Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 3

Bode segundo orden, Compensador y Ziegler Nichols

23 de Mayo 2025

Martín Valencia - martin.valencia@uc.cl

Análisis de magnitud y fase en sistemas de segundo orden

La función de transferencia estándar de un sistema de segundo orden es:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Al evaluar en frecuencia ($s = j\omega$):

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega\omega_n}$$

Magnitud

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}}$$

Fase

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Análisis por rangos de frecuencia

- **Para** $\omega \ll \omega_n$:

$$|G(j\omega)| \approx 1 \quad \Rightarrow \quad 20\log_{10}|G(j\omega)| \approx 0 \text{ dB}, \quad \angle G(j\omega) \approx 0^\circ$$

- **Para** $\omega = \omega_n$:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\xi} \quad \text{(solo si hay pico)}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

- **Para** $\omega \gg \omega_n$:

$$|G(j\omega)| \approx \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \text{pendiente de } -40 \text{ dB/década}, \quad \angle G(j\omega) \approx -180^\circ$$

Derivación de la frecuencia de resonancia ω_r

Buscamos la frecuencia $\omega = \omega_r$ tal que $|G(j\omega)|$ sea máxima.

Partimos de:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}}$$

El máximo se alcanza cuando el denominador es mínimo. Sea:

$$D(\omega) = \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}$$

Buscamos ω_r tal que $\frac{d}{d\omega} D(\omega)^2 = 0$:

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2\right] = 0$$

Calculamos:

$$-4\omega(\omega_n^2 - \omega^2) + 8\xi^2\omega_n^2\omega = 0$$

Factorizando $\omega \neq 0$:

$$-4(\omega_n^2 - \omega^2) + 8\xi^2\omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\omega_n^2 + 4\omega^2 + 8\xi^2\omega_n^2 = 0$$

$$4\omega^2 = 4\omega_n^2(1 - 2\xi^2) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_n^2(1 - 2\xi^2)$$

Este valor no representa el máximo de magnitud de la respuesta temporal, sino la frecuencia a la cual aparece el modo oscilatorio de mayor amplitud.

En cambio, para magnitud, se demuestra que el pico de resonancia ocurre en:

$$\boxed{\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{(válido solo si } \xi < 1)$$

Aunque para este curso será válida la aproximación

$$\boxed{\omega_r = \omega_n} \quad \text{(sólo si } 0 < \xi < 1\text{)}$$

De esta forma, el pico de resonancia se puede aproximar como.

$$M_r = |G(j\omega_r)| = K\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_r^2)^2 + (2\xi\omega_r\omega_n)^2}} \approx K\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_n^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_n)^2}} = K\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(2\xi\omega_n^2)}} = \frac{K}{2\xi}$$

$$\boxed{M_r = \frac{K}{2\xi}}$$

Si se usara el valor no aproximado.

$$\boxed{M_r = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Problema 1

Considere el siguiente sistema de segundo orden:

$$G(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde los parámetros son:

$$K = 2, \qquad \omega_n = 8 \text{ rad/s}, \qquad \xi = 0.3$$

1. Exprese la función de transferencia con los valores numéricos evaluados.
2. Calcule la magnitud y fase de $G(j\omega)$ para:
   a) $\omega = 0.8$ rad/s
   b) $\omega = \omega_n$
   c) $\omega = 80$ rad/s
3. Determine si el sistema presenta pico de resonancia:
   a) Justifique si existe o no un pico.
   b) En caso afirmativo, calcule la frecuencia de resonancia ω_r.
   c) Calcule el valor del pico de resonancia M_r en valor absoluto y en decibeles.
4. Comente cómo se vería el diagrama de Bode en magnitud a partir de sus respuestas.

Problema 2

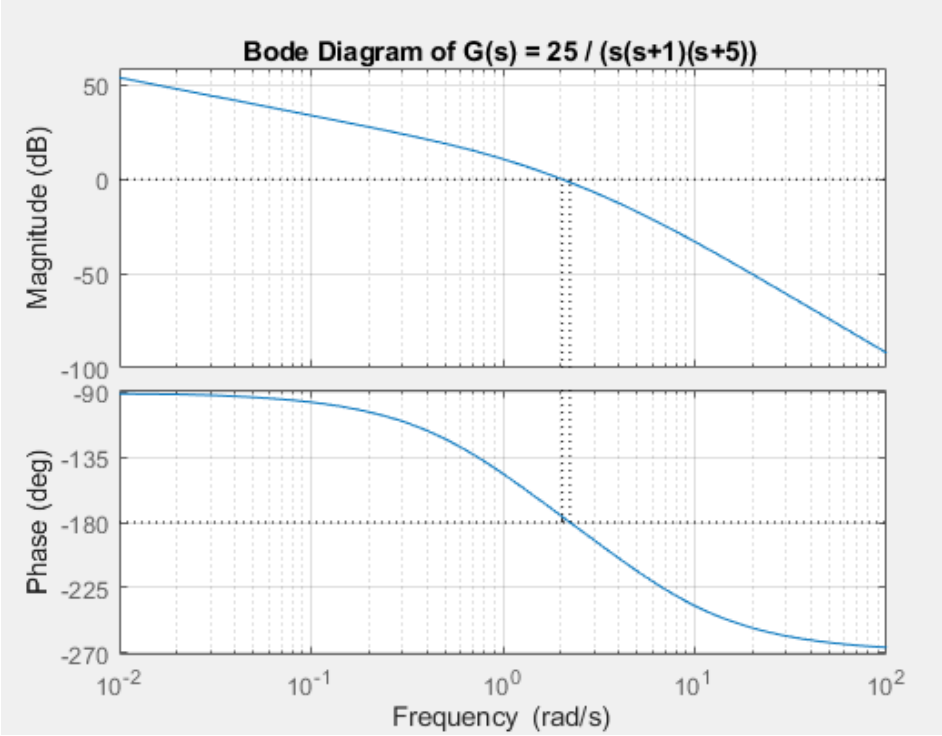
Dado el sistema:

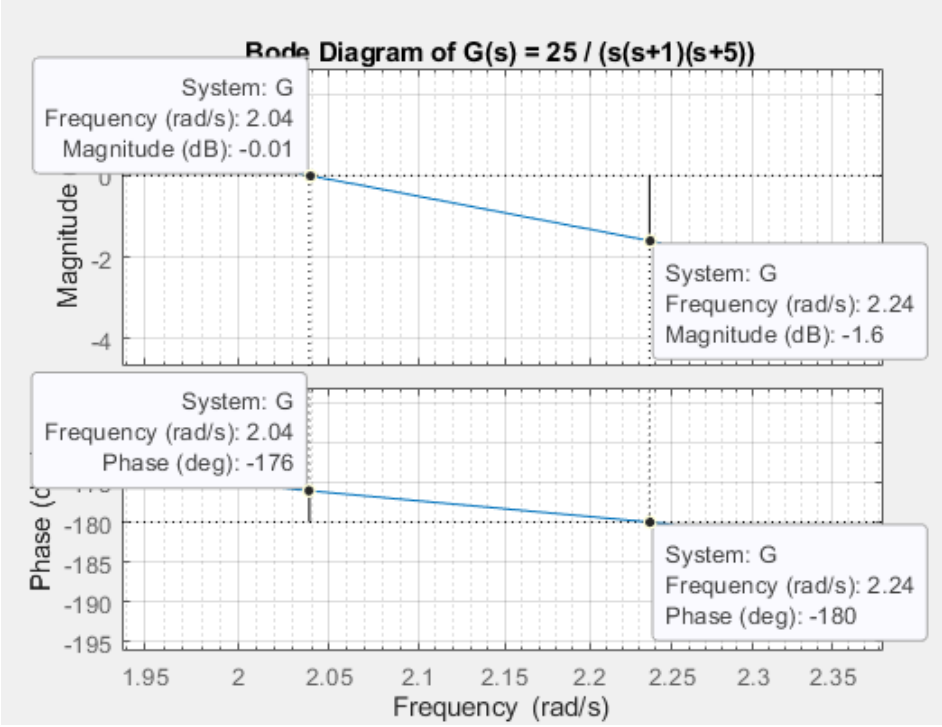
$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+5)}$$

Se desea diseñar un compensador de adelanto de la forma

$$C(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Con $\frac{1}{T} = 2.2$ de modo que asegure que el margen de fase es de al menos 40°, determine cual es la ganancia en DC, para ello use los siguientes diagramas de bode.


Bode Diagram of G(s) = 25 / (s(s+1)(s+5))
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/s)


Bode Diagram of G(s) = 25 / (s(s+1)(s+5))
System: G
Frequency (rad/s): 2.04
Magnitude (dB): -0.01
System: G
Frequency (rad/s): 2.24
Magnitude (dB): -1.6
System: G
Frequency (rad/s): 2.04
Phase (deg): -176
System: G
Frequency (rad/s): 2.24
Phase (deg): -180
Magnitude
0
-2
-4
Phase
-180
-185
-190
-195
1.95
2
2.05
2.1
2.15
2.2
2.25
2.3
2.35
Frequency (rad/s)

Problema 3

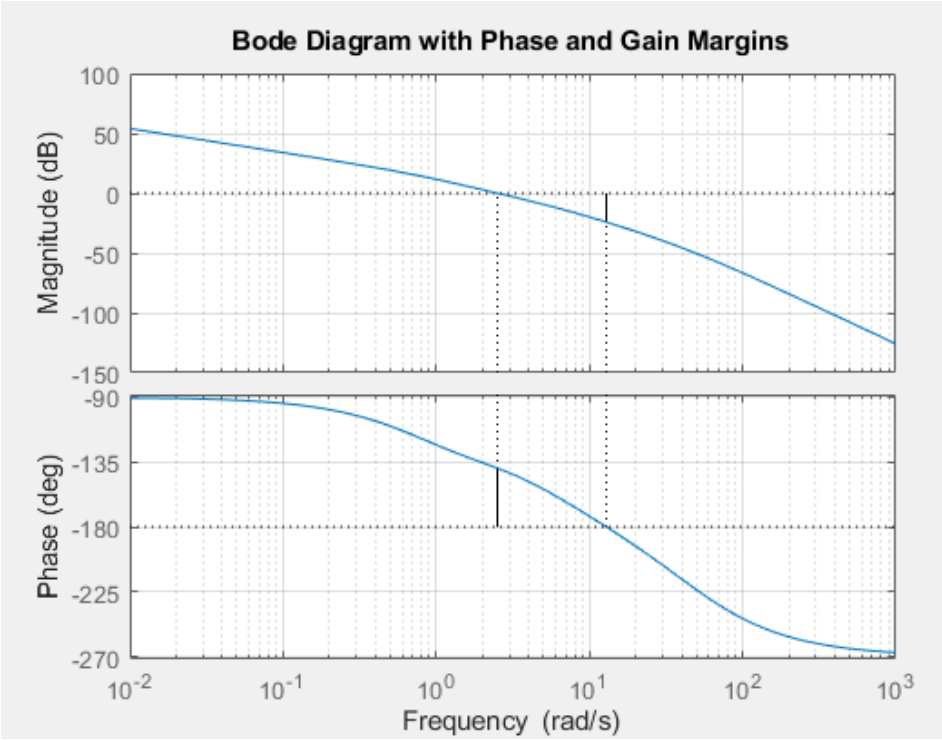
Considere la planta

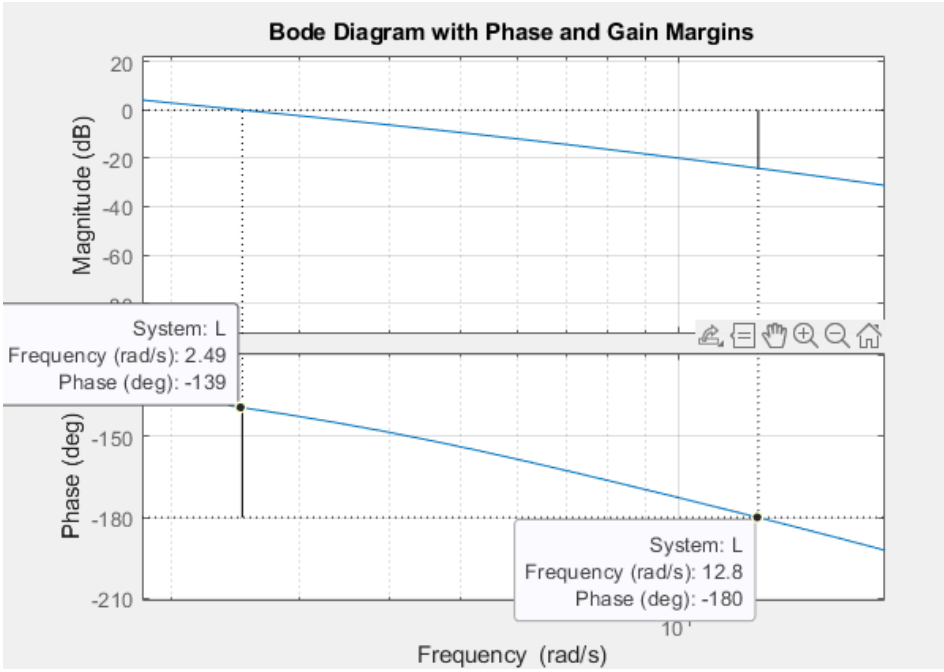
$$G_o(s) = \frac{-s+1}{(s+1)(s+a)}$$

donde $a > 0$. Si se aplica el método de oscilación de Ziegler y Nichols, determine el valor de la ganancia crítica K_c y del período de oscilación P_c obtenidos del experimento. Ajuste los parámetros de un PID en base a K_c y P_c obtenidos, usando la tabla de Z-N:

	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_c$		
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$P_c/8$

Anexo


Bode Diagram with Phase and Gain Margins
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
-150
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
Frequency (rad/s)


Bode Diagram with Phase and Gain Margins
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
System: L
Frequency (rad/s): 2.49
Phase (deg): -139
Phase (deg)
-150
-180
-210
System: L
Frequency (rad/s): 12.8
Phase (deg): -180
10^1
Frequency (rad/s)