t)+2t\cos(t) & \cos(t)-2\sin(t)+t\sin(t)+3t\cos(t) \\ 2\sin(t)-2t\sin(t)-2t\cos(t) & 2\sin(t)-4t\sin(t)-2t\cos(t) \\ -4\sin(t)+4t\sin(t) & -6\sin(t)+6t\sin(t)-2t\cos(t) \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sin(t)+\frac{1}{2}t\sin(t)-\frac{3}{2}t\cos(t) & \frac{1}{2}\sin(t)-\frac{1}{2}t\cos(t) \\ -\sin(t)+t\sin(t)+2t\cos(t) & -\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{1}{2}t\sin(t)+\frac{1}{2}\cos(t) \\ \cos(t)+2\sin(t)-3t\sin(t)-t\cos(t) & \sin(t)-t\sin(t) \\ -6\sin(t)+4t\sin(t)-2t\cos(t) & \cos(t)-2\sin(t)+t\sin(t)-t\cos(t) \end{bmatrix}$$

Por último, las condiciones inciales serán:

$$\mathbf{x_0} = \mathcal{O}^{-1}[y(0)\ \dot{y}(0)\ \ddot{y}(0)\ \dddot{y}(0)]^T$$

con

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & -9 & -4 \\ 16 & 28 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

Al realizar la multiplicación se obtiene:

$$\mathbf{x}_0 = [-\frac{29}{25},\ +\frac{21}{25},\ -\frac{4}{25},\ -\frac{4}{25}]^T$$

La respuesta a entrada cero será entonces:

$$y_{zi}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) + te^{-t}\cos(t)$$

Observe que este resultado es exactamente el mismo que el obtenido mediante el método basado en la aplicación de la transformada de Laplace.

Similarmente, la resuesta a estado cero se calcula como:

$$y_{zs}(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t)$$

Con las matrices $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ y $e^{\mathbf{A}t}$ se tiene que:

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}B = \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau) - (t-\tau)\sin(t-\tau) + \frac{1}{2}(t-\tau)\cos(t-\tau)$$

Esta última expresión al ser multiplicada por $u(\tau)$, $\tau \geq 0$ (definido para este sistema como el escalón unitario $u(\tau) = 1$, $\tau \geq 0$) e integrada con respecto a $\tau \in [0, t]$ resulta en:

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t}\sin(t) - \frac{1}{4}te^{-t}\cos(t) - \frac{1}{4}$$

La respuesta general estará dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{5}{4}e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t}\sin(t) + \frac{3}{4}te^{-t}\cos(t) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como era de esperarse, una vez más es posible observar que la solución obtenida es igual a la calculada emplenado los método anteriores. ■

Referencias

[1] Richard Bronson, Gabriel Costa. *Schaum's Outline of Differential Equations*. McGraw-Hill, 3^{rd} ed., mayo 2009.

[2] Murray Spiegel. *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill, septiembre 2009.

[3] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 3^{rd} ed., abril 2006.

[4] Morris W. Hirsch, Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, mayo 1974.