Capítulo 10 – Análisis, propiedades y control de sistemas lineales en el espacio del estado

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Ventajas del diseño de controladores en el espacio de estado

- La representación de ODEs (Ordinary Differential Equations) en la forma de variables de estado o forma normal como se la llama en matemáticas tiene varias ventajas que permiten:
  - **Formular modelos de sistemas más generales:** Sistemas con múltiples inputs y/o outpus (MIMO) y cuyas ecuaciones no necesitan ser lineales o estacionarias (invariantes en el tiempo).
  - **Introducir las ideas/herramientas de geometría en ecuaciones diferenciales:** En física el gráfico de velocidad vs. posición de una partícula se denomina plano de fase (phase plane) y la trayectoria del estado de la partícula puede graficarse como una curva en este plano.
  - **Conectar descripciones internas y externas:** Las variables de estado internas, por ejemplo, voltaje en condensadores, corrientes en inductancias, posiciones de piezas/resortes (energía potencial), velocidad piezas/amortiguadores (energía cinética) pueden determinarse a partir de la mediciones de las salidas del sistema y el conocimiento de sus entradas cuando el sistema está modelado en términos de variables de estado, a diferencia de la descripción en términos de funciones de transferencia, las cuales no permiten conocer el estado o energía interna de cada componente en un sistema.

Modelos de sistemas dinámicos en el espacio de estado

Modelos en el espacio del estado (*state-space o SS model*) son representaciones de sistemas en la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

con:

$$\mathbf{x}(t_0) \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_0 \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

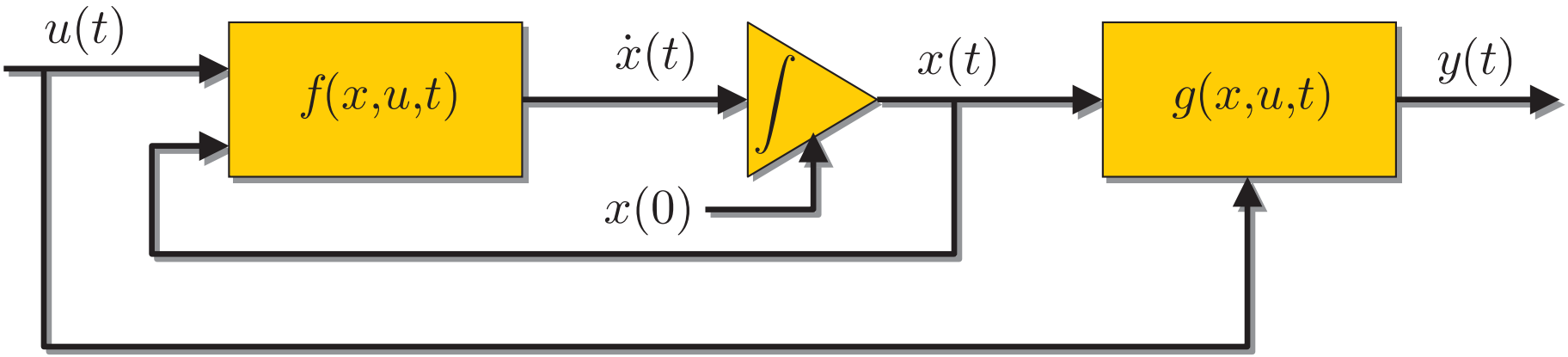
Modelos de sistemas dinámicos en el espacio de estado

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \vdots \\ g_p(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T &\leftarrow \text{Vector de estado} \\ \mathbf{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_m(t)]^T &\leftarrow \text{Vector de inputs (MVs)} \\ \mathbf{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_p(t)]^T &\leftarrow \text{Vector de outputs (CVs)} \\ \mathbf{x}_0 &\leftarrow \text{Estado inicial en un tiempo dado } t_0. \\ n &\leftarrow \text{Orden del modelo en el espacio de estado.} \end{aligned}$$

Implentación análoga del modelo en el espacio de estado



Ejemplo: Vehículo - Variables de Estado

Modelo dinámico lineal:

$$\Sigma: \quad m\ddot{x} = ku - c\dot{x}$$

Condiciones iniciales:

$$x(0),\ \dot{x}(0)$$

Definición del vector de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \ \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

Representación en el espacio de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{k}{m}u - \frac{c}{m}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k/m \end{bmatrix} u$$

Ejemplo: Vehículo - Variables de Estado

La salida corresponde a lo que se mide:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u \qquad \text{Medición: velocidad}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u \qquad \text{Medición: posición}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u \qquad \text{Medición: ambas}$$

Representación general de sistemas lineales

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{b}_m\mathbf{u}_m$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{d}_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{d}_m\mathbf{u}_m$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Representación parametrizada:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{n\times n} & \mathbf{B}_{n\times m} \\ \hline \mathbf{C}_{p\times n} & \mathbf{D}_{p\times m} \end{array}\right]_{(n+p)\times(n+m)}$$

Transformada de Laplace del Sistema en el Estado

Aplicando la LT y fijando las condiciones iniciales en 0 ($\mathbf{x}_0 = 0$), es decir, como definición de función de transferencia:

$$s\mathbf{X}_{n\times 1}(s) = \mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{X}_{n\times 1}(s) + \mathbf{B}_{n\times m} \cdot \mathbf{U}_{m\times 1}(s)$$

y la salida:

$$\mathbf{Y}_{p\times 1}(s) = \mathbf{C}_{p\times n} \cdot \mathbf{X}_{n\times 1}(s) + \mathbf{D}_{p\times m} \cdot \mathbf{U}_{m\times 1}(s)$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{X}_{n\times 1}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{n\times n}]^{-1} \cdot \mathbf{B}_{n\times m} \cdot \mathbf{U}_{m\times 1}(s)$$

y la salida, en función de la entrada será:

$$\mathbf{Y}_{p\times 1}(s) = \underbrace{\left[\mathbf{C} \cdot [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{n\times n}]^{-1} \cdot \mathbf{B}_{n\times m} + \mathbf{D}\right]}_{\text{Función de transferencia multivariable}} \cdot \mathbf{U}_{m\times 1}(s)$$

Solución a la ecuación de estado (caso SISO orden $n = 1$)

$$\dot{x} = ax + bu \;\Rightarrow\; sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s)$$

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Solución a la ecuación de estado (caso SISO orden $n > 1$)

Aplicando la transformada de Laplace a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ se tiene:

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}}_{\Phi(s)} \mathbf{x}(0) + \underbrace{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}}_{\Phi(s)} \mathbf{B}\, U(s)$$

Luego aplicando la transformada de Laplace inversa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\, \mathbf{B}\, u(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, \mathbf{B}\, u(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Phi(t) * \mathbf{B}u(t) \end{aligned}$$

donde $\Phi(t) \stackrel{def}{=} e^{\mathbf{A}t}$ corresponde a la matriz de transición de estado.

El primer término corresponde a la solución a entrada cero ó respuesta no forzada, y el segundo termino corresponde a la respuesta forzada o solución a estado cero.

Matriz de transición de estado $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$

La matriz de transición de estado puede obtenerse de tres maneras distintas:

1. A través de la expansión de Taylor:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} + \ldots$$

2. Aplicando la transformada de Laplace inversa:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\}.$$

3. Aplicando propiedades de algebra lineal, específicamente un cambio de base $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, con $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$:

$$\Phi(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1},$$

donde $\mathbf{P} = [\mathbf{p_1}\ \mathbf{p_2}\ \cdots \mathbf{p_n}]$ es la matriz de eigenvectores (vectores propios) de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal de valores propios λ_i asociados a los vectores propios $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo Vehículo - Solución en variables de estado

Ecuaciones de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 + bu \end{cases}$$

Suponiendo $a = b = 1$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \; s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

Al invertir $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ se tiene:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \; \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Vehículo - Solución en variables de estado

Solución en el tiempo: $x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, B\, u(\tau)d\tau$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)d\tau$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + x_2(0)\cdot(1-e^{-t}) \\ x_2(0)\cdot e^{-t} \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} 1-e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau)d\tau$$

Supongamos que entre 0 y t, u se mantiene constante en u_0. Luego, el elemento forzante:

$$u_0 \cdot \int \begin{bmatrix} 1-e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = u_0 \cdot \begin{bmatrix} \tau - e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \Bigg|_0^t = u_0 \begin{bmatrix} t-1+e^{-t} \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + x_2(0)\cdot(1-e^{-t}) \\ x_2(0)\cdot e^{-t} \end{bmatrix} + u_0 \begin{bmatrix} t-1+e^{-t} \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix}$$

Discretización de la ecuación de estado

Para discretizar el modelo del vehículo se toma $t = 0$ como instante k y $t = \Delta T$ como instante $k + 1$:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-\Delta T} \\ 0 & e^{-\Delta T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta T - 1 + e^{-\Delta T} \\ 1 - e^{-\Delta T} \end{bmatrix} u(k)$$

En el resultado anterior se supone que u es constante durante todo el periodo (retención de orden 0).

Discretización de la ecuación de estado

Discretización en el caso general:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] \;\Rightarrow\; [\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{D}_d]$$

La evolución del estado durante un periodo de muestreo T partiendo desde un instante inicial kT hasta un instante final $kT + T = (k+1)T$ está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= \Phi((k+1)T - kT)\,\mathbf{x}(kt) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T - kT - \tau)\,\mathbf{B}\,u(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi(T)\,\mathbf{x}_k + \int_0^T \Phi(T-\tau)\,\mathbf{B}\,u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Luego, para un periodo de muestreo T:

$$\mathbf{A}_d = \Phi(\Delta T) = e^{\mathbf{A}\,\Delta T} = \mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\}\Big|_{t=\Delta T}$$

Usando retención de orden cero:

$$\mathbf{B}_d = \int_0^{\Delta T} \Phi(\Delta T - \tau)\cdot\mathbf{B}\cdot d\tau, \qquad \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{D}_d = \mathbf{D}$$

Función de transferencia discreta

Utilizando lo anterior el sistema queda:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d\,u(k)$$

y

$$y(k+1) = \mathbf{C}_d\,\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{D}_d\,u(k+1)$$

Aplicando Transformada $\mathcal{Z}$ y despejando se tiene:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \underbrace{\mathbf{C}_d\,[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1}\,\mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d}_{\text{Función de transferencia discreta}}$$

Transformación de TF a modelos en el SS

Considere la siguiente función de transferencia con $m < n$:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

la cual corresponde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u$$

Reordenando los términos de la TF:

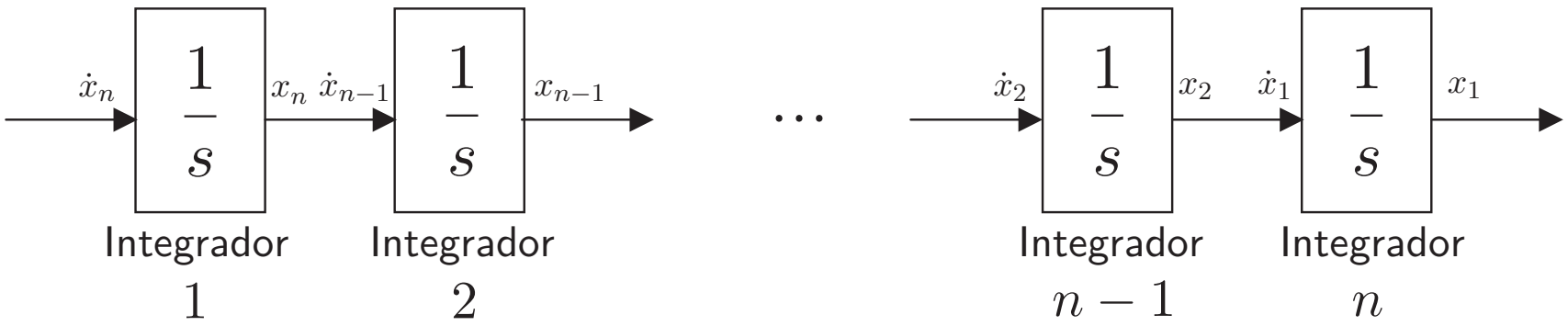
$$s^n Y + a_{n-1} s^{n-1} Y + \cdots + a_0 Y = b_m s^m U + b_{m-1} s^{m-1} U + \cdots + b_0 U$$

Dividiendo por s^n y despejando Y en función de los otros Y se tiene:

$$Y = -a_{n-1} \frac{Y}{s} - \cdots + a_1 \frac{Y}{s^{n-1}} + a_0 \frac{Y}{s^n}$$
$$+ b_m \frac{U}{s^{n-m}} + b_{m-1} \frac{U}{s^{n-m-1}} + \cdots + b_1 \frac{U}{s^{n-1}} b_0 \frac{U}{s^n}$$

Transformación de TF a modelos en el SS

Una implementación de la solución de la ecuación diferencial puede obtenerse colocando n integradores en serie:



de modo tal que la salida del i-ésimo integrador se define como la $(n-i+1)$-ésima variable de estado, es decir:

$$x_i = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t (\cdot) d\tau^{(n-1+i)}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

Luego, para la respuesta a entrada cero $(u = 0)$, si se alimenta el tren de integradores con:

$$\dot{x}_n \overset{def}{=} \frac{d^n y}{dt^n}$$

Transformación de TF a modelos en el SS

se tendrá que:

$$x_i = \underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t}_{n-i+1} \frac{d^n y}{dt^n} d\tau^{(n-i+1)}$$
$$= \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

y en particular:

$$x_1 = y$$

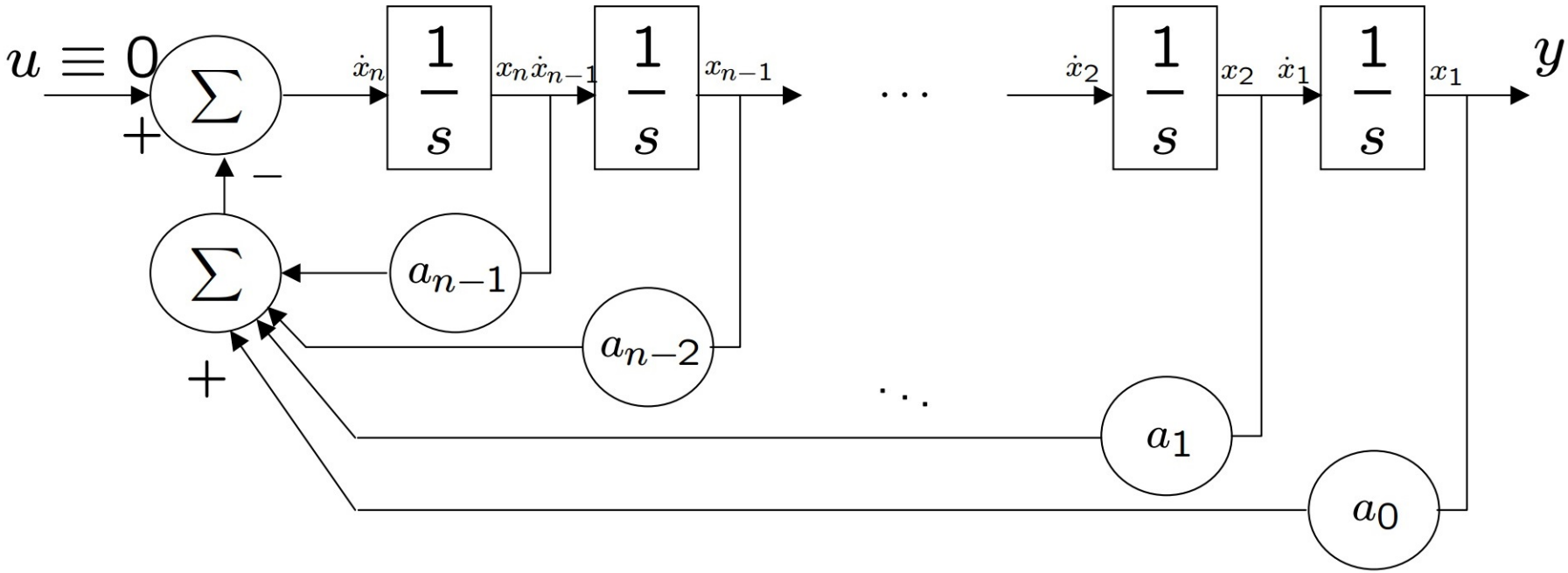
Utilizando las variables de estado (de cada integrador) es posible re-escribir la ecuación diferencial para la *respuesta a entrada cero* como:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \dot{x}_n = -a_{n-1} x_n - \cdots - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1$$

Así la entrada del primer integrador, corresponde a la suma ponderada (o retro-alimentación) de las salidas de cada integrador.

Respuesta a entrada cero

Gráficamente, la respuesta a entrada cero se implementaría según:



$$\frac{d^n y}{dt^n} = \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1$$

Forma canónica controlable

Si $u \neq 0$, la salida del i-ésimo integrador incluirá una componente correspondiente a la entrada y será de la forma:

$$x_i = \underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t}_{n-i+1} \left(u(\tau) - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x_k \right) d\tau^{(n-i+1)}$$

En particular:

$$x_n = \int_0^t \left(u(\tau) - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x_k \right) d\tau$$

Por lo tanto:

$$\frac{dx_n}{dt} = u - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x_k \qquad (*)$$

pero:

$$x_k = \frac{d^{k-1} x_1}{dt^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Forma canónica controlable

Luego, (*) puede re-escribirse como:

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = u - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \frac{d^{k-1} x_1}{dt^{k-1}} \tag{1}$$

Si se define la salida como:

$$y = \sum_{k=1}^{m+1} b_{k-1} x_k = \sum_{k=1}^{m+1} b_{k-1} \frac{d^{k-1} x_1}{dt^{k-1}} \tag{2}$$

Aplicando la transformada de Laplace a (1) y (2) se obtiene respectivamente:

$$U(s) = \left(s^n + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} s^{k-1} \right) X_1(s) \tag{3}$$

$$Y(s) = \left(\sum_{k=1}^{m+1} b_{k-1} s^{k-1} \right) X_1(s) \tag{4}$$

Forma canónica controlable

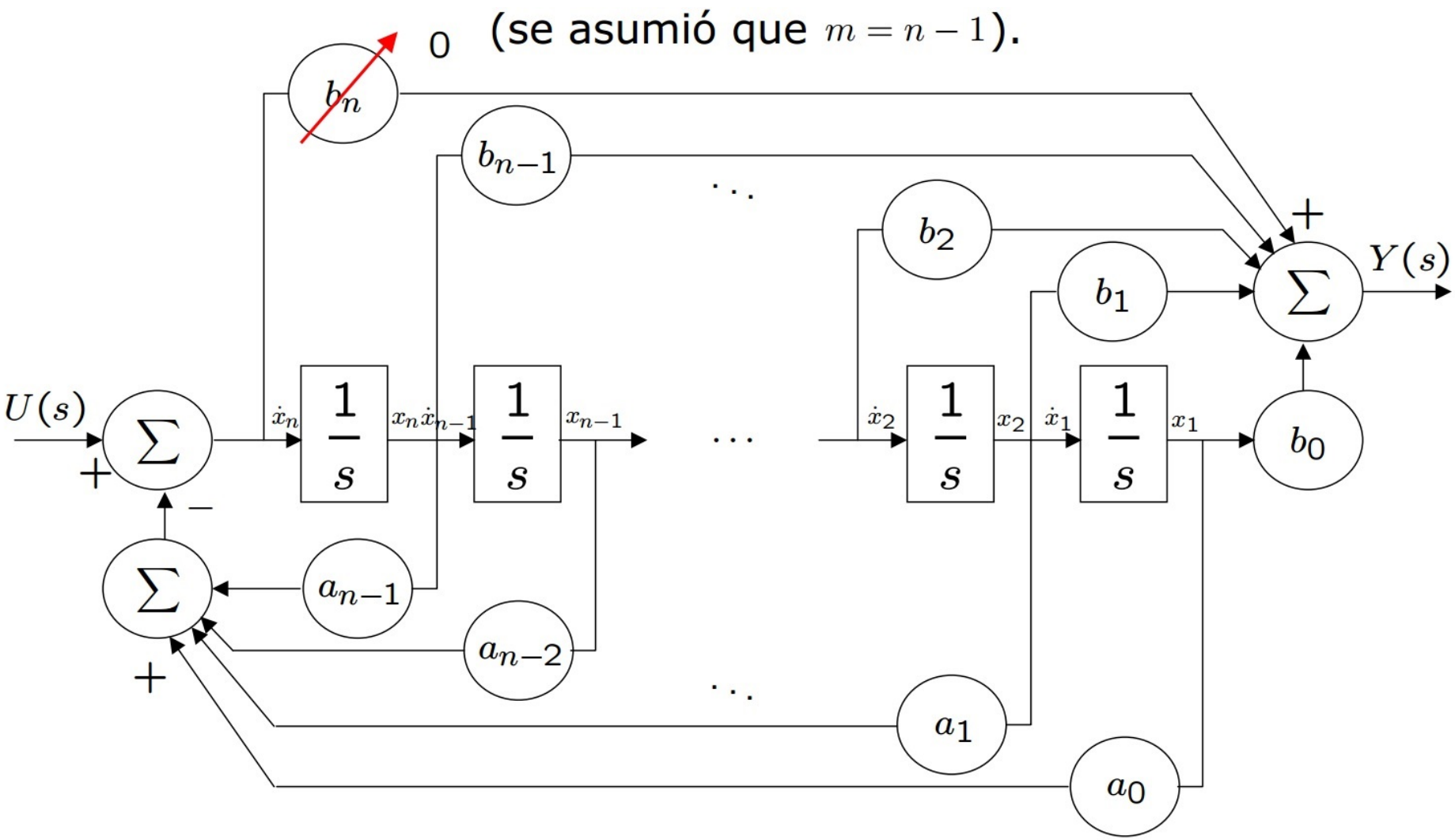
Dividiendo lado a lado (4) por (3) se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\sum_{k=1}^{m+1} b_{k-1} s^{k-1}}{s^n + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} s^{k-1}} \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\end{aligned}$$

De esta manera es posible confirmar que le sistema de integradores en serie con la salida definida en (2) efectivamente es una realización del sistema original.

Luego, es necesario añadir los multiplicadores de estado b_k a la secuencia de integradores originales (respuesta a entrada cero), con lo cual la interconexión de integradores al sistema queda como se muestra a continuación (con $m \leq n-1$).

Forma canónica controlable



Forma canónica controlable

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \;\; i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$
$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u$$
$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_{n-1} x_n$$

Luego la **forma canónica controlable** es:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_c = [0]$$

con $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix}^T$

Comentarios sobre la forma canónica controlable

- La realización del sistema mediante la secuencia de integradores en cascada recién presentada se conoce también como técnica de programación directa [Robert J. Mayhan. Discrete-Time and Continuous-Time Linear Systems. Addison-Wesley, 1984].

- En la práctica, la programación directa no necesariamente es la mejor manera de implementar una simulación analógica de un sistema. Una de las limitantes puede ser el número de entradas que los sumadores reales son capaces de aceptar.

Comentarios sobre la forma canónica controlable

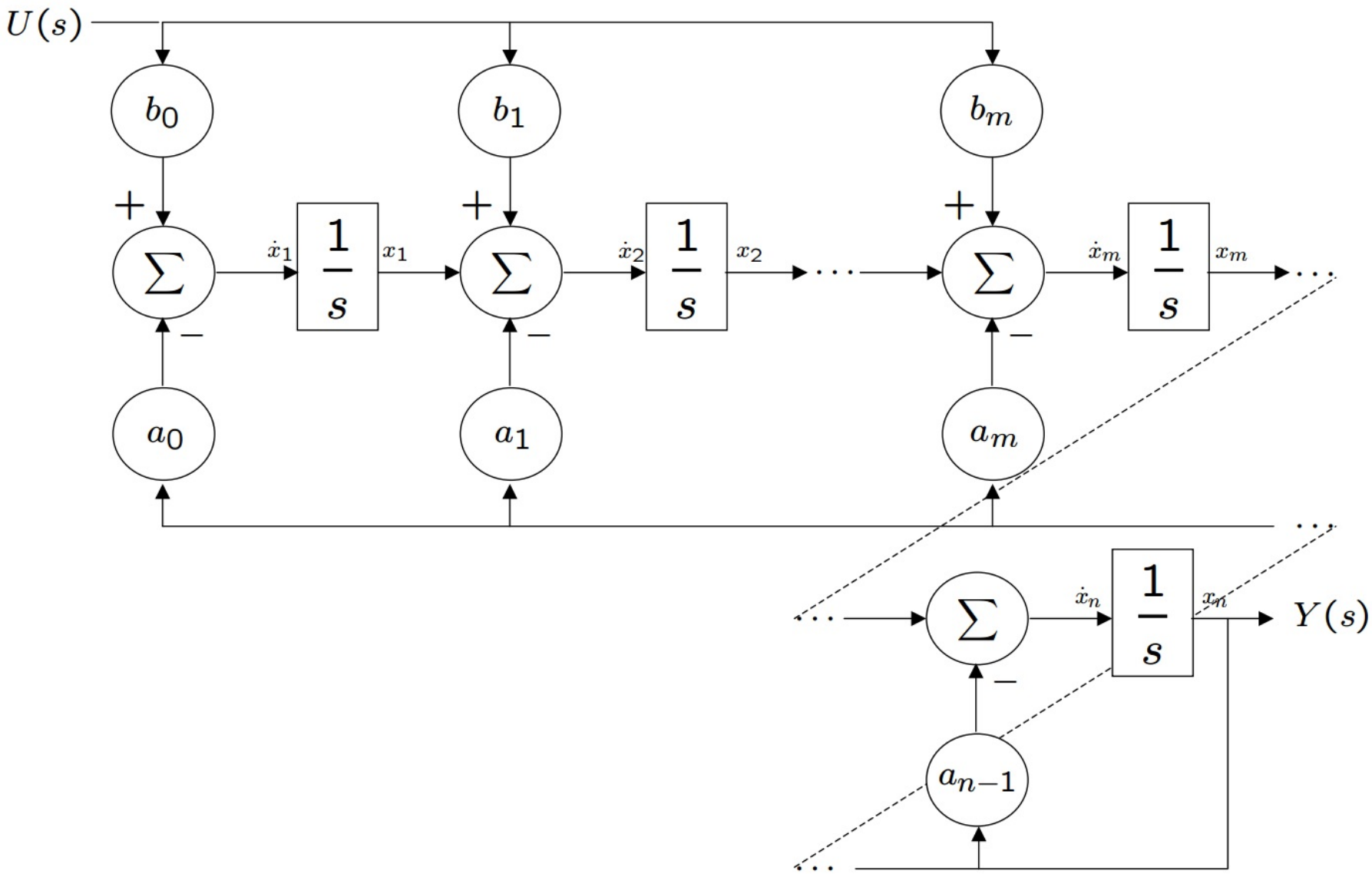
- Existen otras técnicas de programación:
  - Programación iterativa: Requiere descomponer la función de transferencia en una multiplicatoria de sistemas de primer orden; la realización resulta en una cascada de sistemas de primer orden.
  - Programación paralela: Requiere descomponer la función de transferencia en una sumatoria de sistemas de primer orden; la realización resulta en la suma de salida de bloques de primer orden dispuestos en paralelo.
  - Programación anidada: Nested programming.
  - Prueba y error: Trial-and-error.
- Además de la **forma canónica controlable**, existen otras dos representaciones que son particularmente útiles en el análisis/diseño de sistemas de control:
  - Programación directa conducente a la **forma canónica observable**.
  - Programación paralela conducente a la **forma canónica modal**.

Forma canónica observable

Otra manera de implementar el sistema usando n integradores es reagrupando los términos en integrales del mismo orden según:

$$Y = -a_{n-1}\frac{Y}{s} - \cdots - a_2\frac{Y}{s^{n-2}} - a_1\frac{Y}{s^{n-1}} - a_0\frac{Y}{s^n}$$
$$+ b_m\frac{U}{s^{n-m}} + b_{m-1}\frac{U}{s^{n-m+1}} + \cdots + b_1\frac{U}{s^{n-1}} + b_0\frac{U}{s^n}$$
$$Y = \frac{1}{s^n}(b_0U - a_0Y) + \frac{1}{s^{n-1}}(b_1U - a_1Y) + \cdots + \frac{1}{s^{n-m}}(b_mU - a_mY)$$
$$+ \frac{1}{s^{n-m-1}}(-a_{m-1}Y) + \cdots + \frac{1}{s^2}(-a_{n-2}Y) + \frac{1}{s}(-a_{n-1}Y)$$
$$Y = \frac{1}{s^{n-1}}\left(\frac{1}{s}(b_0U - a_0Y) + (b_1U - a_1Y)\right) + \cdots + \frac{1}{s^{n-m}}(b_mU - a_mY)$$
$$+ \frac{1}{s^{n-m-1}}(-a_{m-1}Y) + \cdots + \frac{1}{s^2}(-a_{n-2}Y) + \frac{1}{s}(-a_{n-1}Y)$$

Forma canónica observable



Forma canónica observable

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_n + b_0 u$$
$$\dot{x}_i = x_{i-1} - a_{i-1} x_n + b_i u, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$
$$y = x_n$$

Luego la **forma canónica observable** es:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_o = [0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1] \qquad \mathbf{D}_o = [0]$$

con $\quad \mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_{n-1} \;\; x_n]^T$

Forma canónica modal o de Jordan

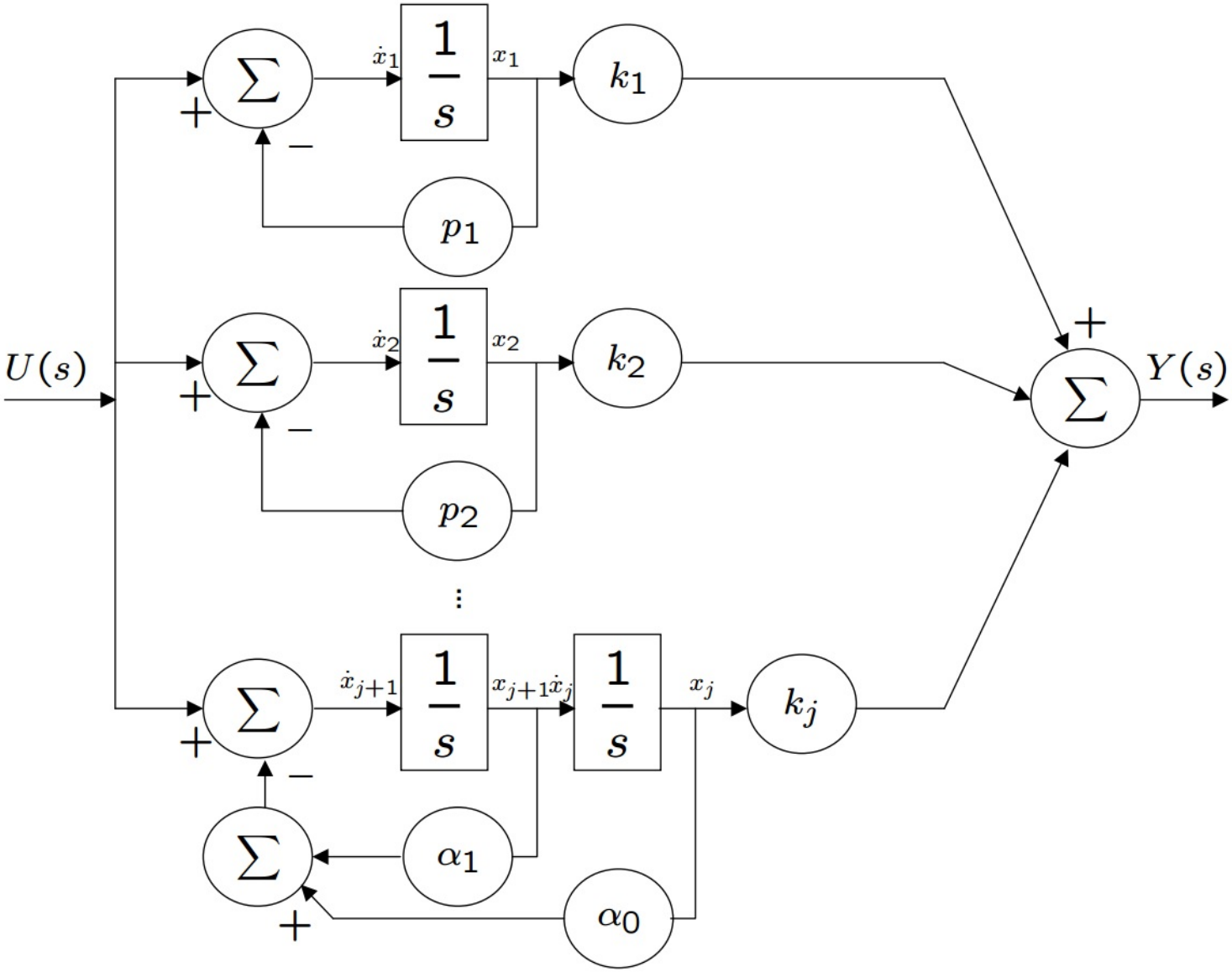
Descomponiendo la función de transferencia mediante fracciones parciales se obtienen los "modos" de respuesta del sistema, los cuales están asociados a cada polo según:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{k_j}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} + \ldots\end{aligned}$$

donde el último modo corresponde a un par de polos complejos conjugados.

¿Cuántos modos tiene un sistema de orden n?

Forma canónica modal o de Jordan



Forma canónica modal o de Jordan

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{x}_j &= x_{j+1} \\
\dot{x}_{j+1} &= -\alpha_1 x_{j+1} - \alpha_0 x_j + u_{j+1}
\end{aligned}
\right\}
$$

Variables asociadas al par de raíces complejas conjugadas.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= -p_i x_i + u_i \\
y &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_j x_j
\end{aligned}
$$

Luego la **forma canónica modal** es:

$$
\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix}
-p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -p_2 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & \dots & 0 & -\alpha_0 & -\alpha_1
\end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_j & 0 \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{D}_m = [0]
$$

$$
\text{con} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j & x_{j+1} \end{bmatrix}^T
$$

Caso general $m = n$

Considere la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Para poder encontrar su representación en el espacio de estados es necesario expresarla en términos de una función de transferencia tal que $\deg(p(s)) < \deg(q(s)) = n$. Esto puede lograrse expresando la función de transferencia como:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= b_n + \frac{p'(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{b_n q(s)}{q(s)} + \frac{p'(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{q(s)}\end{aligned}$$

Luego:

$$p'(s) = p(s) - b_n q(s)$$

Caso general $m = n$

Reemplazando los polinomios correspondientes a $p(s)$ y $q(s)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} p'(s) &= p(s) - b_n q(s) \\ &= b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ &\quad - b_n s^n - b_n a_{n-1} s^{n-1} - \cdots - b_n a_1 s - b_n a_0 \\ &= (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \cdots + (b_2 - b_n a_2) s^2 \\ &\quad + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0) \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{p(s)}{q(s)} = b_n + \frac{p'(s)}{q(s)} = b_n + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} b'_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i}}_{G'(s)}$$

con:

$$b'_i = b_i - b_n a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Caso General $m = n$

La representación del sistema en términos de variables de estado se obtiene a partir de $G'(s)$ y notando que:

$$Y(s) = G'(s)U(s) + b_n U(s)$$

Luego, se concluye que en las formas canónica controlable y observable presentadas anteriormente deben hacerse las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} a_i &\rightarrow a_i \\ b_i &\rightarrow b_i - b_n a_i \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y en cualquier forma:

$$D = b_n$$

cuando $m = n$.

En resumen, **distintas implementaciones pueden representar un mismo sistema**, si estas mantienen las relaciones entrada-salida del sistema original, pero las **variables de estado** (condiciones internas de la implementación) **pueden ser totalmente distintas**. Esta situación es análoga a lo que ocurre en análisis de circuitos con los equivalentes de Thévenin y Norton.

Controlabilidad

Definición

El sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es controlable si existe una señal de control $u(t)$ continua por partes que dirija el estado del sistema desde **cualquier** estado inicial $\mathbf{x}_0$ a cualquier estado final deseado $\mathbf{x}_f$ en un intervalo de tiempo finito.

Notas:

- La controlabilidad no se puede determinar a partir de la función de transferencia, ya que ésta depende sólo de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
- Un sistema es controlable si cada modo dinámico de $\mathbf{A}$ está conectado a input de control.

Condición de Controlabilidad (de Kalman)

Condición de Controlabilidad (de Kalman)

Un sistema lineal (de tiempo continuo o discreto) de orden n es controlable sí y sólo si su **matriz de controlabilidad**:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

satisface que:

$$\text{rango}\{\mathcal{C}\} = n \text{ ó } \det(\mathcal{C}) \neq 0$$

Observabilidad

Definición

El sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ es observable si para **cualquier** estado inicial $\mathbf{x}_0$ existe un tiempo finito τ tal que $\mathbf{x}_0$ puede determinarse en forma única a partir de la señal de control $u(t)$ y la salida del sistema $y(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$.

Notas:

- La observabilidad se determina a partir de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$.
- Un sistema es observable si cada modo dinámico de $\mathbf{A}$ está conectado a la salida a través de $\mathbf{C}$.

Condición de Observabilidad (de Kalman)

Condición de Observabilidad (de Kalman)

Un sistema lineal (de tiempo continuo o discreto) de orden n es controlable sí y sólo si su **matriz de observabilidad**:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

satisface que:

$$\text{rango}\{\mathcal{O}\} = n \text{ ó } \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

Sistemas equivalentes

Definición

Dos sistemas en el espacio de estado

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\mathbf{x} + \mathbf{B}'u \\ y = \mathbf{C}'\mathbf{x} + \mathbf{D}'u \end{cases}$$

Son equivalentes sí y sólo si existe una transformación no-singular (invertible) $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para todo t se cumpla que:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$$

donde T es la llamada *matriz de transformación de similaridad* (*similarity transformation matrix*).

Transformación de coordenadas

Considerando la transformación de coordenadas:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$$

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \Rightarrow \Sigma_2 : \begin{cases} \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{D}u \end{cases}$$

Luego:

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{D}u \end{cases}$$

y el sistema equivalente tendrá matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{B}' &= \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{D}' &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

Ecuación característica de un sistema en el estado

Recordando que la función de transferencia para un sistema en el espacio de los estados está dada por:

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\frac{\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{p(s)}{q(s)} \end{aligned}$$

Resulta evidente que la ecuación característica está dada por:

$$\boxed{q(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

Nota: la matriz adjunta de $\mathbf{A}$ se define como:

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}^T$$

donde $m_{ij} \stackrel{def}{=} (-1)^{(i+j)} \det(\mathbf{A}_{\neg(i,j)})$ son los determinantes de los *menores* de $\mathbf{A}$, es decir las matrices $\mathbf{A}$ sin la fila i, ni la columna j.

Transformación SS a SS en forma canónica modal o de Jordan

De álgebra lineal, se sabe que la solución de:

$$q(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

entrega los *valores propios o eigenvalores* de $\mathbf{A}$, y que los *vectores propios o eigenvectores* asociados a cada valor satisfacen:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Es decir, se satisface:

$$\mathbf{p}_i \lambda_i = \mathbf{A}\mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

o matricialmente para todos los vectores/valores propios:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1\lambda_1 & \mathbf{p}_2\lambda_2 & \cdots & \mathbf{p}_n\lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 & \mathbf{A}\mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{p}_n \end{bmatrix}$$

Transformación SS a SS en forma canónica modal o de Jordan

Matricialmente entonces:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1\lambda_1 & \mathbf{p}_2\lambda_2 & \cdots & \mathbf{p}_n\lambda_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{p}_1 & \mathbf{A}\mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{p}_n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{P}$$

donde las matrices están dadas respectivamente por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n\end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Luego, el sistema equivalente en forma canónica modal o de Jordan puede encontrarse fijando la transformación de estado:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$$

Dado que con esta,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda$$

Funciones de transferencia equivalentes

Las funciones de transferencia de sistemas equivalentes:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\mathbf{x} + \mathbf{B}'u \\ y = \mathbf{C}'\mathbf{x} + \mathbf{D}'u \end{cases}$$

son iguales!

Para Σ_1: $G(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

Para Σ_2:
$$\begin{aligned} G'(s) &= \mathbf{C}'[s\mathbf{I} - \mathbf{A}']^{-1}\mathbf{B}' + \mathbf{D}' \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}]^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1})]^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= G(s) \end{aligned}$$

Nota: en la derivación se utilizó el resultado de álgebra lineal que establece que $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

¿Para que sirven las transformaciones de coordenadas?

1. Convertir entre formas canónica controlable y observable (aunque se puede hacer sin usar $\mathbf{T}$).
2. Convertir a forma canónica modal:
   1. Util para ver los polos dominantes.
   2. Util para reducción de modelos (quedarse con los polos dominantes).
   3. Util para balancear modelos, por ejemplo, cuando la función de transferencia tiene algunos coeficientes mucho mayores que otros, las formas CC o CO quedan con algunos coeficientes muy grandes con respecto a otros, lo cual fomenta errores numéricos en la solución. Esto se evita haciendo que todos los coeficientes sean de magnitudes similares y estructuras tipo diagonal como la modal.
      1. Ver en Matlab ssbal, balreal (balanced realization), en Python Control Package: balred.
      2. Alan J. Laub, Michael T. Heath, Chris C. Paige, Robert C. Ward. Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms. IEEE Transactions on Automatic Control, v. 32, n. 2, Feb. 1987.

Controlabilidad de sistemas equivalentes

Considere los sistemas equivalentes:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}'\mathbf{z} + \mathbf{B}'\mathbf{u} \\ y = \mathbf{C}'\mathbf{z} + \mathbf{D}'u \end{cases}$$

La matriz de controlabilidad de Σ_2 está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{A}'\mathbf{B}' & \cdots & \mathbf{A}'^{n-1}\mathbf{B}' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{TB} & \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{TB} & \cdots & \underbrace{\mathbf{TAT}^{-1}\cdots\mathbf{TAT}^{-1}}_{n-1 \text{ veces}}\mathbf{TB} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}\mathcal{C} \end{aligned}$$

Observación

El sistema Σ_2 es controlable sí y sólo si el sistema original Σ_1 es controlable.

Observabilidad de sistemas equivalentes

Considere los sistemas equivalentes:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}'\mathbf{z} + \mathbf{B}'u \\ y = \mathbf{C}'\mathbf{z} + \mathbf{D}'u \end{cases}$$

La matriz de observabilidad de Σ_2 está dada por:

$$\mathcal{O}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}' \\ \vdots \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}\mathbf{T}^{-1}$$

Observación

El sistema Σ_2 es observable sí y sólo si el sistema original Σ_1 es observable.

Ejercicio: Sistemas equivalentes

Dados los sistemas:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

1. Determine si son equivalentes, y de ser así, determine la transformación de estado.
2. Determine si son controlables.
3. Determine si son observables.
4. Obtenga la matriz de transición de estado.
5. Entregue una expresión para la solución del sistema.

Ejercicio: Sistemas equivalentes

Si dos sistemas son equivalentes, las relaciones entre las salidas y sus entradas deben ser las mismas, es decir, deben tener la misma función de transferencia.

Para Σ_1 se tiene:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

Ejercicio: Sistemas equivalentes

Para Σ_2 se tiene:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

Por lo tanto, ¡ambos sistemas son equivalentes!

Ejercicio: Sistemas equivalentes

Para encontrar la transformación de estado:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{T}^{-1} \qquad \mathbf{B}_2 = \mathbf{T}\mathbf{B}_1$$
$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{T}^{-1} \qquad \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1$$

Luego:

$$\mathbf{A}_2\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{A}_1 \qquad \mathbf{B}_2 = \mathbf{T}\mathbf{B}_1$$
$$\mathbf{C}_2 T = \mathbf{C}_1 \qquad \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1$$

Definiendo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Sistemas equivalentes

Se obtienen las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
t_{21} &= 0 \\
t_{22} &= -t_{12} \\
-t_{21} &= 0 \\
-t_{22} &= -t_{22} \\
0 &= t_{11} + t_{12} \\
1 &= t_{21} + t_{22} \\
1 &= t_{11} + 2t_{21} \\
1 &= t_{12} + 2t_{22}
\end{aligned}
$$

cuya solución establece que:

$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Ejercicio: Sistemas equivalentes

La matriz de controlabilidad para Σ_1 está dada por:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad para Σ_1 está dada por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como ambas matrices tienen determinante distinto de cero, el sistema Σ_1 es controlable y observable, al igual que su versión equivalente Σ_2.

Ejercicio: Sistemas equivalentes

La matriz de transición de estado de Σ_1 está dada por:

$$\Phi_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estado de Σ_2 está dada por:

$$\Phi_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Notar que, como

$$\mathbf{z}(t) = \Phi_2(t)\mathbf{z}_0 = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\Phi_1(t)x_0 = \mathbf{T}\Phi_1(t)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}_0$$

$$\boxed{\Phi_2(t) = \mathbf{T}\Phi_1(t)\mathbf{T}^{-1}}$$

La expresión anterior entrega otra manera de calcular la matriz de transición de estado para el sistema Σ_2 a partir de la matriz de transición de estado del sismtema Σ_1.

Ejercicio: Sistemas equivalentes

La solución de Σ_1 está dada por:

$$y(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_1\left[\Phi_1(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi_1(t-\tau)\mathbf{B}_1 u(\tau)d\tau\right]$$
$$= x_1(0) + e^{-t}x_2(0) + \int_0^t (1 + e^{-(t-\tau)})u(\tau)d\tau$$

De manera similar es posible obtener una expresión para el sistema Σ_2, sin embargo, debe tenerse presente que la expresión en este caso dependerá de las condiciones iniciales en las coordenadas transformadas de Σ_2.

$$y(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) = C_2\left[\Phi_2(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi_2(t-\tau)\mathbf{B}_2 u(\tau)d\tau\right]$$
$$= x_2(0) + (1 + e^{-t})x_2(0) + \int_0^t (1 + e^{-(t-\tau)})u(\tau)d\tau$$

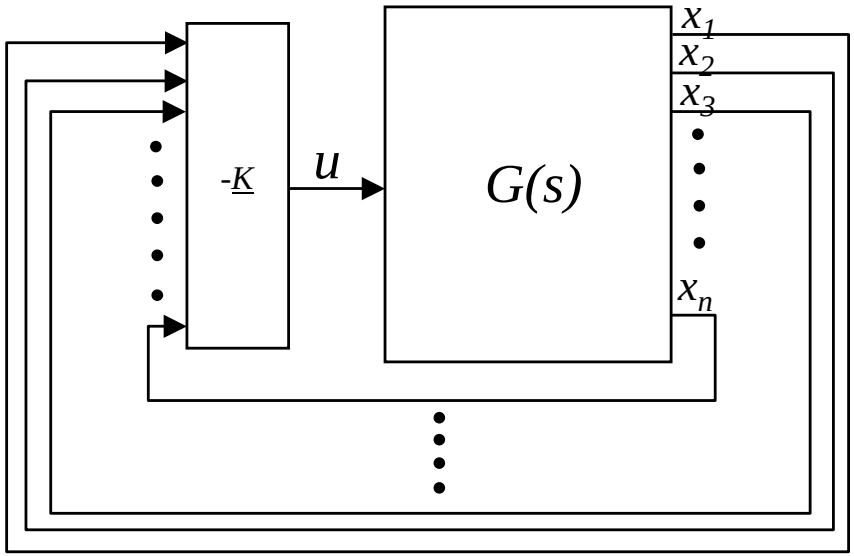
Nótese que en ambos casos la respuesta a estado cero (respuesta forzada) es la misma como era de esperarse, ya que los sistemas son el mismo en términos de entrada-salida. ¡Sólo difieren en la definición de sus variables internas (estados)!

Retro-alimentación del estado y relocalización de polos

Retro-alimentación lineal del estado consiste en definir la señal de control como una suma ponderada de los estados según:

$$u = -\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{K}$ es un vector de ganancias constantes de retro-alimentación.



Retro-alimentación del estado y relocalización de polos

Con la definición anterior, el comportamiento del sistema re-alimentado estará determinado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})}_{\mathbf{A}'}\mathbf{x}$$

Asumiendo que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se encuentran expresadas en su forma canónica controlable:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Retro-alimentación del estado y relocalización de polos

Luego:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & \dots & -(a_{n-2} + k_{n-1}) & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix}$$

Retro-alimentación del estado y relocalización de polos

Desde la matriz $\mathbf{A}'$ se puede ver que la ecuación característica correspondiente al sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\mathbf{x}$ está dada por:

$$\bar{q}(s) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1)$$

Notando que cada coeficiente de la ecuación característica del sistema re-alimentado se puede modificar arbitrariamente ajustando las ganancias k_i, es posible ubicar los polos del sistema re-alimentado en cualquier parte del plano complejo mediante el siguiente procedimiento:

Retro-alimentación del estado y relocalización de polos

Procedimiento

1. Elegir las posiciones r_i de los n polos del sistema en lazo cerrado.
2. Construir la ecuación catacterística correspondiente al sistema con polos $s = r_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\bar{q}^d(s) &= (s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_{n-1})(s - r_n) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0\end{aligned}$$

3. Igualar los coeficientes de $\bar{q}(s)$ y $\bar{q}^d(s)$, y despejar los valores de las ganancias:

$$k_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Nota: al control definido de esta manera lo llamaremos control PPFSF (*pole-placement by full state feedback*).

Retro-alimentación del Estado y Relocalización de Polos

Procedimiento - Nota

El desarrollo anterior asume que los estados del sistema, en su forma canónica controlable, están disponibles y pueden medirse.
En la práctica, lo anterior normalmente no ocurre, y se tiene una de las siguientes situaciones:

a) **Caso afortunado:** los estados del proceso están disponibles pero en otro sistema de coordenadas, por lo que será necesario aplicar una transformación de coordenadas para poder obtener los estados correspondientes a la forma canónica controlable.
b) **Caso complicado:** los estados del proceso no están disponibles, y deben ser inferidos a partir de la salida empleando un observador. Como veremos, el observador es una retroalimentación de la salida a través de un sistema del mismo orden que la planta, por lo tanto la nueva ecuación del lazo cerrado quedaría de orden $2n$ si se considera el observador como parte de la planta, de manera que la re-localización de polos de todo el sistema ya no es posible en forma directa, salvo por una parte de ellos.

Ejercicio PPFSF

Para el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s^3 - 3s^2 + 2s + 3.5}$$

a) Obtenga la ecuación de estado.

b) Fije los polos del sistema realimentado en $[-1, -2, -3]$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3.5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio PPFSF

La ecuación característica del sistema desado es:

$$\begin{aligned}\bar{q}^d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) \\ &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}u &= -\begin{bmatrix}6-3.5 & 11-2 & 6-(-3)\end{bmatrix} x \\ &= -\begin{bmatrix}2.5 & 9 & 9\end{bmatrix} x\end{aligned}$$

Control PPFSF con referencia

En el caso anterior se vio cómo la re-localización de polos puede hacer que el sistema sea asintóticamente estable, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{x}(0)\| = 0$$

dado que todos los polos pueden colocarse en el lado izquierdo del plano complejo.

¿Qué ocurre en este caso con la salida?

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \|y(t)\| &= \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\| \\ &= \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{C}e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{x}(0)\| = 0\end{aligned}$$

En general, esto es suficiente si el sistema está siendo permanentemente controlado con respecto a un mismo punto de operación, ya que en este caso se desea que, idealmente:

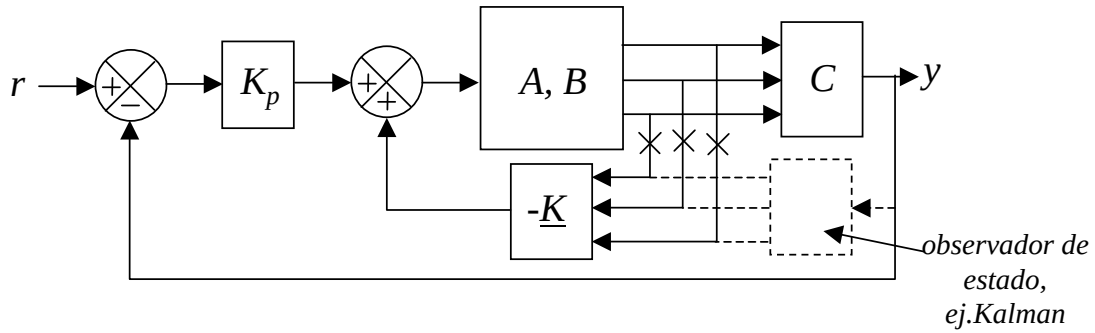
$$\|\Delta y(t)\| = \|y(t) - y^e\| = \|y(t) - \text{ref}\| = 0, \quad \forall t > 0$$

Control PPFSF con referencia

Sin embargo, normalmente se requiere cambiar el punto de operación, incluso si el sistema fue diseñado para operar entorno a un cierto punto de equilibrio. Esto implica, incorporar en el control derivado anteriormente información sobre la nueva referencia que determina el nuevo régimen de operación deseado.
Una manera de lograr este objetivo es mediante un término de corrección que se añade a la señal de control en base al error entre la referencia deseada y la salida actual del sistema, es decir se define:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \underbrace{K_p(r-y)}_{\text{Término de corrección}}$$

Control PPFSF con referencia



$$
\begin{aligned}
u &= -\mathbf{K}\mathbf{x} + K_p(r - y) \\
&= -\mathbf{K}\mathbf{x} + K_p(r - \mathbf{C}\mathbf{x}) \\
&= -(\mathbf{K} + K_p\mathbf{C})\mathbf{x} + K_p r
\end{aligned}
$$

Reemplazando el control anterior en la ecuación de estado del sistema se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}(\mathbf{K} + K_p\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}K_p r \\
&= [\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{K} + K_p\mathbf{C}))]\mathbf{x} + \mathbf{B}K_p r
\end{aligned}
$$

Control PPFSF con referencia

Se puede calcular:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{K} + K_p\mathbf{C}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + K_p b_0 & k_2 + K_p b_1 & \dots & k_{n-1} + K_p b_{n-2} & k_n + K_p b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + k_1 + K_p b_0) & -(a_1 + k_2 + K_p b_1) & \dots & -(a_{n-2} + k_{n-1} + K_p b_{n-2}) & -(a_{n-1} + k_n + K_p b_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior, es posible obtener la ecuación característica $\bar{q}(s)$ e igualar los coeficientes de ésta a los de la ecuación característica deseada $\bar{q}^d(s)$, obteniéndose las relaciones:

$$k_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1} - K_p b_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ejercicio PPFSF con referencia

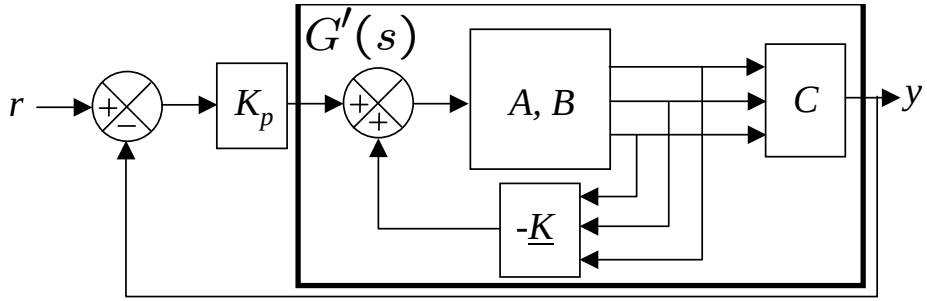
Considerando el ejercicio anterior, pero ahora incluyendo la referencia, las ganancias deben seleccionarse según:

$$k_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1} - K_p b_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Luego, si $K_p = 6$:

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_0 - a_0 - K_p b_0 \\ &= 6 - 3.5 - 6 \cdot 1 = -3.5 \\ k_2 &= \alpha_1 - a_1 - K_p b_1 \\ &= 11 - 2 - 6 \cdot 0 = 9 \\ k_3 &= \alpha_2 - a_2 - K_p b_2 \\ &= 6 - (-3) - 6 \cdot 0 = 9 \end{aligned}$$

Ejercicio PPFSF con referencia



Con las ganancias anteriores, el sistema *interno* tendrá matrices:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\mathbf{K}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(3.5+k_1) & -(2+k_2) & -(-3+k_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

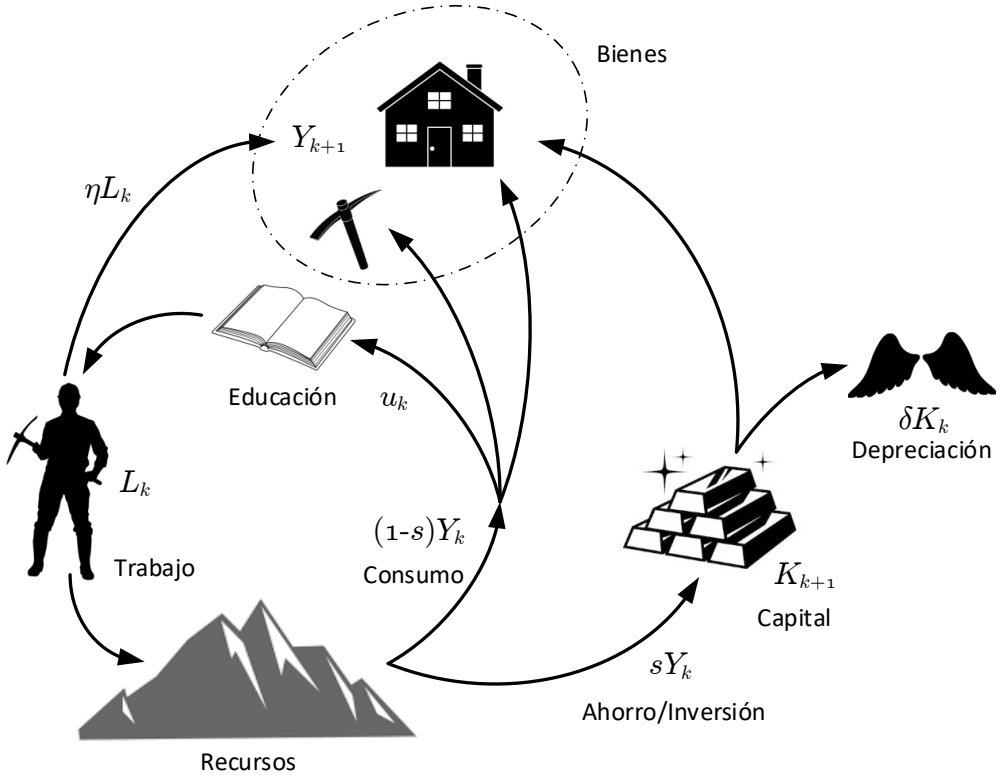
$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio PPFSF con referencia

$$\Rightarrow G'(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 0}$$

$$\bar{G}'(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p G'(s)}{1 + K_p G'(s)} = \frac{K_p}{s^3 + 6s^2 + 11s + 0 + K_p} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico



Dinámica de crecimiento socioeconómico.

La figura ilustra la dinámica del crecimiento socioeconómico. En este la producción de bienes de consumo Y_{k+1} depende la cantidad de trabajo de la fuerza laboral L_k menos la educación u_k que si bien es un bien, no es de consumo y se destina directamente a potenciar las capacidades de la fuerza laboral L_k. El trabajo transforma los recursos en un capital K_{k+1}, pero una parte del capital se deprecia o pierde en el proceso.

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

El crecimiento socioeconómico puede modelarse por el siguiente sistema de ecuaciones de diferencias discretas:

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= (1-s)Y_k + \eta L_k - u_k \\ L_{k+1} &= L_k + u_k \\ K_{k+1} &= sY_k - \delta K_k \end{aligned}$$

donde

- Y_k es la producción total de bienes,
- L_k es la fuerza laboral,
- K_k es el capital total (financiero, instalaciones, maquinaria),
- s es la tasa de ahorro/inversión ($1-s$ es la tasa de consumo),
- η es la eficiencia de la fuerza laboral,
- δ es la depreciación del capital,
- u_k es la inversión en educación.

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Asumiendo que $s = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2}$ y que la inversión en educación u_k puede utilizarse como variable manipulada para incrementar el capital total K_k que se desea controlar:

1. Encuentre el punto de equilibrio del sistema.
2. Obtenga las matrices en el espacio de los estados del modelo linealizado.
3. Determine si el sistema es controlable.
4. Determine si el sistema es observable.
5. Obtenga la función de transferencia del sistema.
6. Dibuje el LGR del sistema realimentado con retroalimentación negativa unitaria y un controlador puramente proporcional. Indique si el sistema es estabilizable con el controlador proporcional.
7. Desarrolle un controlador que localice todos los polos en $z = 0$ y tome en cuenta la referencia con $K_p = 1$.

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

1. Punto de equilibrio.

El equilibrio de un sistema discreto ocurre cuando su estado no cambia para una señal de entrada fija, es decir $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ y $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$. Luego de la ecuaciones del modelo con estados y control constante:

$$L = L + u \Rightarrow L - L = u \Rightarrow u = 0$$

$$Y = (1-s)Y + \eta L - u \Rightarrow sY = \eta L - \cancelto{0}{u} \Rightarrow Y = \frac{\eta}{s} L$$

$$K = sY - \delta K \Rightarrow K(1+\delta) = sY \Rightarrow Y = \frac{1+\delta}{s} K$$

Es interesante notar que:

1. El sistema se estabiliza en un punto si no se invierte en educación, ya que $u = 0$ resulta de las condiciones de equilibrio.
2. Los bienes producidos Y son proporcionales a la fuerza laboral L, su eficiencia η e inversamente proporcionales al ahorro/inversión s.
3. Los bienes producidos Y son proporcionales al capital K, su depreciación δ (velocidad con que pierden valor/utilidad), e inversamente proporcionales al ahorro/inversión s.

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

2. Linealización.

El sistema es lineal, por lo que no es necesario linealizarlo. Las matrices se obtienen directamente del sistema de ecuaciones de diferencias asumiendo que el vector de estado es $\mathbf{x}_k = [x_{1k}\ x_{2k}\ x_{3k}]^T = [Y_k\ L_k\ K_k]^T$:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1-s & \eta & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ s & 0 & -\delta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

3. Controlabilidad.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\right] \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(\mathcal{C}) = -1 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(0 + \frac{1}{4}\right) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{¡Es controlable!}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

4. Observabilidad.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathcal{O}) = -\frac{1}{2} \cdot \left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \neq 0 \Rightarrow \text{¡Es observable!}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

5. Función de transferencia.

La función de transferencia discreta está dada por:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \mathbf{C}(\mathbf{zI}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & z-1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & z+\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \frac{1}{2}(z-1) & \frac{1}{4} & \square \end{bmatrix}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\frac{1}{2}z-\frac{3}{4}}{z^3-z^2-\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Observación: Los valores $\square$ *no son necesarios porque al multiplicar por la matriz* $\mathbf{C}$ *solo importan los valores de la última fila de* $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ *y al multiplicar por la matriz* $\mathbf{B}$ *no importa la última columna.*

Para calcular la inversa de una matriz $\mathbf{M}$ *es conveniente utilizar la adjunta (ver pág. 41 de los apuntes L10 del curso):*

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\text{Adj}(\mathbf{M})}{\det(\mathbf{M})}$$

donde

$$[\text{Adj}(\mathbf{M})]_{(i,j)} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} \det\left(\mathbf{M}_{(\neg j, \neg i)}\right)$$

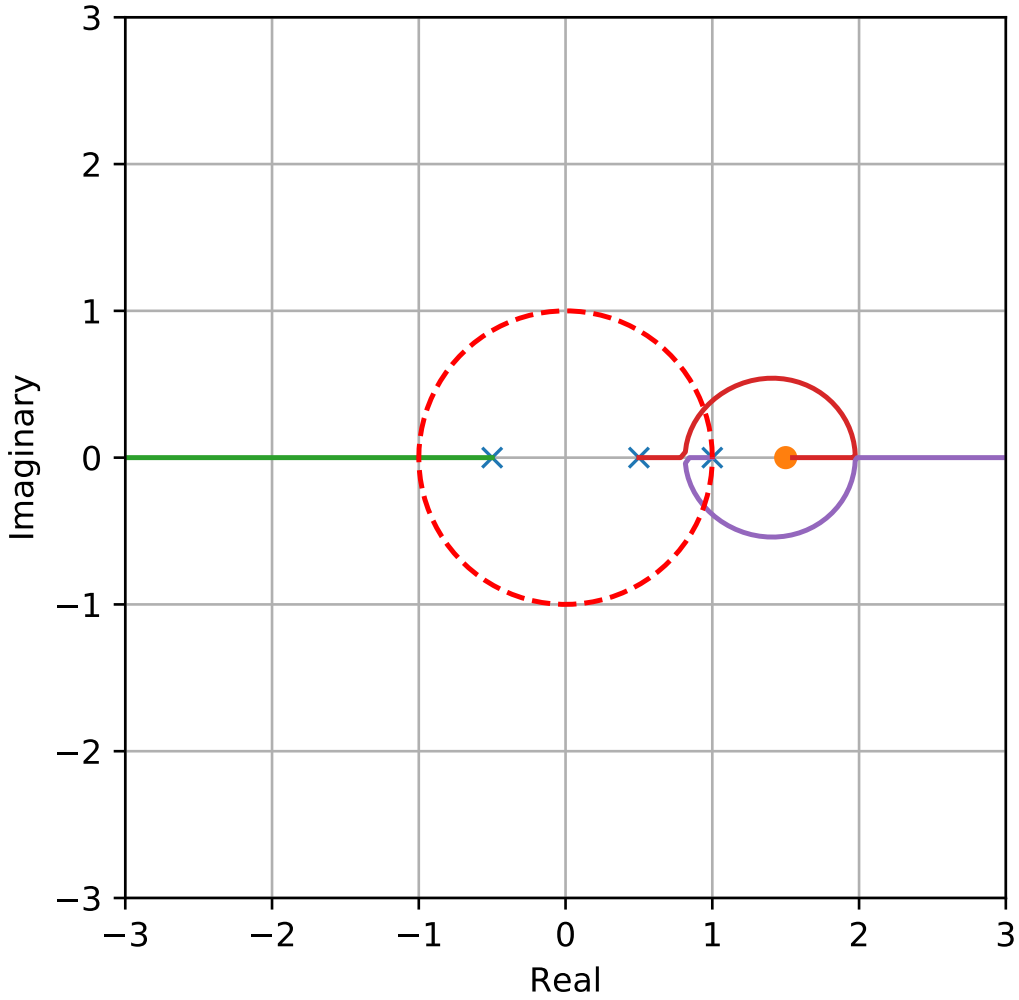
es el elemento de la fila i*-ésima y columna* j*-ésima de la matriz adjunta* $\text{Adj}(\mathbf{M})$*, también llamada* matriz de cofactores transpuesta *de* $\mathbf{M}$*. La matriz* $\text{Adj}(\mathbf{M})$ *se compone en la fija* (i, j) *del* menor *calculado como el determinante de la submatriz formada eliminando la fila* j *y la columna* i *de* $\mathbf{M}$*. En algebra lineal el* menor *de una matriz es el determinante de una submatriz.*

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

6. LGR.

A partir de la función de transferencia discreta se obtienen los ceros y polos como se muestra en el gráfico del lugar geométrico de las raíces. Cabe notar que en este caso con $K > 0$ corresponde realizar un LGR-. Es posible observar que las raíces se encuentran en el interior del círculo unitario para $K \in [0, K_c)$, pero con ganancias $K > K_c$ el LGR seguirá asíntotas positivas y negativas sobre el eje real como se muestra en la figura. Por lo tanto, es posible estabilizar el sistema con un controlador puramente proporcional si $K < K_c$.

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico



Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Podemos encontrar K_c observando que el LGR deja el círculo unitario por $z = -1$. En ese caso:

$$\begin{aligned} \bar{q}(z=-1) &= 1 + K_c F(-1) = 0 \\ \Rightarrow K_c &= -\frac{1}{F(-1)} \\ &= -\frac{(-1)^3 - (-1)^2 - \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}(-1) - \frac{3}{4}} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

El otro punto de salida es más difícil de calcular. No es obvia la posición de salida de las raíces complejas conjugadas. Asumiendo una posición arbitraria $z = e^{j\theta}$, que satisface la ecuación caracterísitca de lazo cerrado será necesario resolver:

$$
\begin{aligned}
\bar{q}(z = e^{j\theta}) &= 1 + K_c F(e^{j\theta}) = 0 \\
&= 1 - K_c \frac{\frac{1}{2}e^{j\theta} - \frac{3}{4}}{e^{3j\theta} - e^{2j\theta} - \frac{1}{4}e^{j\theta} + \frac{1}{4}} = 0 \\
&= e^{3j\theta} - e^{2j\theta} - \frac{1}{4}e^{j\theta} + \frac{1}{4} - K_c\frac{1}{2}e^{j\theta} + K_c\frac{3}{4} = 0 \qquad \cdot 4e^{-j\theta} \\
&= 4e^{2j\theta} - 4e^{j\theta} - 1 + e^{-j\theta} - 2K_c + 3K_c e^{-j\theta} = 0 \\
&= 4\cos(2\theta) + j4\sin(2\theta) - 4\cos(\theta) - j4\sin(\theta) - 1 + \cos(\theta) - j\sin(\theta) \\
&\quad -2K_c + 3K_c\cos(\theta) - j3K_c\sin(\theta) = 0 \\
&= 4\cos(2\theta) - 3\cos(\theta) - 1 - 2K_c + 3K_c\cos(\theta) \\
&\quad +j\left[4\sin(2\theta) - 5\sin(\theta) - 3K_c\sin(\theta)\right] = 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Usando las relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\\ \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\\ \sin^2(\theta) &= 1 - \cos^2(\theta)\end{aligned}$$

Se puede reducir la expresión anterior a:

$$\begin{aligned}\bar{q}(z = e^{j\theta}) &= 1 + K_c F(e^{j\theta}) = 0\\ &= 8\cos^2(\theta) + [-3 + 3K_c]\cos(\theta) - [5 + 2K_c]\\ &\quad + j\left[8\sin(\theta)\cos(\theta) - 5\sin(\theta) - 3K_c\sin(\theta)\right] = 0\end{aligned}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Igualando la parte imaginaria a cero:

$$\begin{aligned} 8\cos(\theta) - 5 - 3K_c &= 0 \\ \cos(\theta) &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}K_c \end{aligned}$$

Reemplazando $\cos(\theta)$ en la parte real e igualando también a cero:

$$\begin{aligned} 8\left[\frac{5}{8} + \frac{3}{8}K_c\right]^2 + [-3 + 3K_c]\left[\frac{5}{8} + \frac{3}{8}K_c\right] - [5 + 2K_c] &= 0 \qquad / \cdot 8 \\ [5 + 3K_c]^2 + [-3 + 3K_c][5 + 3K_c] - [5 + 2K_c] &= 0 \qquad / \cdot 8 \\ 25 + 30K_c + 9K_c^2 - 15 + 6K_c + 9K_c^2 - 40 - 16K_c &= 0 \\ 18K_c^2 + 20K_c - 30 &= 0 \\ 9K_c^2 + 10K_c - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Finalmente,

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 9 \cdot 15}}{18} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 540}}{18} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{640}}{18} \\ &= \frac{-10 \pm 8\sqrt{10}}{18} \\ &= \frac{-5 \pm 4\sqrt{10}}{9} = 0.85 \end{aligned}$$

La ganancia crítica es 0.85 y ocurre para los polos complejos conjugados, ya que el polo que sale del círculo unitario por $z = -1$ lo hace con una ganancia mayor de 1.2 ($K = \frac{6}{5}$).

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

7. Control PPFSF con referencia.

Las ganancias del controlador para la relocalización de polos son:

$$K_{i+1} = \alpha_i - a_i - K_p b_i$$

con $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = -1$, $b_0 = -\frac{3}{4}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 0$, $K_p = 1$, lo que implica:

$$\begin{aligned} K_1 &= 0 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \\ K_2 &= 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\ K_3 &= 0 + 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Para encontrar la matriz de transformación $\mathbf{T}$ que lleva las variables de estado del sistema original a la forma canónica controlable, es decir $\mathbf{x}_c = \mathbf{T}\mathbf{x}$, se asume:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix},$$

dadas las matrices del sistema original y su forma canónica controlable, entonces es necesario resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_c &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c\mathbf{T} &= \mathbf{T}\mathbf{A} \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_c\mathbf{T} &= \mathbf{C} \end{aligned}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Reemplazando las matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Lo anterior resulta en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ -\frac{m_{11}}{4}+\frac{m_{21}}{4}+m_{31} & -\frac{m_{12}}{4}+\frac{m_{22}}{4}+m_{32} & -\frac{m_{13}}{4}+\frac{m_{23}}{4}+m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{2}+\frac{m_{13}}{2} & \frac{m_{11}}{2}+m_{12} & -\frac{m_{13}}{2} \\ \frac{m_{21}}{2}+\frac{m_{23}}{2} & \frac{m_{21}}{2}+m_{22} & -\frac{m_{23}}{2} \\ \frac{m_{31}}{2}+\frac{m_{33}}{2} & \frac{m_{31}}{2}+m_{32} & -\frac{m_{33}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_{11}+m_{12} \\ -m_{21}+m_{22} \\ -m_{31}+m_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3m_{11}}{4}-\frac{m_{21}}{2} & \frac{3m_{12}}{4}-\frac{m_{22}}{2} & \frac{3m_{13}}{4}-\frac{m_{23}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

De la última ecuación matricial tenemos:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{2}{3}m_{21} \\ m_{12} &= \frac{2}{3}m_{22} \\ m_{13} &= \frac{2}{3}m_{23} + \frac{4}{3} \end{aligned} \qquad (*)$$

De la segunda ecuación matricial tenemos que:

$$\begin{aligned} m_{22} &= m_{21} \\ m_{11} &= m_{12} \\ m_{32} &= 1 - m_{31} \end{aligned}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

De la primera ecuación matricial tenemos que:

$$\begin{aligned} m_{23} &= -\frac{m_{13}}{2} \quad \text{con (*)} \Rightarrow \frac{4}{3}m_{13} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_{13} = 1, m_{23} = -\frac{1}{2} \\ m_{21} &= \frac{m_{11}}{2} + \frac{m_{13}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}m_{21} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}m_{21} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{21} = \frac{3}{4}, m_{11} = \frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}, m_{12} = \frac{1}{2}, m_{22} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{m_{13}}{4} + \frac{m_{23}}{4} + m_{33} &= -\frac{m_{33}}{2} \\ -\frac{1}{4}\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} + m_{33} &= -\frac{m_{33}}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}m_{33} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \Rightarrow m_{33} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{m_{11}}{4} + \frac{m_{21}}{4} + m_{31} &= \frac{m_{31}}{2} + \frac{m_{33}}{2} \\ \frac{m_{31}}{2} &= \frac{m_{33}}{2} + \frac{m_{11}}{4} - \frac{m_{21}}{4} \\ &= \frac{5}{36}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4} \\ &= \frac{10+18+9}{144} = \frac{37}{144} \Rightarrow m_{31} = \frac{37}{72} \end{aligned}$$

$$m_{32} = 1 - m_{31} = 1 - \frac{37}{72} = \frac{35}{72}$$

Ejercicio: Control de crecimiento socioeconómico

Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{37}{72} & \frac{35}{72} & \frac{5}{36} \end{bmatrix}$$

Luego el controaldor será:

$$u_k = -\mathbf{KTx}_k + K_p(r_k - y_k)$$

■

Referencias adicionales

- G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems.* 4^a ed. (1^a ed. 1986), Prentice Hall, 2002.

- R. J. Mayhan. *Discrete-Time and Continuous-Time Linear Systems.* Addison Wesley, 1984

- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, M.E. Salgado. *Control System Design.* Prentice Hall, 2001.