Tema: Teoremas del valor final y valor inicial.

◁ *Guá de Ejercicios # 9* ▷

1. A partir del diagrama de bloques de la figura 1, determine el valor final de $y(t)$ cuando $p(t)$ crece como rampa unitaria. Asuma que el sistema realimentado es siempre estable. Tenemos:

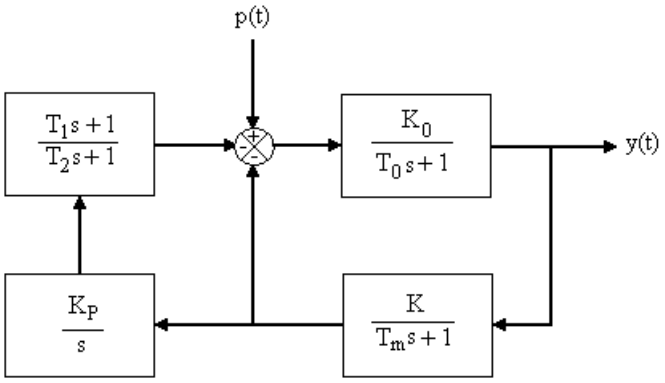


Figura 1: Diagrama de bloques

$$Y(s) = A(s)\frac{K_0}{T_0 s+1} \tag{1}$$
$$A(s) = P(s) - D(s) - B(s) \tag{2}$$
$$B(s) = Y(s)\frac{K}{T_m s+1} \tag{3}$$
$$C(s) = B(s)\frac{K_p}{s} \tag{4}$$
$$D(s) = C(s)\frac{(T_1 s+1)}{(T_2 s+1)} \tag{5}$$

(3) en (4):

$$C(s) = Y(s)\frac{K}{T_m s+1}\frac{R_p}{s} \tag{6}$$

(6) en (5):

$$D(s) = Y(s)\frac{K}{T_m s+1}\frac{K_p}{s}\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1} \tag{7}$$

(7) y (3) en (2):

$$A(s) = P(s) - Y(s)\frac{K}{T_m s+1}\frac{K_p}{s}\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1} - Y(s)\frac{K}{T_m s+1} \tag{8}$$

(8) en (1):

$$Y(s) = \left[P(s) - Y(s)\frac{K}{T_m s+1}\frac{K_p}{s}\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1} - Y(s)\frac{K}{T_m s+1}\right]\frac{K_0}{T_0 s+1}$$
$$Y(s) = \left[P(s) - \frac{K}{T_m s+1}Y(s)\left(\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1}\frac{K_p}{s}+1\right)\right]\frac{K_0}{T_0 s+1}$$
$$Y(s)\left[1 + \frac{K_0}{T_0 s+1}\frac{K_m}{T_m s+1}\left(\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1}\frac{K_p}{s}+1\right)\right] = P(s)\frac{K_0}{T_0 s+1}$$

Además: $P(s) = 1/s^2$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}\frac{K_0}{T_0 s+1}\frac{1}{\left[1+\frac{K_0}{T_0 s+1}\frac{K_m}{T_m s+1}\left(\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1}\frac{K_p}{s}+1\right)\right]}$$

Usando el Teorema del valor final y asumiendo estabiidad ($\lim_{t\to\infty} y(t) < \infty$):

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{1}{K_p K_m}$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K_0}{T_0 s+1}\frac{K_m}{T_m s+1}\left(\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1}\frac{K_p}{s}+1\right)} \tag{9}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{K_0}{s(T_0 s+1)\left[1+\frac{K_0 K_m K_p T_1}{(T_0 s+1)(T_m s+1)(T_2 s+1)}+\frac{K_0 K_m K_p}{(T_0 s+1)(T_m s+1)(T_2 s+1)s}+\frac{K_0 K_m}{(T_0 s+1)(T_m s+1)}\right]}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\frac{1}{(T_2 s+1)(T_m s+1)K_0}}{T_0 s^4 T_m T_2+T_0 s^3 T_m+T_0 s^3 T_2+T_0 s^2+T_m s^3 T_2+T_m s^2+T_2 s^2+s+K_0 K_m K_p+K_0 K_m K_p T_1 s+K_0 K_m s^2 T_2+K_0 K_m s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_m K_p}$$

Este método si bien es bastante claro es demasiado largo, en cambio si trabajamos la expresión (9) llegamos a:

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s\left(\frac{T_0 s+1}{K_0}\right)+K_p K_m \frac{T_1 s+1}{(T_m s+1)(T_2 s+1)}+\frac{K_m s}{(T_m s+1)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_p K_m}$$

Esto último sin duda es mucho más directo.