Guía de Ejercicios

1. Modelación de Sistemas

- Sys. Desc. $\rightarrow$ ODE
- Block Desc. $\rightarrow$ closed-loop TF
- ODE $\rightarrow$ TF ($t \xrightarrow{\mathcal{L}} s$)
- ODE $\rightarrow$ SS
- TF $\rightarrow$ SS
- SS $\rightarrow$ TF
- Modelo no-lineal $\rightarrow$ Modelo lineal (Linealización)
- Tiempo continuo $\rightarrow$ Tiempo discreto (Discretización)
- Retardos & Aproximación de Padé

1. Para el sistema de la figura 1:
   (a) Determine la ecuación diferencial correspondiente.
   (b) Dibuje el circuito eléctrico análogo y sus parámetros.
   (c) Función de la transferencia $X(s)/F(s)$.

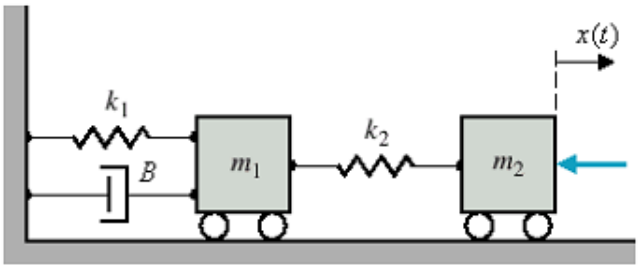


Figura 1: Sistema masas-resortes-amortiguador.

2. Para el sistema de la figura 2, en el cual el resorte es de fuerza no-lineal dada por:

$$f = K_1 x + K_2 x^3$$

   (a) Encuentre la ecuación diferencial del sistema.
   (b) Linealice en tomo al punto de operación $(x^*, dx^*/dt) = (x_0, v_0)$.
   (c) Encuentre su función de transferencia $X(s)/F(s)$.

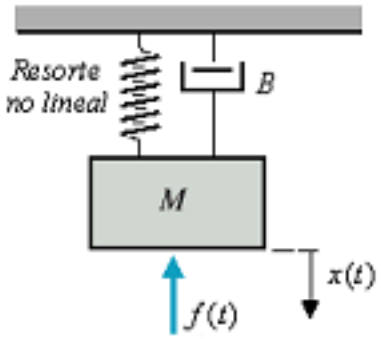


Figura 2: Sistema masa-resorte-amortiguador.

3. Encuentre un modelo matemático para el sistema de la figura 3 y linealícelo para θ_1 y θ_2 cercanos a 0.

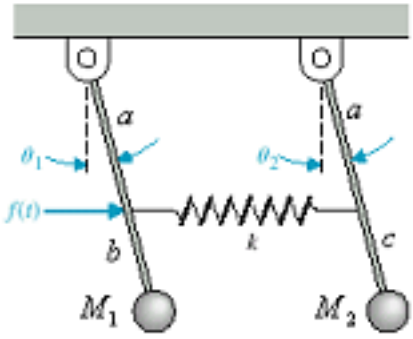


Figura 3: Sistema pendulo doble con resorte.

4. La figura 4 (a) muestra un proceso térmico consistente en un calefactor y dos estanques cuyos niveles no varían en el tiempo. Al primer estanque ingresa un flujo F_0 a temperatura T_0 referida a la temperatura ambiente. El flujo de salida del segundo estanque es $F_2 = F_0$; su temperatura es T_2, relativa también a la temperatura ambiente. La figura 4 (b) presenta un diagrama de bloques del proceso, realimentado con un controlador de función de transferencia $G_c(s)$.

   (a) Indique qué variables del proceso hacen las veces de variable manipulada, perturbación y variable controlada. ¿Qué sensor y qué actuador se requieren para establecer un lazo de control realimentado del proceso?

   (b) Compruebe que el sistema en lazo abierto de la figura 4 (b) constituye un modelo del proceso térmico mostrado en la figura 4 (a).

   (c) Considerando valores de $\tau_1 = 10\,s$, $\tau_2 = 20\,s$, formule un modelo de variables de estado para el proceso en lazo abierto.

   Pistas:

   - Capacidad Calórica: La energía Q requerida para elevar la temperatura de una masa m con capacidad de calor específico c en dT grados está dada por:

     $$Q = m\,c\,dT$$

     donde $dT = T - T_0$ es la diferencia entre la temperatura inicial T_0 y la temperatura T que alcance el objeto.

- Conducción de Calor: La *ley de conducción de calor* o *ley de Fourier* (base de la *ecuación de calor*) establece que la tasa de transferencia (posible périda) de calor por unidad de tiempo dQ/dt debido a la conductividad térmica del material está dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{dT}{dx} = k\frac{A}{L}dT$$

donde $dT = T - T_0$ es la diferencia entre la temperatura T del objeto y la temperatura al otro lado de la superficie de área A y espesor $dx = L$ que contiene al objeto y cuya conductividad térmica es k.

- Balance de energía: De acuerdo al balance de energía, la energía calórica Q contenida en un objeto al cuál se le aplica calor a una tasa q_{in} y que tiene pérdidas con tasa q_{out} estará dada por:

$$Q(t) = \int_0^t q_{in}(\tau)d\tau - \int_0^t q_{out}(\tau)d\tau$$

Notar que mientras Q es la energía total almacenada, q_{in} y q_{out} son flujos de energía, es decir cantidad de energía por unidad de tiempo o potencias. Aplicando la regla para la derivada de una integral:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy = f(x,a(x))\left.\frac{da}{dx}\right|_x - f(x,b(x))\left.\frac{db}{dx}\right|_x + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$$

se tiene que:

$$\frac{dQ}{dt} = q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

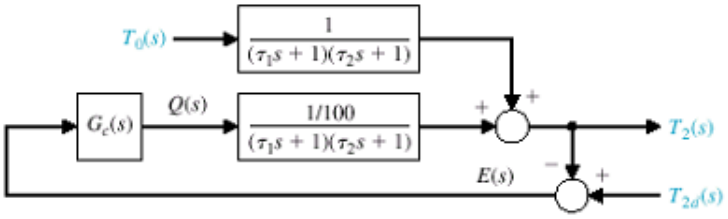
La aplicación de los tres principios anteriores:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(m\,c\,(T - T_0))}{dt} = q_{in}(t) - k\frac{A}{L}(T - T_{amb})$$

- Supuestos de Estabilidad Inicial: La validez del modelo requiere que el volumen de control sea el mismo, de lo contrario m sería dependiente del tiempo. Esto implica que se asume que el sistema de estanques tiene un control de nivel que mantiene fijo en un cierto valor deseado el nivel de líquido en cada estanque. Por otro lado, cabe asumir que antes de activar el sistema de control de temperatura, la temperatura inicial del líquido T_0 era igual a la de la ambiente T_{amb}, luego es posible simplificar las ecuaciones anteriores asumiendo un modelo de variaciones $\Delta T \stackrel{def}{=} T - T_{amb} = T - T_0$.



(a)



(b)

Figura 4: Sistema estanques.

5. Obtenga la función de transferencia $Y(s)/R(s)$ del sistema de la figura 5.

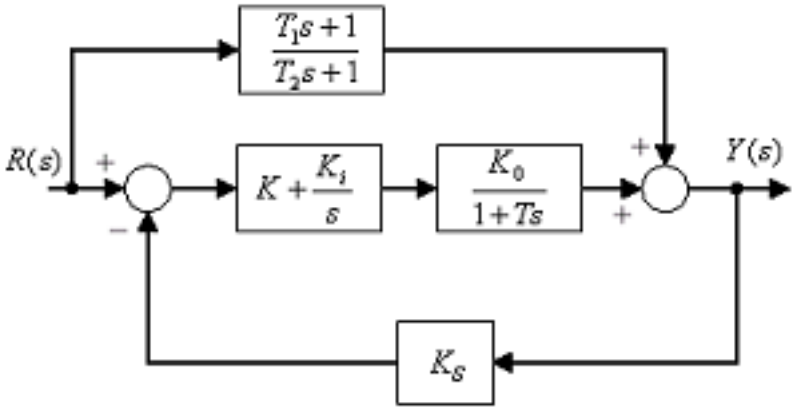


Figura 5: Sistema en lazo cerrado.

6. Determine las funciones de transferencia $F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ y $H(s) = \frac{Y(s)}{P(s)}$ para un sistema de control de temperatura cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 6, donde:

$$\begin{array}{lllllllll} G(s) & = & \frac{0.1}{1+3s} & F_1(s) & = & 100\left(1+\frac{1}{2s}\right) & C_1(s) & = & 0.1 \\ A(s) & = & 2 & F_2(s) & = & 0.5 & C_2(s) & = & 0.5 \end{array}$$

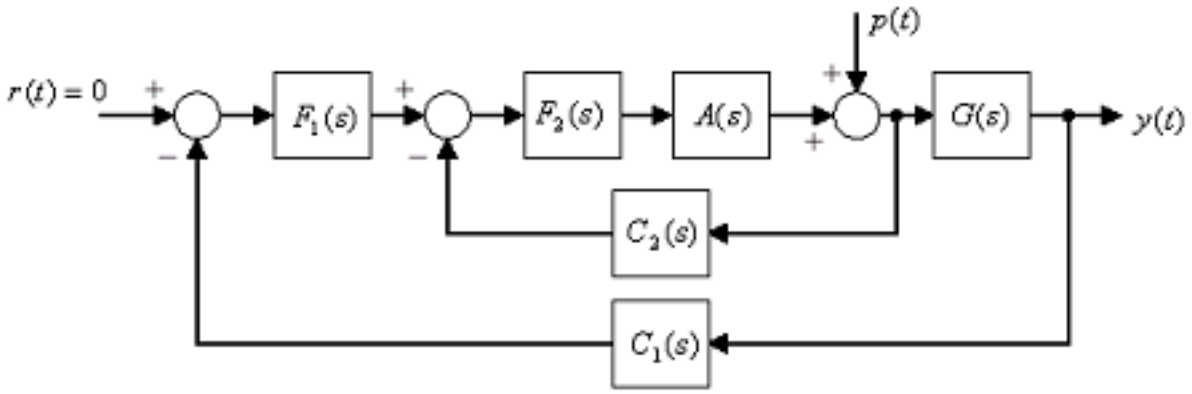


Figura 6: Sistema en lazo cerrado.

7. Considere el sistema de estanques de la figura 7. Linealice el proceso en torno a $H = 1.8\,m$ y obtenga la función de transferencia $\frac{H(s)}{U(s)}$. Asuma que los estanques son idénticos, la sección de cada estanque tiene área $A = 1\,m^2$, la sección del orificio de salida es $a = 0.001\,m^2$, el flujo de salida satisface $f = a\sqrt{2gh}$ y que la fuerza de gravedad es $g = 10\,m/s^2$.

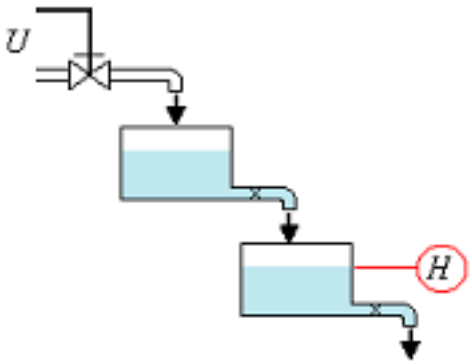


Figura 7: Sistema de estanques.

8. Para el estanque de la figura 8, cuyo flujo de salida es $f = 0.5\sqrt{2gh}$:

   (a) Encuentre un modelo dinámico para el proceso.

   (b) Encuentre la función de tranferencia $\frac{H(s)}{U(s)}$ para el proceso linealizado en tomo al punto de operación $h_0 = 3$.

   (c) ¿Qué ganancia inestabiliza el sistema realimentado si se usa un controlador digital con período de $10\,s$ y con acción proporcional solamente?

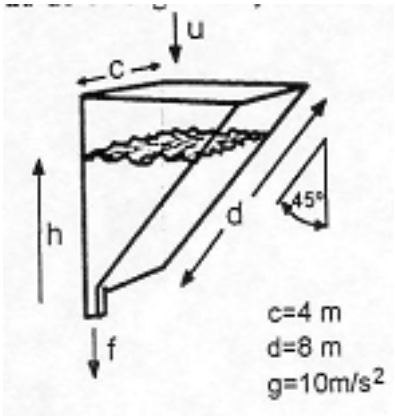


Figura 8: Estanque con forma de prisma triangular.

9. Para el estanque de la figura 9, el flujo de salida es:
   (a) Encuentre un modelo para el proceso (ecuación diferencial).
   (b) Encuentre la función de trasferencia $\frac{H(s)}{U(s)}$ para el proceso linealizado en tomo al punto de operación $h_0 = 3\,m$.
   (c) ¿Cuál será el error permanente para el modelo linealizado en cerrado con un controlador de ganancia constante $K = 5$ y un cambio en la referencia de 3 a 3.1 metros?. Asuma que inicialmente el sistema se encuentra en reposo con $h_{ref} = h = 3\,m$).

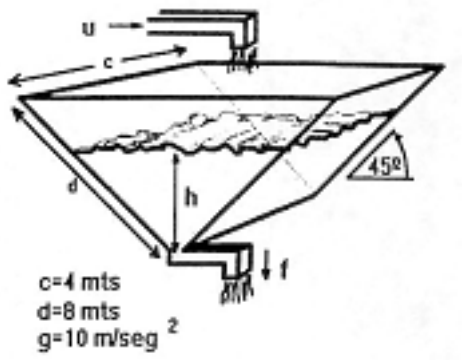


Figura 9: Estanque con forma de prisma triangular.

10. Para péndulo en figura 10 con roce masa-aire proporcional a 3^a potencia de su velocidad, es decir $F_r = B\,V_m^3$, $g = 10\,m/s^2$, $M = 1/3\,kg$, $T = 2\,s$ (periodo):
    (a) Determine la ecuación diferencial que rige el sistema.
    (b) Linealice en torno a $\theta = 0°$ para valores pequeños de éste ángulo y encuentre la función de transferencia $\frac{\Theta(s)}{F(s)}$.
    (c) Discretice usando la aproximación de Tustin

$$s \approx \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

    y encuentre $\Theta(k)$ para $k = 2$ con condiciones iniciales de fuerza F constante a partir de $k = 1$.

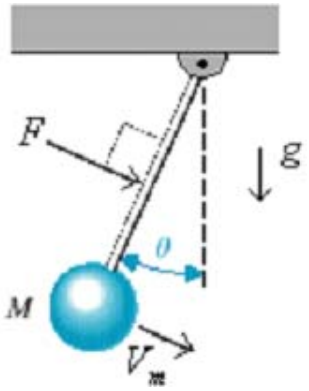


Figura 10: Pendulo.

11. La ecuación de diferencias de un sistema discreto es:

$$y(k+2) - y(k+1) - 2y(k) = 6u(k+2) - 2u(k+1)$$

(a) Determine su función de transmitancia.

(b) Calcule $y(k)$ para $k > 0$, ante una secuencia de entrada: $u(0) = 1$, $u(1) = -1$, $u(2) = 1$, $u(3) = -1$ y $u(k) = 0$ para $k \geq 4$.

(c) Grafique los polos y ceros del sistema.

12. En la economía del estado de Wonderland, se ha comprobado empíricamente que la inflación es función de la tasa de descuento aplicada por el Banco Central (BC). Sin embargo, cuando esta institución aumenta la tasa mencionada, una disminución de la inflación se comienza a apreciar recién a los dos meses y con un cambio gradual en el que el 63% del monto total de variación ocurre a los cuatro meses de aplicada la medida. Este monto final en la variación de la inflación es igual a la mitad del escalón aplicado a la tasa de descuento. Como buen egresado(a) de la UC, usted ha optado por trabajar en el sistema financiero y nada menos que en el BC, donde se le ha pedido lo siguiente:

(a) Encontrar un modelo lineal, discreto y simplificado para el fenómeno dinámico inflación tasa de descuento.

(b) Utilizar la señal de IPC del último mes generada por el instituto de estadísticas correspondiente, para realimentar el sistema y determinar automáticamente la tasa de descuento necesaria para mantener una tasa de inflación del 0.5%. Se debe encontrar una ganancia K del controlador proporcional que estabilice el sistema y el error en estado estacionario que esta ganancia genera ante un cambio escalón en la referencia.

13. Se ha desatado una epidemia de aburrimiento en el país. El número de contagiados en el tercer mes será el doble de los contagiados en el segundo mes, menos la mitad de los contagiados en el primer mes (éstos ya habrán muerto de aburrimiento). Como este patrón se repetirá en los meses siguientes, el gobierno ha decidido tomar medidas. Se sabe que el único antídoto contra esta enfermedad es evitar ver televisión, por lo que se hará publicidad (por televisión, por supuesto) para que la gente haga otra cosa. Se sabe que por cada 10 UF invertidas en este mecanismo, 2 personas se salvarán al cabo del primer mes de gastada esa suma, pero al segundo mes uno de ellos no aguantará más y reincidirá. El gobierno ha fijado una meta de 1000 como máximo permitido y su mecanismo de control será invertir 10 UF adicionales en publicidad por cada contagiado sobre los 1000.

(a) Encuentre la función de transmitancia para el proceso

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

donde Y es corresponde al número de contagiados y U a la cantidad invertida de dinero (en UF).

(b) Cierre el lazo de control según la idea del gobierno y determine la función

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

donde R corresponde a la meta de aburridos (referencia).

Pista: Observe que la ganancia estática del fenómeno es negativa.

14. Para el sistema de control digital de la figura 11, encuentre el valor de la planta para $t = 3$ cuando se aplica un escalón en la referencia. El período del computador es $1\,s$. Use retención de orden cero.

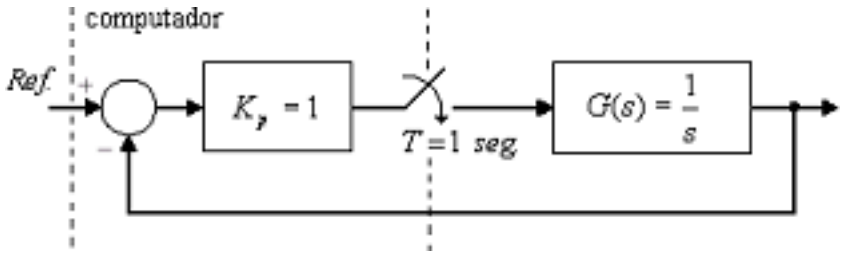


Figura 11: Sistema en lazo cerrado con control digital.

15. Considere el sistema de control digital de la figura 12, en el cual A/D, D/A son respectivamente conversores análogo-digital, digital análogo y:

$$G(s) = \frac{e^{-\Delta s}}{1+Ts},\ F(z) = \frac{1-az^{-1}}{(1-a)\,(1-z^{-1})};\ a = e^{-\Delta/T};\ \text{con}\,\Delta\,\text{el periodo de muestreo.}$$

(a) Determine la función de transferencia discreta (transmitancia en z) del proceso (planta).

(b) Deduzca la función de transferencia del sistema realimentado .

(c) Determine el algoritmo recursivo para implementar el controlador digital en un computador.

(d) Grafique el error $e(k)$ y el control $u(k)$ si la referencia es un escalón de monto R.

(e) Grafique la señal $u(t)$.

(f) Calcule y grafique la salida del proceso $y(t)$.

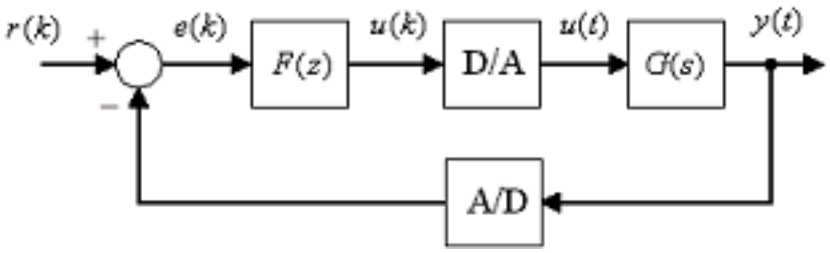


Figura 12: Sistema en lazo cerrado.

16. El proceso de la figura 13 está conformado por un retardo puro $s_1 : w(t) = v(t - \Delta)$ y un sistema de primer orden $s_2 : \frac{dx}{dt} = -ax + bw$, $a, b > 0$ y Δ es el periodo de muestreo.

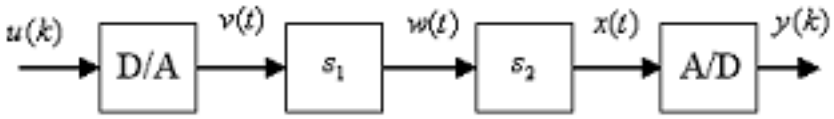


Figura 13: Sistema en lazo cerrado.

(a) Determine la función de transferencia $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$.

(b) Grafique la respuesta $y(k)$ para estado inicial cero y entrada un escalón unitario.

17. Se sabe que la función de transferencia $G(z)$ de un sistema

$$U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$$

tiene la siguiente estructura:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{az + b}{cz^2 + dz + e}$$

.

Si para $k < 0$ el proceso se encontraba en equilibrio con $Y(k) = U(k) = 0$, encuentre los valores de a, b, c, d y e dada la siguiente tabla de valores para $k \geq 0$, que se obtuvieron del proceso.

k	0	1	2	3	4
$u(k)$	1	1	0	0	1
$y(k)$	0	0.2	0.5	0.5	0.25

18. Una planta tiene función de transmitancia del tipo:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

cuando se aplica un escalón en la entrada, de cualquier monto, la salida tiende a cero para $k \to \infty$. Además cuando se le aplica una rampa $u(k) = k$ a la entrada, la salida para los 6 primeros valores se presenta en la siguiente tabla:

k	0	1	2	3	4	5	6
$y(k)$	0	0	1	0	0.5	0.5	0.25

(a) Identifique completamente la planta (encuentre los valores a_i y b_i).

(b) Realimente la planta en forma estándar con un controlador $K = 1$ y encuentre los polos y ceros del sistema resultante.

19. Encuentre el equivalente discreto de los sistemas en los problemas del 1 al 6:

(a) Mediante aproximación rectangular hacia adelante.

(b) Mediante aproximación rectangular hacia atrás.

(c) Mediante aproximación de Tustin.

(d) En forma exacta mediante retención de orden cero (*zero-order hold*).

20. Usando aproximación de Padé, encuentre una representación en el estado para la planta:

$$G(s) = \frac{K_P e^{-4s}}{3s+1}$$

21. Para la planta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s-2)}$$

(a) Obtenga una representación en el estado.

(b) A partir de (a), obtenga ecuación de estado discreta para $\Delta = 0.5$.

22. Considere la planta:

$$F(s) = \frac{2}{s^2+s+1}$$

Si inicialmente ($t < 0$) la salida de la planta era constante e igual a la referencia ($R = 1$). Encuentre una representación en el estado para la planta y el valor del vector estado cuando $t = 5$, si en $t = 0$ la entrada a la planta fue hecha cero.

23. Consider la planta:

$$F(s) = \frac{2e^{-Ls}}{(s+2)}$$

(a) Discretice el sistema usando retención orden cero y $\Delta = 1$ y encuentre su representación en el espacio de estado.

(b) En $k = 0$ se aplica una rampa a la entrada. Determine el valor del vector de estado cuando $k = 3$.

24. Encuentre una ecuación de estado para el sistema de estanques de la figura 14 con:

$$\frac{H_i(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{s+1}$$

donde U_1, U_2 son entradas e Y_1, Y_2, Y_3 son salidas.

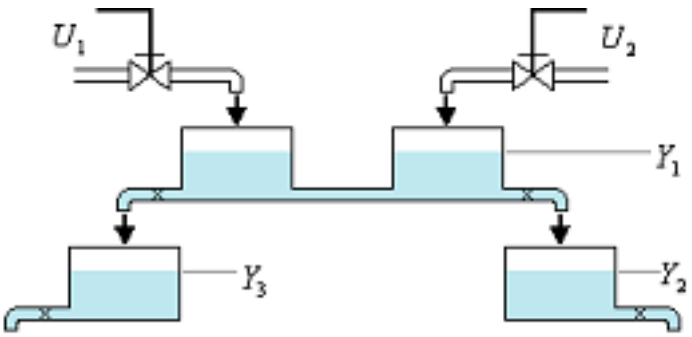


Figura 14: Sistema de estanques.

25. Para la planta de tratamiento de aguas de la figura 15 con entradas U_1, U_2 y salidas L (nivel) y F (flujo):

(a) Suponiendo linealidad y constantes hidrodinámicas conocidas, determine una ecuación de estado para el proceso.

(b) Obtenga la función de transferencia.

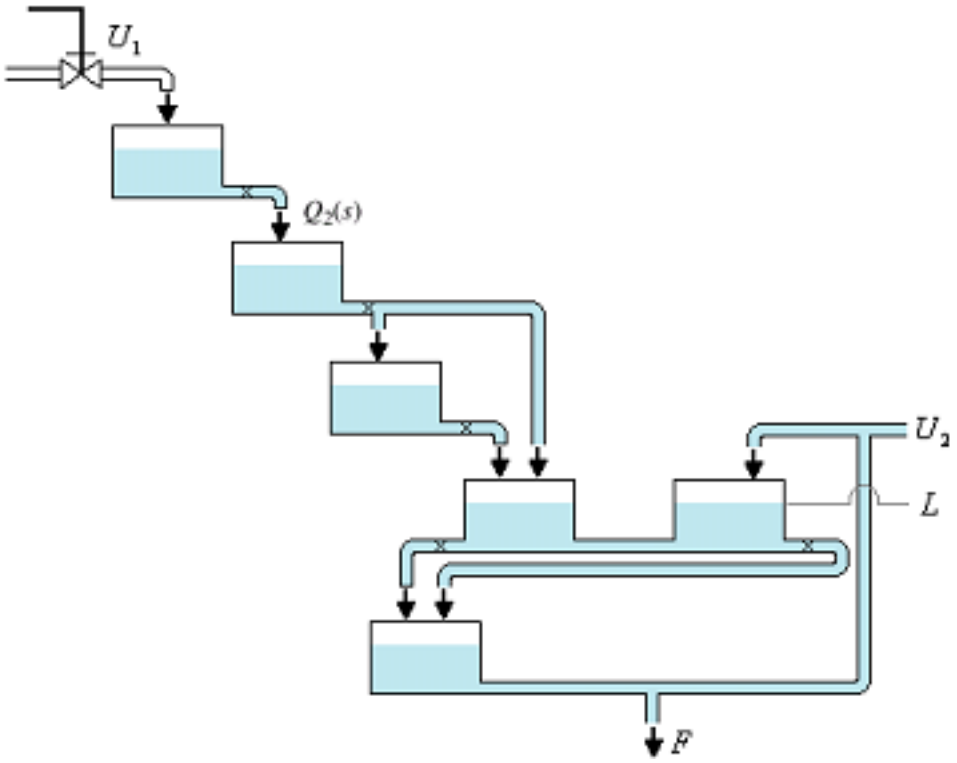
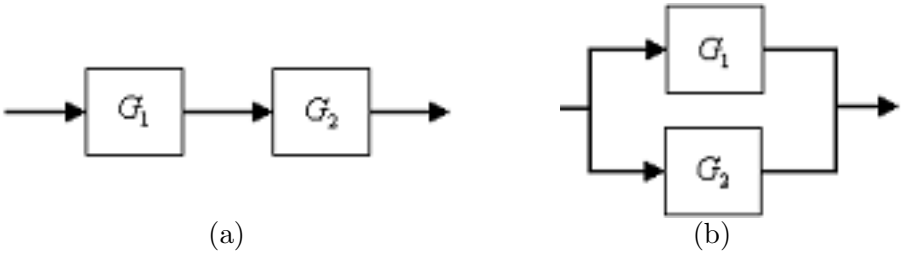


Figura 15: Sistema de estanques.

26. Determine una representación en el estado para:

    (a) Producto de procesos 16 (a).

    (b) Suma de procesos 16 (b).



(a) (b)

Figura 16: Sistemas en cascada (a) y en paralelo (b).

27. Para el sistema en paralelo de la figura 17, se conocen las representaciones en el estado de $G_1(s)$ y $G_2(s)$, las cuales están dadas por $[A_1, B_1, C_1, D_1]$ y $[A_2, B_2, C_2, D_2]$, respectivamente. Encuentre la ecuación de estado dada por el sistema total $[A, B, C, D]$ en función de las representaciones individuales anteriores.

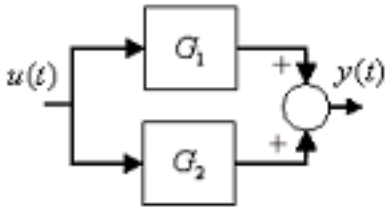


Figura 17: Sistema de bloques en paralelo.

28. Encuentre una ecuación de estado, para el sistema de la figura 18, con entradas R y P, y salidas Y_1 e Y_2.

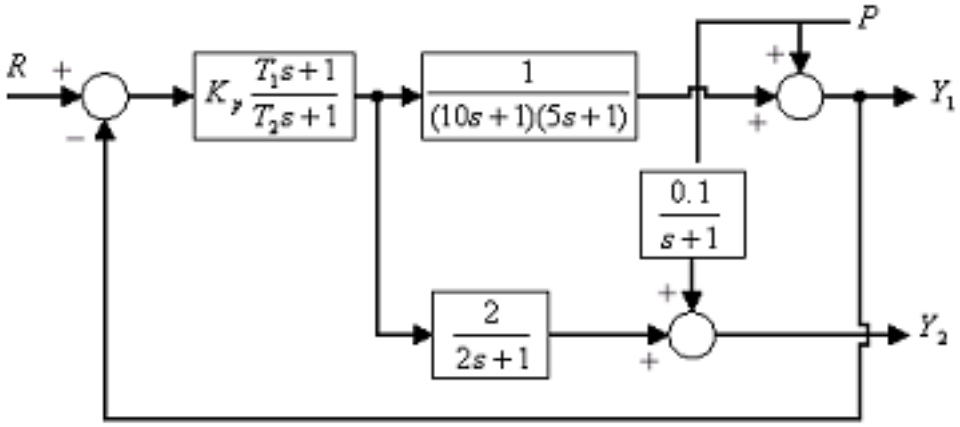


Figura 18: Sistema MIMO.

29. Para el sistema discreto:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.632 & 1 & 0.368 \\ \hline 0 & 1 & 0.2 \end{array}\right]$$

(a) Calcule los primeros 5 valores para las variables de estado, si $x(0) = \mathbf{0}_{2\times 1}$ y entrada escalón en $t = 0$.

(b) Obtenga función de transferencia.

30. Obtenga ecuación de estado de:

$$y(k) = -2y(k-1) + 0.5y(k-2) - 0.2y(k-3) + 0.5u(k) - 0.4u(k-1) + 0.1u(k-2)$$

2. Respuesta de Sistemas Dinámicos

- $s \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightarrow} t$
- $z \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightarrow} k$
- TVI, TVF, errores permanentes
- Sists. de 2^{do} orden, ω_n, ξ

31. Determine su función de transferencia de un sistema cuya respuesta de un escalón unitario en su entrada en $t = 0$ es la mostrada en la figura 19.

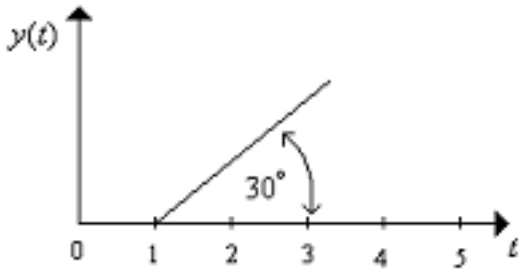


Figura 19: Respuesta al escalón de un sistema.

32. Obtenga el modelo aproximado de un sistema cuya respuesta a un escalón de monto 2 se entrega en la siguiente tabla:

$t\,[min]$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2	3	4	6
$y(t)$	0	0	0	.009	0.032	.061	.094	.127	.159	.191	.22	.4	.465	.488	.499

33. Demuestre que la respuesta en el tiempo de un sistema de un sistema de 1^{er} orden a un escalón unitario es igual a la derivada de su respuesta en el tiempo a una rampa unitaria. ¿Cree usted que es posible generalizar este resultado para otros sistemas?

34. Para el proceso térmico con dos estanques del problema 4 que se muestra en la figura 4:

    (a) Determine y grafique la temperatura $T_2(t)$ ante un cambio en escalón unitario en $Q(t)$, para el proceso en lazo abierto y sin perturbación ($T_0 = 0\,^\circ C$).

    (b) Suponga que $G_c(s)$ representa un controlador proporcional de ganancia $K = 12.5$. Determine y grafique el error $E(t)$ para referencia $T_{2d} = 0\,^\circ C$ y un cambio en escalón de $2\,^\circ C$ en la perturbación T_0.

    (c) Para $T_{2d} = 0\,^\circ C$ y $T_0 = 2\,^\circ C$, cómo varía el error en régimen permanente en función de la ganancia K del controlador?

    (d) Suponga que el controlador es ahora de la forma $G_c(s) = K_I/s$. ¿Cuál es el error en régimen permanente ante un cambio en escalón de monto $A\,^\circ C$ en la referencia? ¿Cuál es valor del mismo error ante un cambio similar, pero en la perturbación?

35. Para el péndulo de la figura 20 con masa $M = 1\,kg$, constante de roce con el aire $B = 1\,kg/s$, longitud $L = 1\,m$ y aceleración de la gravedad $g = 10\,m/s^2$:

    (a) Linealice el modelo para ángulos pequeños en tomo a $\theta = 0°$ y encuentre su frecuencia de resonancia.

    (b) Se aplica fuerza sinusoidal F de amplitud $0.1\,kg\,m/s^2$ y frecuencia $\omega = 1\,rad/s$. ¿Cual será la amplitud de la oscilación en régimen?

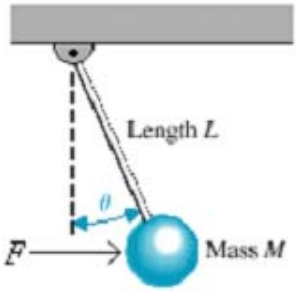


Figura 20: Pendulo.

36. ¿Cuál es el error permanente del sistema en el problema 5 para entrada escalón unitario y para entrada rampa?

37. Determine la ganancia estática de las funciones de transferencia $F(s)$ y $H(s)$ del problema 6.

38. Bosqueje la respuesta al escalón de la planta

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

    para $\omega_n = 4$ y

    (a) $\xi = 0.2$

    (b) $\xi = 0.7$

    (c) $\xi = 2.5$

39. Para el sistema realimentado de la figura 21:

    (a) Bosqueje su respuesta ante una entrada escalón $u(t) = 1$ para $t > 0$.

    (b) Idem ante una entrada rampa $u(t) = t$ para $t > 0$.

    (c) ¿Cuál es el error permanente en ambos casos?

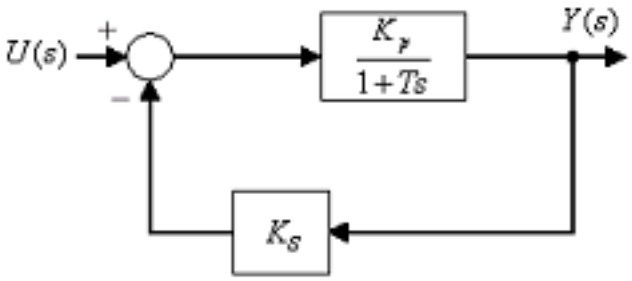


Figura 21: Sistema en lazo cerrado.

40. Para el sistema con control digital de la figura 22:

$$G(s) = \frac{e^{-as}}{5s+1},$$

donde $a = 2$ y también es igual al período de muestreo.

(a) Obtenga la función de transferencia discreta del sistema utilizando retención de orden cero (zero order hold).

(b) Determine la ganancia necesaria para obtener un error en estado estacionario igual al 2% del escalón en la referencia.

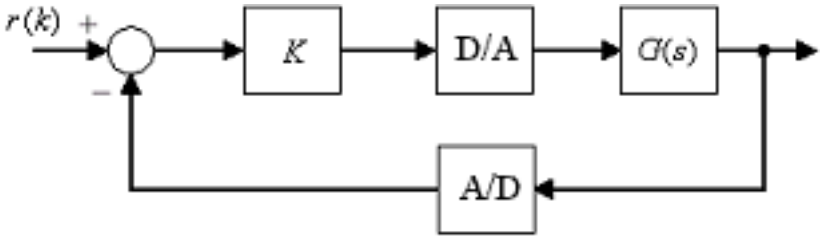


Figura 22: Sistema en lazo cerrado con control digital.

41. De existir, encuentre un controlador proporcional para la planta

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

que entregue error permanente menor a 0.1% ante entrada escalón unitario.

42. El sistema $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(1-3s)}{(s+1)(s+2)}$ es un ejemplo de sistema de fase no mínima. Bosqueje su respuesta en el tiempo para un escalón unitario en $R(s)$. ¿Cuál es el valor de $y(t)$ para $t = 1.5$?

43. Para el sistema de la figura 23:

(a) Encuentre $Y(s) = N_1(s)R(s) + N_2P(s)$.

(b) Encuentre el error permanente en el control para un cambio de escalón en la referencia $R(s)$ y perturbación $P(s)$. Considere:

$$K(s) = 0.1 + \frac{0.01}{s}, \quad H(s) = 9, \quad M(s) = \frac{0.1s}{s+1}, \quad G(s) = \frac{1}{2s+1}, \quad F(s) = \frac{2s+1}{s+1}$$

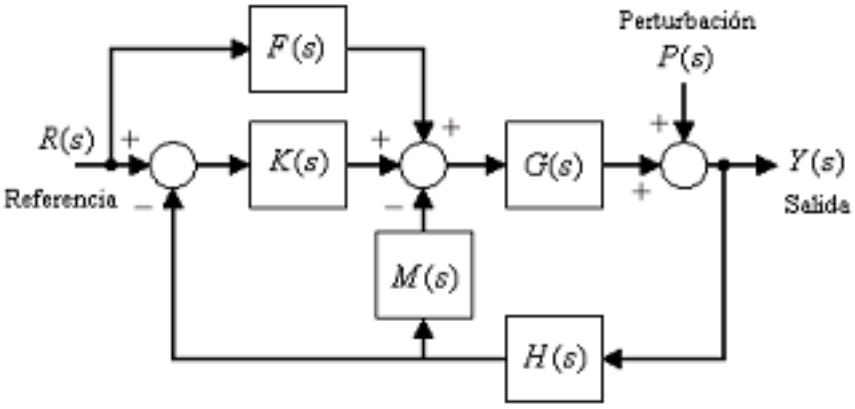


Figura 23: Sistema en lazo cerrado con perturbación.

44. Para la planta:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

y controlador

$$K(z) = K_P z^{-1}$$

(a) Encuentre $y(k)$ en $k = 4$ para lazo abierto, condiciones iniciales cero y entrada impulso en $k = 0$.

(b) Si se realimenta la planta con controlador $K(z)$, encuentre error estacionario cuando se aplica un escalón unitario en la referencia.

45. Para el sistema de variables de estado dado por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre la función de transferencia $F(s)$.

(b) Si el estado inicial era $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule $x(t)$ para $t = 1$ cuando la entrada es cero para $t > 0$.

46. Para el sistema lineal de la figura 24 con $K = 2.5$, $B = 1$, $M = 1$, $x(0) = [1\ 0.5]^T$ y $F = \cos(4t)$:

(a) Obtenga matriz de transición de estado.

(b) Obtenga la solución para las variables de estado.

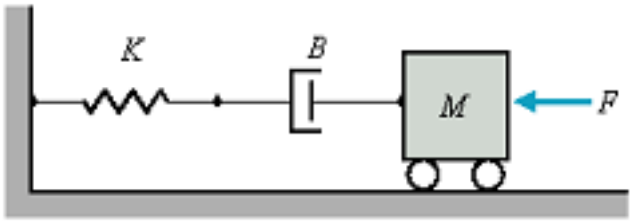


Figura 24: Sistema de estanques.

47. Para el sistema

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+10)}$$

calcule el vector de estado $x(t)$ y grafíquelo para $0 \leq t \leq 8$ si la entrada es la que se muestra en la figura 25.

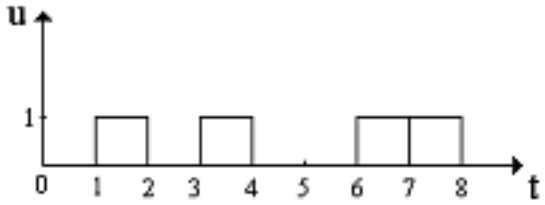


Figura 25: Señal de control.

48. Para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - u \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

determine:

(a) Matriz transición de estado.
(b) Función de respuesta al impulso.
(c) Respuesta a entrada cero y estado inicial $x(0) = [1\ 2]^T$.
(d) Función de transferencia.
(e) Respuesta a estado cero y entrada $u(t) = 1$ para $t > 0$.
(f) Respuesta para entrada $u(t) = 1$ para $t > 0$ y estado inicial $x(0) = [1\ 2]^T$.

3. Estabilidad

- TVI, TVF, errores permanentes
- Routh-Hurwitz
- LGR
- Nyquist, Bode, Nichols

49. Grafique el diagrama de polos y ceros del sistema de control de temperatura en el problema 6.

50. Suponga que el controlador en el problema 4 es de la forma $G_c(s) = K_I/s$. Aplicando el método de Routh-Hurwitz determine el rango de valores de K_I para el cual el sistema realimentado se mantiene estable.

51. Para el sistema:

$$F(s) = \frac{K_P(s+a)}{(s+b)(s-c)}, \quad K_P, a, b, c > 0;\ b > a$$

(a) Encuentre la función de transferencia cuando el proceso es realimentado negativamente con control proporcional K.

(b) ¿Para qué valores de K es el sistema estable?

52. Para el sistema de la figura 26 determine:

(a) La función de transferencia en lazo cerrado.

(b) Los valores de K para los cuales el sistema es estable.

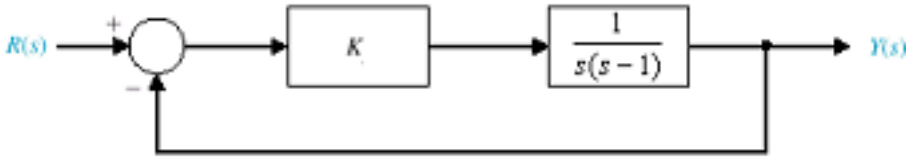


Figura 26: Sistema en lazo cerrado.

53. Para el circuito de la figura 27, obtenga la frecuencia a la cual oscilará el sistema cuando $K = K_c$.

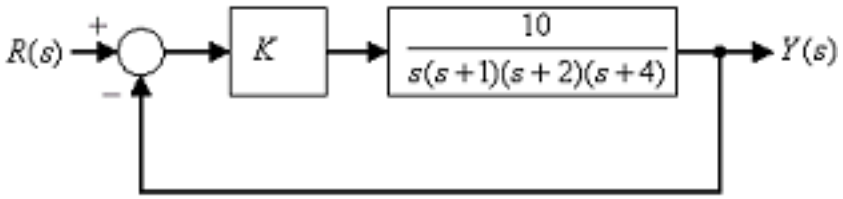


Figura 27: Sistema en lazo cerrado.

54. Para la planta:

$$F(S) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$$

(a) Determine que valores de K_P estabilizan el sistema realimentado con ganancia proporcional.

(b) Encuentre, de ser posible, el valor de K_P que genera polos complejos conjugados con factor de amortiguación $\xi = 0.7$ (en la ecuación $s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2$, ξ es el factor de amortiguamiento).

55. Para la planta:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)}$$

(a) Trace el Lugar Geométrico de las Raíces, encontrando los valores relevantes de éste.

(b) Determine los valores de K para los que el sistema realimentado con control proporcional es estable.

56. Bosqueje el Lugar Geométrico de las Raíces de la planta:

$$F(s) = \frac{(s+b)(s+d)}{(s+a)(s+e)(s+c)}$$

cuando es realimentada negativamente con control proporcional para cada una de las situaciones siguientes:

(a) $0 < a < b < c < d < e$

(b) $0 < b < d < a < c < e$

(c) $0 < a < c < e < b < d$

(d) $0 < a < c < e$; $b, d < 0$

57. Obtenga el Lugar Geométrico de las Raíces para los siguientes sistemas (figs. 28-29):

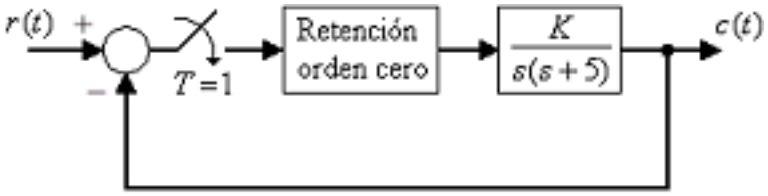


Figura 28: Sistema en lazo cerrado con control digital.

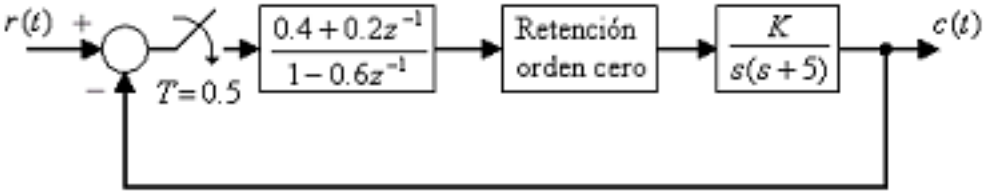


Figura 29: Sistema en lazo cerrado con control digital.

58. El sistema realimentado en "cascada" descrito en la figura 30, controla el nivel de un estanque, con un lazo interno para control de flujo de alimentación, donde

$$G_p(s) = \frac{0.5}{10s+1} \qquad G_f(s) = \frac{0.2(s+0.001)}{s(2s+1)(3s+1)}$$

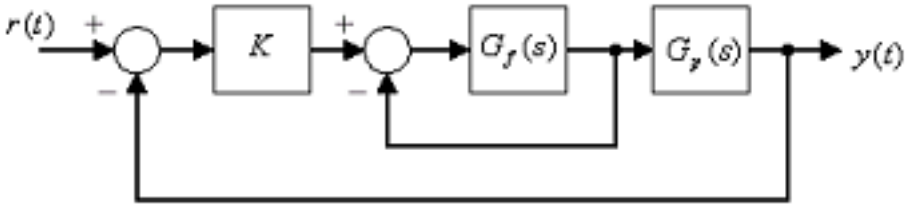


Figura 30: Sistema en lazo cerrado.

(a) Detemine la función de transferencia del sistema realimentado

(b) Bosqueje el Lugar Geométrico de las Raíces y calcule la ganancia crítica.

59. Considere un sistema en lazo cerrado en el cual el proceso está caracterizado por

$$G(s) = \frac{K}{(1+Ts)^4}$$

con $K = 1$, $T = 1$. El controlador es proporcional y de ganancia K_P.

(a) Trace el Lugar de las Raíces del sistema en lazo cerrado al variar la ganancia K_P.

(b) Analice la estabilidad del sistema realimentado en función de la ganancia K_P y determine la ganancia crítica K_c. ¿Qué ocurre si con $K_P = K_c$ varía la referencia del controlador en forma de escalón?

(c) Determine y grafique la respuesta del sistema realimentado ante un cambio en escalón unitario en la referencia, para $K_P = 0.25$.

60. Una planta del tipo

$$F(s) = \frac{K}{(s+a)^3}$$

tiene una respuesta al escalón de monto 20, según se muestra en la figura 31 (1). Cuando esta planta se realimenta con un controlador PD: $K(s) = 40 + 10s$; y se leaplica un escalón unitario a la referencia con condiciones iniciales cero, se obtiene la respuesta de la figura 31 (2).

(a) Encuentre los valores de K y a. Explique como los obtuvo.

(b) Bosqueje el Lugar Geométrico de las Raíces de la planta (sin controlador), especificando la ganancia crítica y el valor del eje imaginario (plano s) donde el sistema se torna inestable.

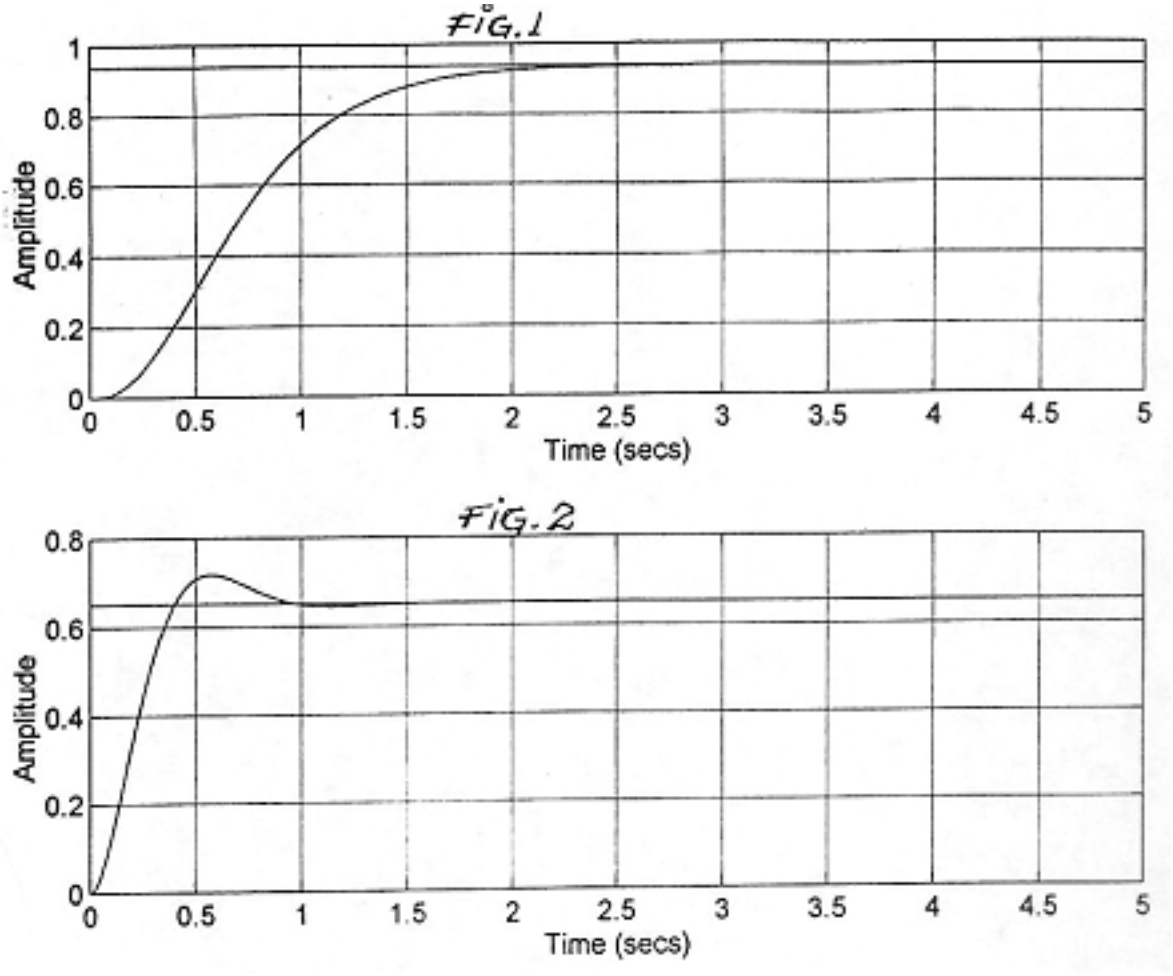


Figura 31: Respuesta en el tiempo.

61. El Lugar Geométrico de las Raíces de una planta discreta $F(z)$ se presenta en la figura 32. En este,

los valores K_1 y K_2 de la ganancia de realimentación que se muestran en el gráfico son 0.37 y 1.37, respectivamente.

(a) Encuentre la planta con todos sus parámetros. Fundamente cómo obtuvo los valores.

(b) Determine una ganancia para un controlador proporcional que estabilice la planta y genere un error permanente en lazo cerrado menor que un 1% ante un cambio escalón unitario en la referencia.

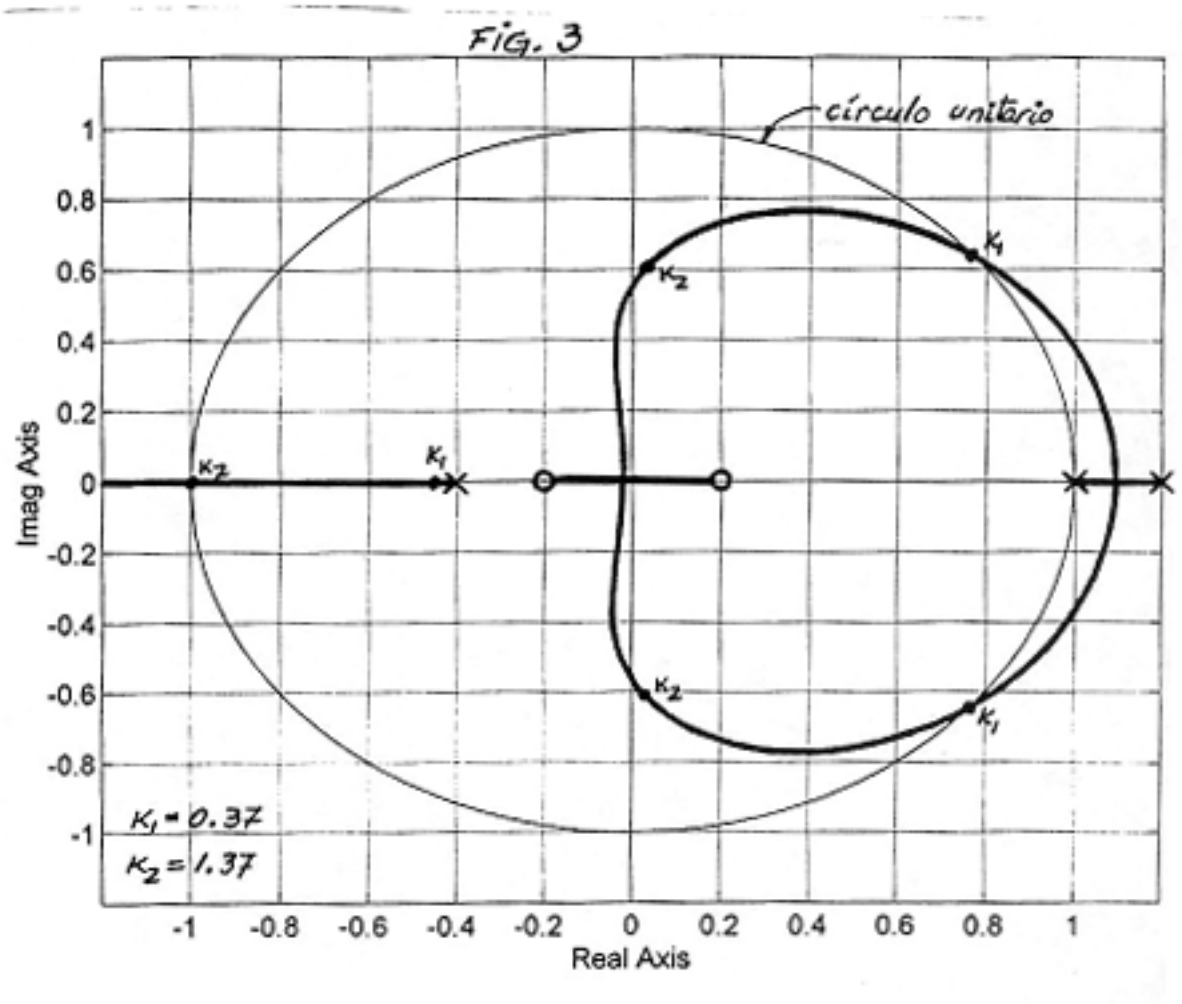


Figura 32: Diagrama de Nyquist de una planta discreta $F(z)$.

62. Considere la planta:

$$F(z) = \frac{0.7z^2 - 0.2z}{z^2 - 0.6z + 0.1}$$

en lazo cerrado con controlador $K(z) = K_P z^{-1}$:

(a) Encuentre la ganancia K_P en que el sistema realimentado se hace inestable (ganancia crítica K_c).

(b) Para un tiempo de muestreo de $0.1\,s$, $K_P = 0.8$, y condiciones iniciales en cero, ¿cuál es el tiempo de respuesta?, es decir ¿cuánto tiempo (en segundos) tardará el sistema en entrar en una banda del 5% centrada entorno al valor final cuando la referencia aplicada corresponde a un escalón unitario?

63. En el sistema realimentado de la figura 33, T es el período de muestreo del sistema digital. Usando retención de orden 0, encuentre para que valor de T el sistema se hace inestable. Se sabe además que el ciclo mínimo, dado por los cálculos que debe realizar el computador, es de 0.01 segundos.

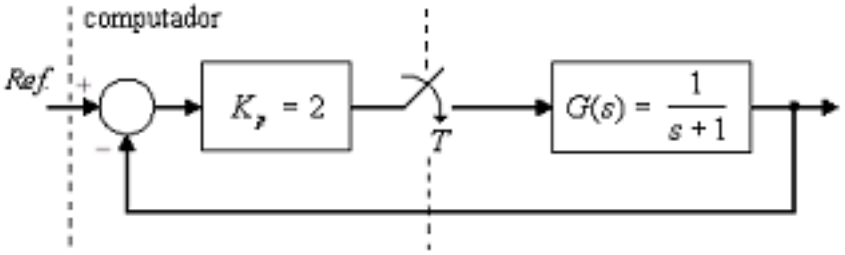


Figura 33: Sistema en lazo cerrado con control digital.

64. Bosqueje el diagrama de Nyquist de la planta:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+25)}$$

65. Demuestre que el diagrama de Nyquist de

$$F(s) = a + \frac{b}{Ts+1}$$

es un semicírculo para cualquier valor de a y b.

66. Dado el sistema:

$$F(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1+Ts},$$

encuentre la ganancia crítica del sistema realimentado con control proporcional K_P, si $K = 2$, $L = 1$, y $T = 1.5$.

67. Para el sistema:

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{3s+1}$$

(a) Obtenga la ganancia crítica de realimentación proporcional y su error permanente ante escalón y rampa $K_P = 0.5K_c$ (K_c: ganancia crítica).

(b) Idem, pero con control PI y $K_P/K_I = 10$.

(c) Obtenga la ecuación de estado discreta (retención orden cero y $\Delta T = 1$).

(d) ¿Es posible obtener ecuación de estado para el caso continuo?

68. Para la planta:

$$F(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(0.2s+1)(s^2+0.2s+1)}$$

¿Cuál es el máximo valor de K que asegura estabilidad ante realimentación unitaria, independiente del valor de L?

69. Para el proceso:

$$F(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(1+Ts)^2}, \quad T = 3L$$

(a) Determine la ganancia y frecuencia crítica.

(b) ¿Cuál es el margen de fase que se obtiene con un control tipo PI ajustado según Ziegler-Nichols, es decir, $K_P = 0.45K_c$, $T_I = 0.83T_c$.

70. Para el proceso:

$$K(s)F(s) = \frac{K(Ts+1)}{s^2(s^2+29s+1)}$$

esboce el diagrama de Nyquist y determine para que valores de K y T el sistema es estable.

71. A partir del diagrama de Nyquist para frecuencias positivas, que se muestra en la figura 34, correspondiente a la planta:

$$F(s) = \frac{0.5(4s+1)}{s(s-1)}$$

(a) Determine rangos de estabilidad para realimentación proporcional negativa.

(b) Encuentre los márgenes de estabilidad.

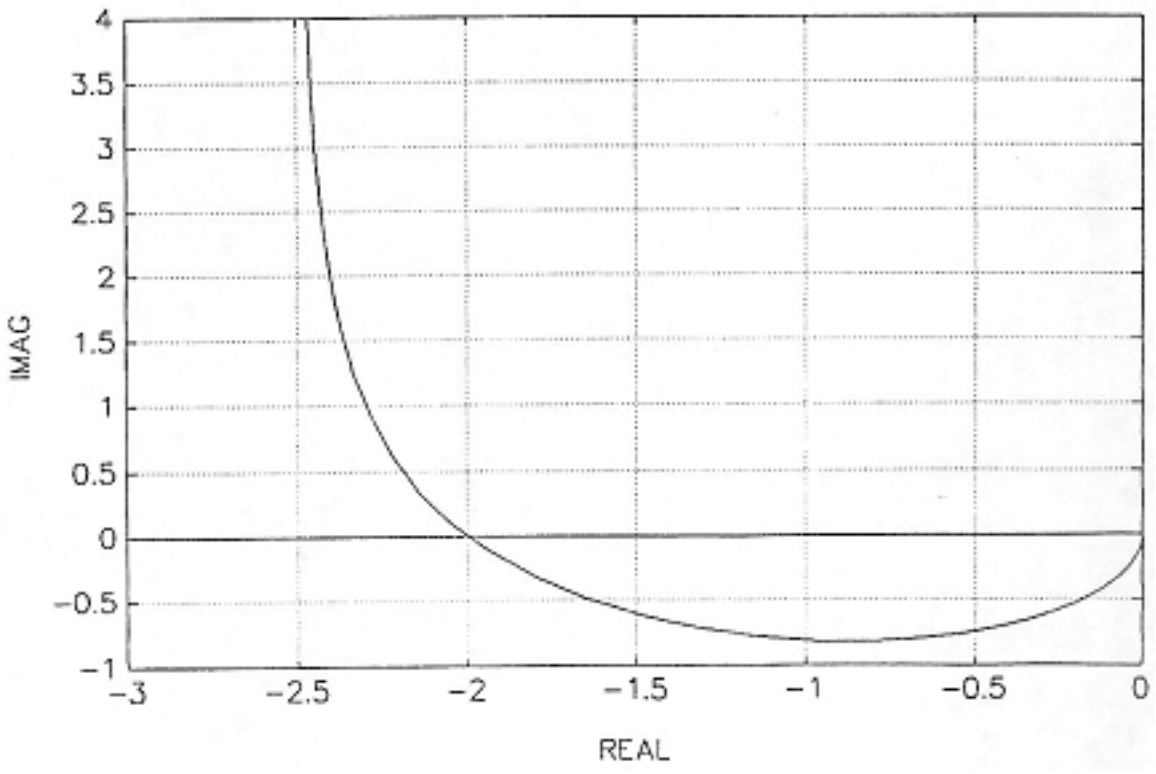


Figura 34: Diagrama de Nyquist para $F(s) = \frac{0.5(4s+1)}{s(s-1)}$.

72. La figura 35 corresponde al diagrama de Nyquist de un sistema de la forma:

$$F(s) = \frac{K(T_1s+1)e^{-Ls}}{(T_2s+1)(T_3s-1)}, \quad T_1, T_2, T_3 > 0$$

cuando $K = 1$ y $L = 0$.

(a) ¿Para que valores de K es el sistema estable cuando $L = 0$?

(b) Si $K = 1$, ¿qué valor de L (mayor que cero) hará el sistema inestable?

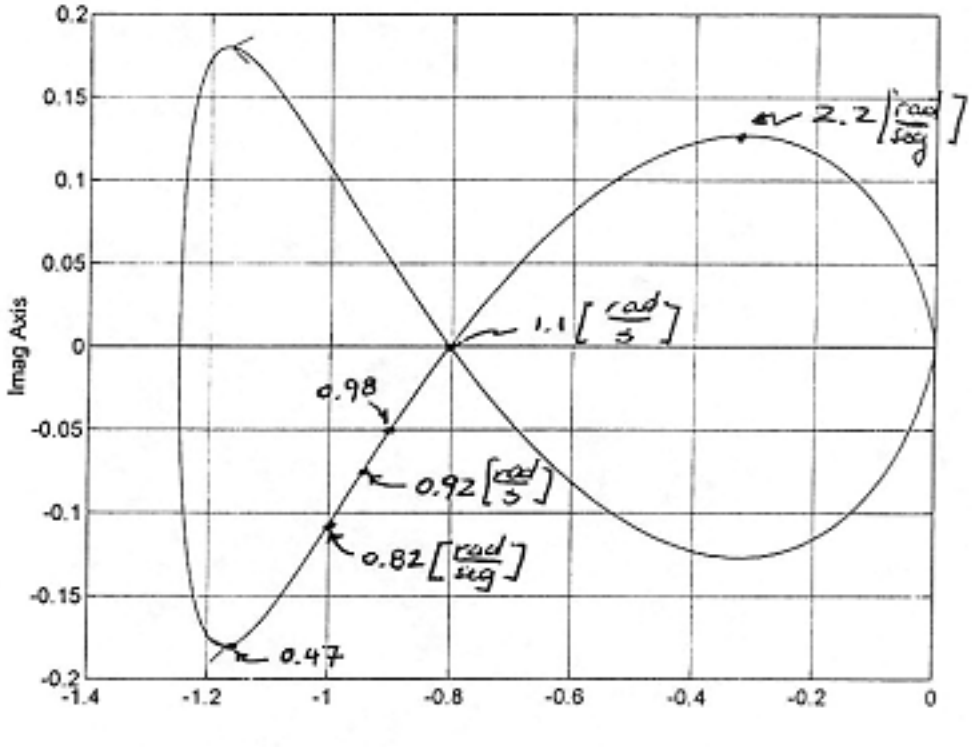


Figura 35: .

73. Para la planta

$$F(s) = \frac{2e^{-Ls}}{(s-1)}$$

(a) Trace la gráfica de Nyquist para $L = 0$.

(b) Encuentre el retardo que inestabiliza la planta para realimentación $K_P = 1$.

74. La planta

$$F(s) = \frac{2e^{-Ls}}{1+s}$$

se realimenta con ganancia proporcional $K_P = 1$.

i. ¿Qué valor de L hace que el sistema realimentado sea inestable?

ii. Para el retardo encontrado en a), encuentre un nuevo controlador que entregue margen de fase de 30°, margen de ganancia de $6dB$ y error permanente cero.

75. Para el diagrama de Bode de la figura 36, encuentre un modelo para la planta asociada y determine su margen de fase y ganancia.

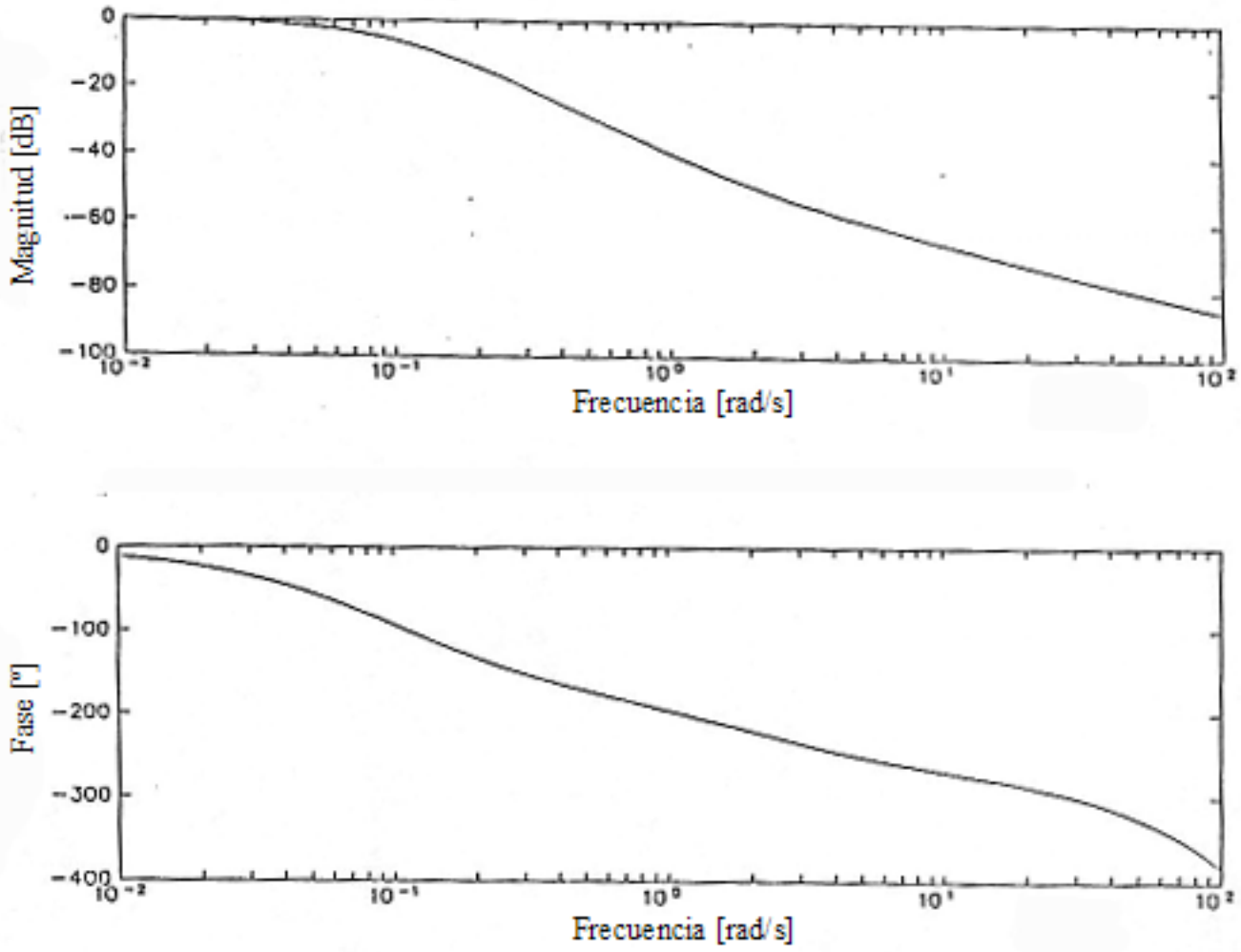


Figura 36: Respuesta de amplitud y fase de un sistema.

76. Para la planta cuya gráfica de Bode se muestra en la figura 37:

(a) Encuentre un modelo aproximado para la planta.

(b) Determine la ganancia crítica, márgenes de fase y ganancia cuando se realimenta.

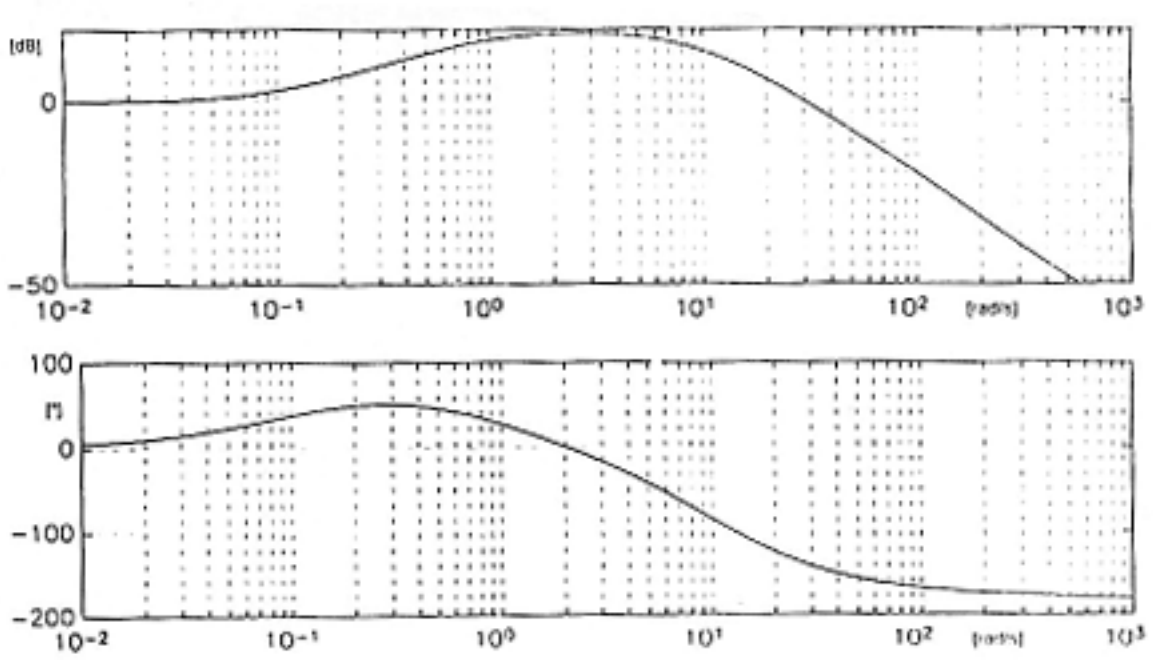


Figura 37: Respuesta de amplitud y fase de un sistema.

77. A partir de la gráfica de Bode en la figura 38:

    (a) Obtenga un modelo aproximado de la planta.

    (b) Determine gráficamente la ganancia crítica K_c y el período crítico T_c para realimentación proporcional.

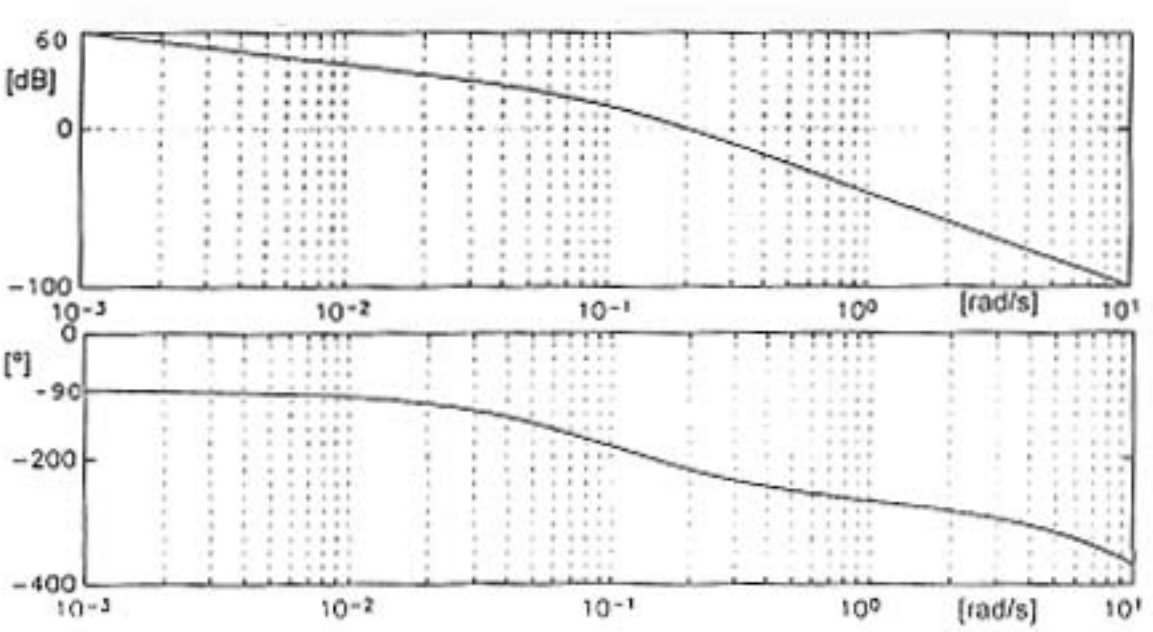


Figura 38: Respuesta de amplitud y fase de un sistema.

78. La figura 39 muestran la gráfica de Bode de un sistema dinámico para su magnitud y fase respectivamente.

    (a) Encuentre un modelo aproximado del sistema.

    (b) ¿Cuál es el margen de ganancia del sistema?

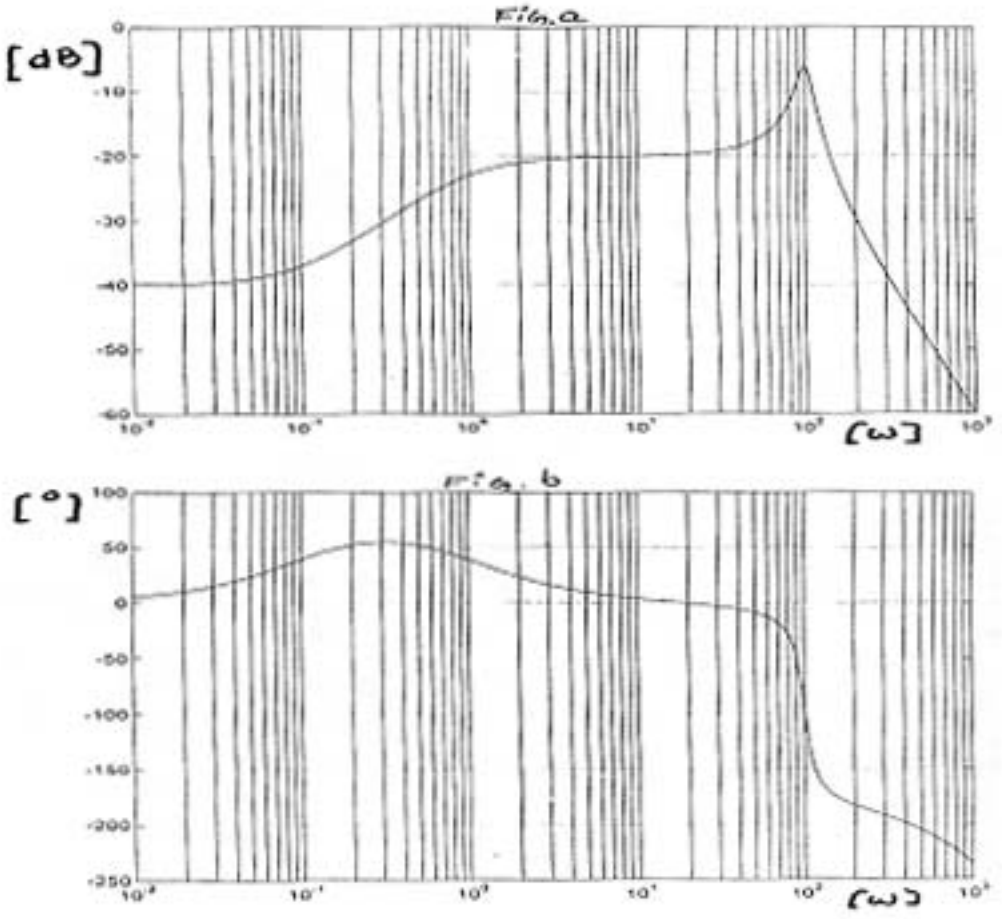


Figura 39: Respuesta de amplitud y fase de un sistema.

79. Obtenga una función de transferencia a partir de la siguiente información de respuesta en frecuencia:

$\omega\,[Hz]$	0.1	0.2	0.4	0.8	1.0	2.0	4.0	6.0
$\|F(j\omega\|$	5	4.8	3.8	2.6	2.3	1.25	0.63	0.4
$\angle F(j\omega)\,[^\circ]$	1.2	2.5	4.5	73	8.3	122	173	218

80. Determine, de ser posible, una función de transferencia a partir del gráfico de Bode para la amplitud del sistema analizado que se muestra en la figura 40.

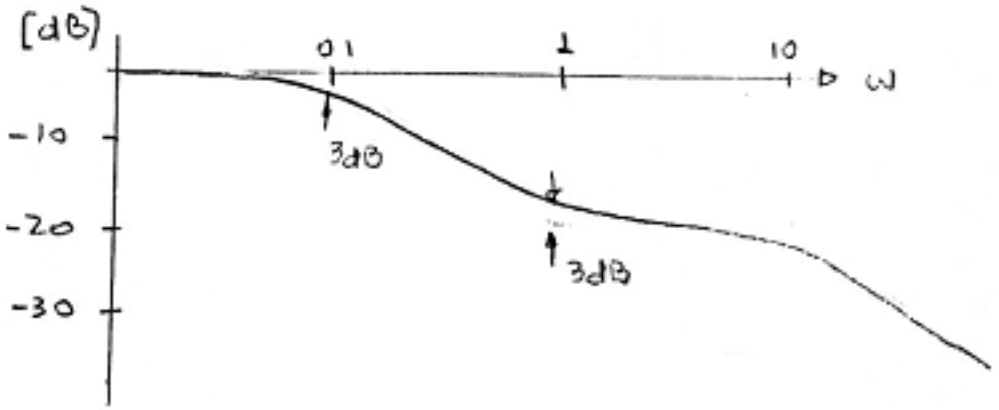


Figura 40: Respuesta de amplitud de un sistema.

81. Encuentre los valores K, T_1 y T_2 del compensador tal que el sistema de la figura 41 tenga un error permanente ante escalón unitario de 0.1 y márgenes de fase y ganancia de 30° y $5\,dB$, respectivamente.

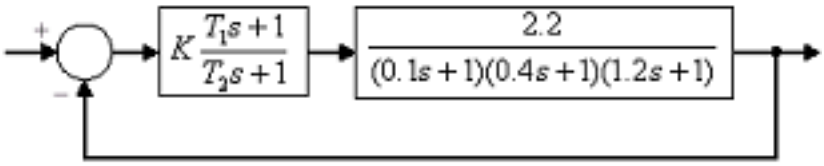


Figura 41: Sistema en lazo cerrado.

82. Obtenga el diagrama de Bode del proceso:

$$F(s) = \frac{(19s+1)(s+1)}{(5s+1)(0.1s+1)}$$

83. Obtenga el diagrama de Bode del proceso:

$$F(s) = \frac{(Ts)^2+1}{(Ts)^2+4Ts+1}$$

84. La figura 42 muestra el diagrama de Bode de amplitud obtenido para un proceso mediante pruebas experimentales. Se ha determinado además que la fase es de -220° para una amplitud de $0\,dB$. Obtenga un modelo aproximado del proceso.

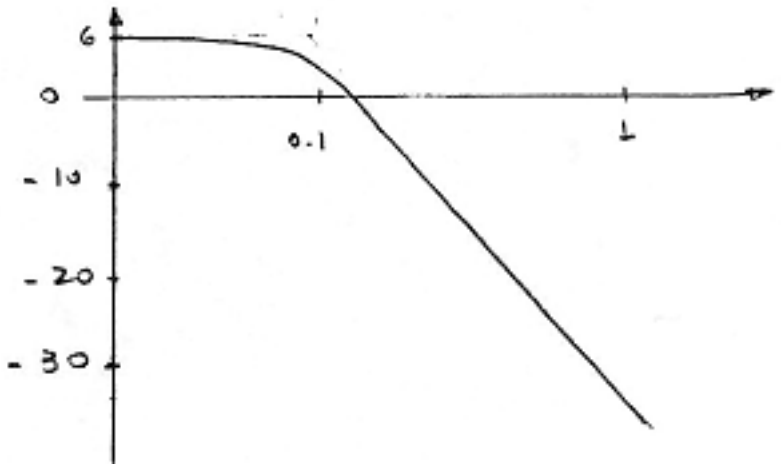


Figura 42: Respuesta de amplitud de un sistema.

85. Asumiendo que un estanque puede ser representado por una función de transferencia de primer orden

$$G(s) = \frac{K_0}{Ts+1}$$

determine los parámetros K_0 y T si al exitar el proceso con un flujo sinusoidal de frecuencia $f = 0.01\,Hz$ se obtiene la siguiente respuesta en régimen permanente de la figura 43.

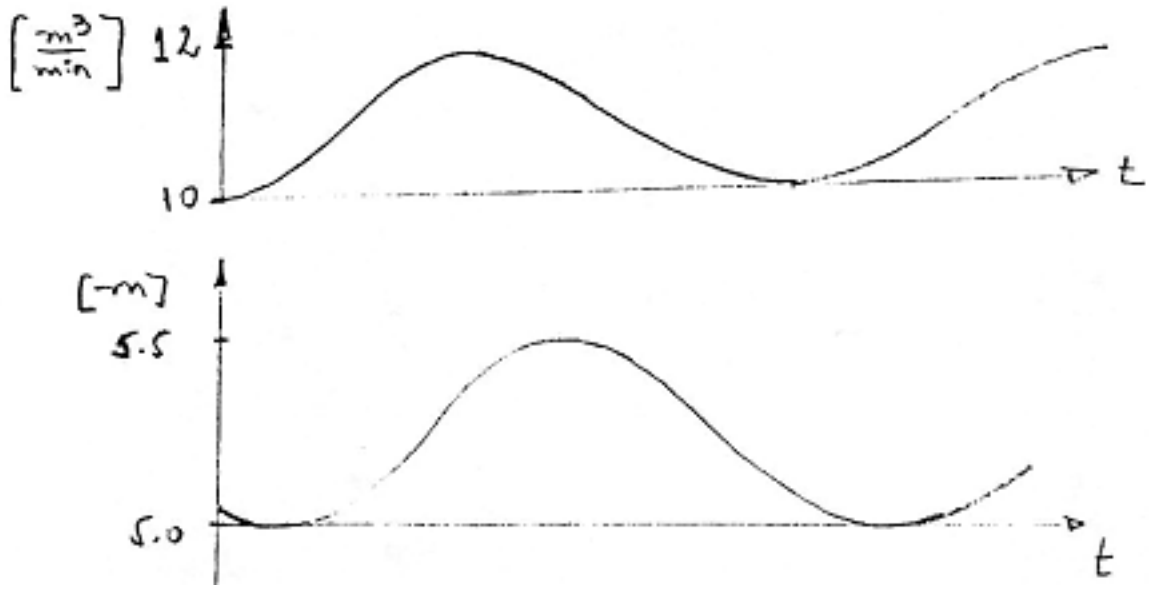


Figura 43: Respuesta en el tiempo.

86. Se realizan los siguientes experimentos con un proceso:

    i. Se perturba una planta en lazo abierto con entradas sinusoidales de diferentes frecuencias obteniéndose la respuesta de amplitud de la figura 44.

ii. Se realimenta la planta con control proporcional y se comprueba que, para una cierta ganancia del controlador, la planta oscila con período de $T_c\, min$.

Determine una función de transferencia para el proceso.

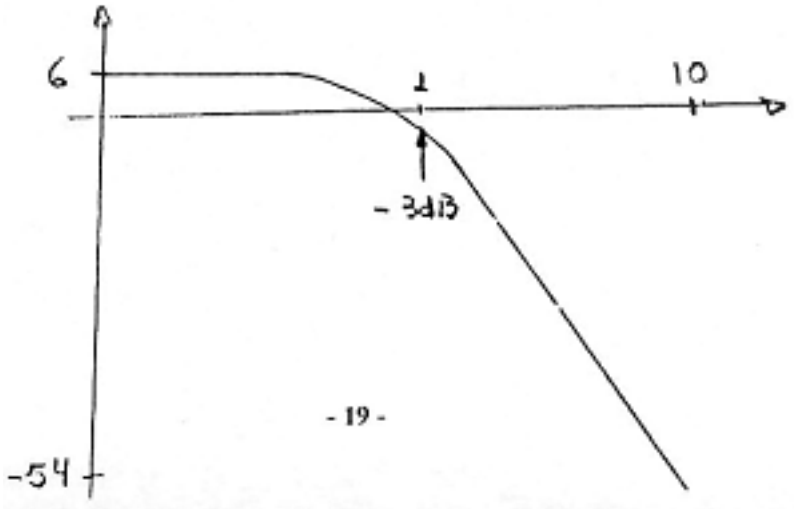


Figura 44: Respuesta de amplitud de un sistema.

87. A partir del diagrama de Bode de la figura 45 obtenga una función de transferencia junto con los márgenes de estabilidad (márgenes de ganancia y fase).

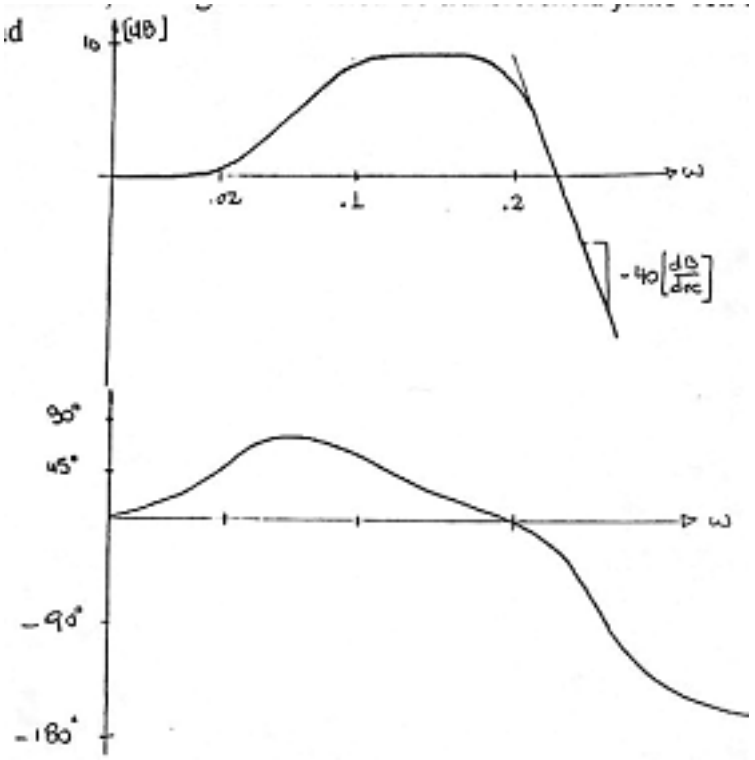


Figura 45: Respuesta de amplitud y fase de un sistema.

88. Experimentalmente se encontró el diagrama de Bode de la figura 46 para la magnitud de la respuesta de un proceso. Además se determinó que cuando la amplitud de la sinusoide de salida del proceso correspondía a la misma amplitud de la sinusoide de entrada, la salida iba atrasada con respecto a la entrada en 200°.

(a) Encuentre la función de transferencia de la planta.

(b) Encuentre el margen de fase y ganancia cuando se realimenta el sistema con ganancia proporcional $K_P = 1$.

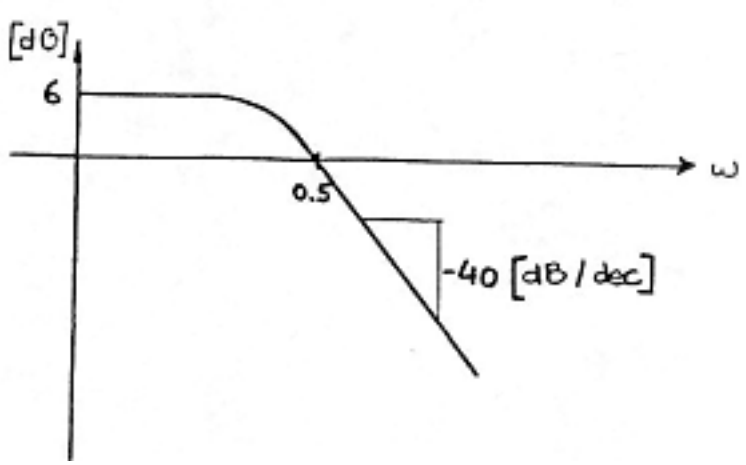


Figura 46: Respuesta de amplitud de un sistema.

89. Para el diagrama de Bode de la figura 47:

(a) Encuentre la función de transferencia asociada.

(b) ¿A que frecuencia oscilará el sistema realimentado con ganancia proporcional crítica?

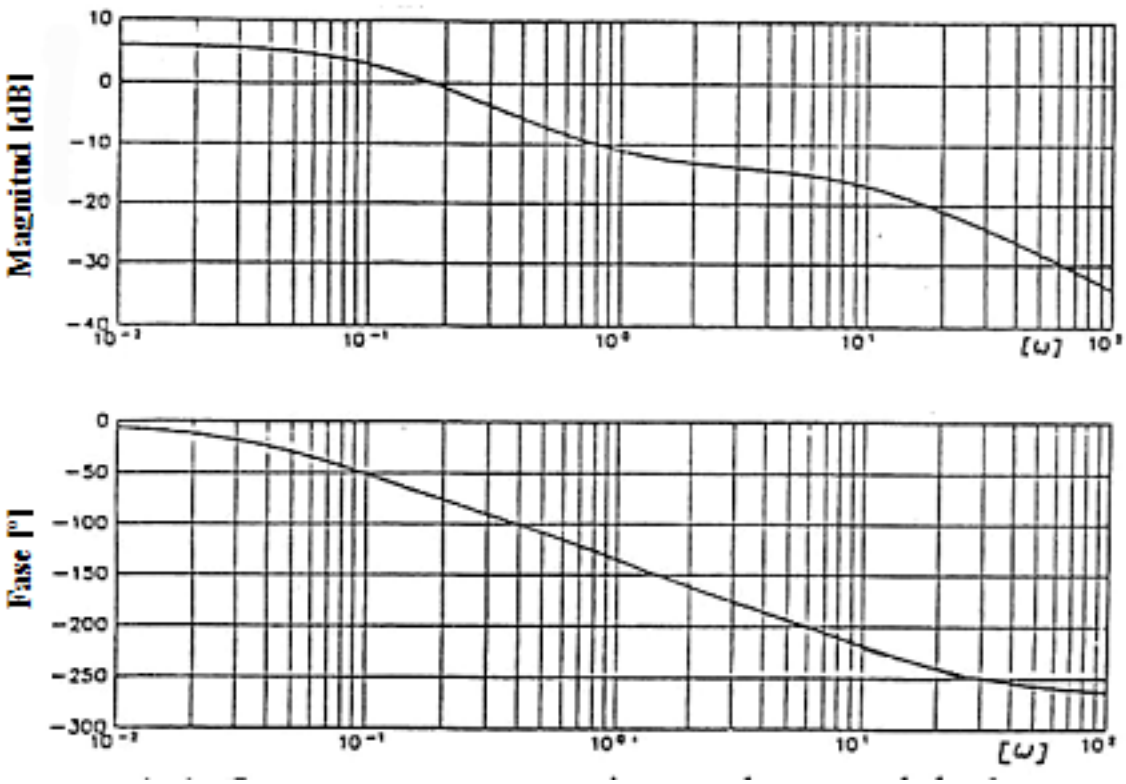


Figura 47: Respuesta de amplitud y fase de un sistema.

90. Para el proceso en variables de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

encuentre un vector de medición C que anule completamente una exitación sinuosoidal de frecuencia $\omega = \omega_1$.

91. Para la planta

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$$

bosqueje el diagrama de Nichols y determine puntos de interés. Si se realimenta con ganancia proporcional $K_P = 1$, ¿Cuál es el margen de fase y el margen de ganancia?

92. Se desea analizar la estabilidad de un sistema realimentado empleando técnicas de respuesta de frecuencia. El proceso está caracterizado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(1+Ts)^2}$$

con $K = 1$, $L = 1\,min$, $T = 1\,min$. El controlador es proporcional y de ganancia K_P.

(a) Trace aproximadamente el diagrama de Bode en amplitud y fase. ¿Cuál es la frecuencia para la cual la fase es -180°?

(b) Trace aproximadamente la curva de Nyquist y la curva de Nichols del sistema en lazo abierto, considerando $K_P = 1$.

(c) Analice la estabilidad del sistema realimentado en función de la ganancia K_P.

93. Dado un proceso con función de transferencia:

$$F(s) = \frac{2e^{-s}}{(2s+1)(3s+1)(4s+1)}$$

(a) Trace el diagrama de Nichols, indicando valores de importancia.

(b) Obtenga la ganancia y período crítico.

(c) Determine la ganancia de un controlador proporcional, tal que el margen de fase sea de 30°.

94. A través de pruebas experimentales se ha determinado que un proceso puede modelarse según:

$$F(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1+Ts}$$

(a) Grafique en detalle la curva de Nichols y calcule la ganancia crítica K_c y el período crítico T_c.

(b) Analice la estabilidad del sistema realimentado y determine el margen de fase del sistema proceso-controlador, si los parámetros de un controlador PID se ajustan de acuerdo al procedimiento de Ziegler-Nichols, es decir $K_P = 0.6K_c$, $T_I = 0.5T_c$, $T_D = 0.125T_c$. ¿Cuál es el efecto de las acciones integral y derivativa sobre la estabilidad del sistema?

4. Diseño de Controladores PID

- Diseño de Controladores PID

95. La planta:

$$F(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

representa la dinámica de un brazo robótico en el plano horizontal. Para un buen control del brazo es fundamental que se cumplan los siguientes requisitos:

(a) El error permanente ante un escalón debe ser nulo.

(b) El error permanente ante una rampa debe ser nulo.

(c) La respuesta a un escalón no debe tener sobreoscilaciones.

Apoyándose en el lugar geométrico de las raíces diseñe un controlador que cumpla los requerimientos mencionados y determine todos sus parámetros.

96. Para la planta:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2}$$

encuentre un controlador PID que anule el error permanente ante un escalón en la referencia y obviamente estabilice la planta (Determine K_P, K_I y K_D). *Pista*: Apóyese en el lugar geométrico de las raíces para simplificar el diseño del controlador.

97. Diseñe un controlador PID que estabilice las siguientes plantas:

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s+1)(2s-1)} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s^2-3s-2}$$

98. Obtenga un controlador PID que entregue un comportamiento sobreamortiguado para el proceso:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 64}$$

Encuentre un controlador tal que los polos del sistema realimentado sean iguales a -1.

99. Considere la planta:

$$G(s) = \frac{-s + 1}{s^2 + s + 17}$$

¿Existe un controlador PD que estabiliza la planta y hace los polos del sistema realimentado iguales? De existir encuentre el valor de K_P y K_D.

100. Para el sistema en lazo cerrado de la figura 48 encuentre un controlador PID que haga el sistema realimentado sobreamortiguado y genere un error permanente no mayor que 1 % para entrada escalón en la referencia (use el Lugar Geométrico de las Raíces para simplificar el controlador).

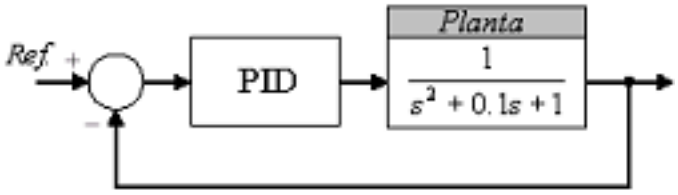


Figura 48: Sistema en lazo cerrado.

101. Determine un controlador que permita tener error permanente cero y un margen de fase de 45° para una planta cuyo diagrama de Nichols se muestra en la figura 49.

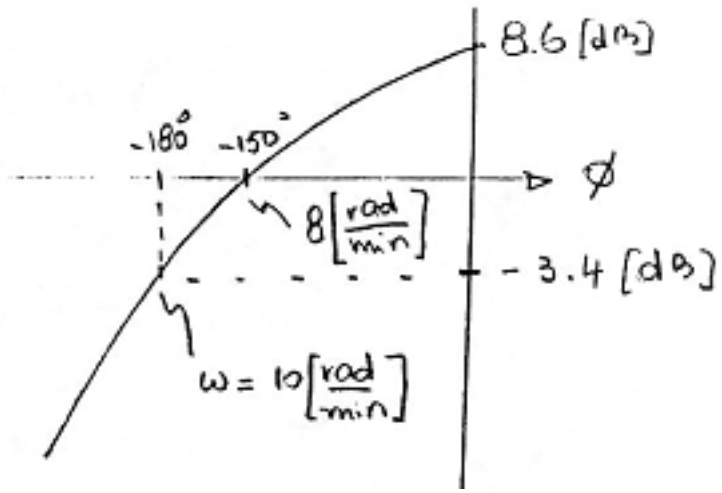


Figura 49: .

102. El diagrama de la figura 50 representa un sistema de control de densidad, en el cual $F(s)$, $G(s)$ y $H(s)$ son las funciones de transferencia del controlador, del proceso y del sensor-transmisor, respectivamente. $G(s)$ y $H(s)$ están dados por

$$G(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^3}, \quad H(s) = 1$$

con $T = 1\,min.$

Se desea aplicar a dicho proceso el método de sintonización de controladores propuesto por Ziegler-Nichols, según el cual $K_P = 0.6K_c$, $T_I = 0.5T_c$, $T_D = 0.125T_c$ con K_c la ganancia crítica y T_c el periodo crítico, obtenidos con acción puramente proporcional.

(a) Trace el Lugar Geométrico de las Raíces del sistema realimentado, considerando sólo acción proporcional en el controlador, y determine K_c y T_c.

(b) Determine la función de transferencia del controlador PID y trace la curva de Nichols de $F(s)G(s)H(s)$. ¿Qué puede decir acerca de la estabilidad del sistema realimentado?

(c) Si el sensor-transmisor corresponde a un retardo puro, esto es, $H(s) = e^{-Ls}$, ¿cuál es el mayor del retardo L para el cual el sistema realimentado aún es estable?

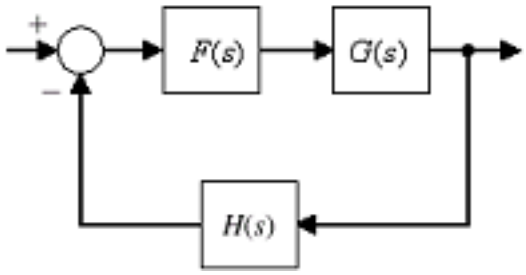


Figura 50: Sistema en lazo cerrado.

103. Considere el sistema realimentado de la figura 51, el cual representa de una forma muy simplificada el control de velocidad del motor de un automóvil. La variable manipulada es el flujo de combustible y $G_c(s)$ representa el controlador; asigne al retardo el valor $T = 0.2\,s$. Para las preguntas a y b considere el sistema en lazo abierto. Para las preguntas c a f considere el sistema en lazo cerrado.

(a) Grafique la curva de reacción del motor, para una entrada en escalón unitario.

(b) Si la entrada al motor es $u(t) = \text{sen}(\omega t)$, con $\omega = 0.25\,rad/s$, ¿cuál es la respuesta $y(t)$ en condiciones de regimen permanente?

(c) Aproxime apropiadamente el retardo y trace el Lugar Geométrico de las Raíces del sistema realimentado con control proporcional.

(d) Utilice el método de Routh Hurwitz para analizar la estabilidad del sistema realimentado con control proporcional.

(e) Ajuste los parámetros de un controlador PID de modo de obtener criterio cuártico.

(f) Determine los parámetros de un controlador PID que permita obtener un margen de fase de 30°.

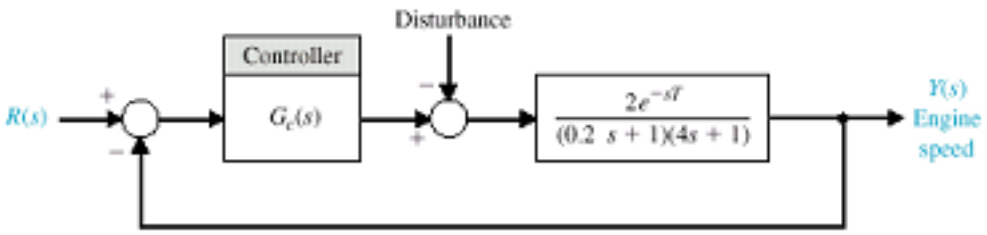


Figura 51: Sistema realimentado para control de velocidad del motor de un vehículo.

5. Analísis y Control Realimentado en el Estado

- Formas Canónicas
- Controlabilidad
- Observabilidad
- SS-FBK

104. Obtenga las formas canónicas controlable y observable para el proceso:

$$F(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

105. Para el sistema:

$$F(s) = \frac{10}{s^3 + 2s^2 - 3s + 1}$$

(a) Encuentre una representación en el espacio de estado.

(b) A través de transformaciones de estado, encuentre una nueva representación de manera que la matriz de estado sea diagonal (forma canónica de Jordan).

(c) Obtenga la matriz de transicion para (b).

(d) Discretice para $\Delta = 0.2$ (retención orden cero).

(e) Realimente el sistema en el estado de manera de estabilizarlo.

(f) Encuentre los valores propios del sistema en lazo abierto y realimentado.

106. ¿Son los sistemas S_x, S_y y S_z equivalentes?

$$S_x: \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& u \\ \dot{x}_2 &=& -x_2 + u \\ y &=& x_1 + x_2 \end{array} \qquad S_y: \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& x_2 \\ \dot{x}_2 &=& -x_2 + u \\ y &=& x_1 + 2x_2 \end{array} \qquad S_z: \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& u \\ \dot{x}_2 &=& -x_2 + 2u \\ y &=& x_2 \end{array}$$

107. Encuentre una matriz de transformación T que convierta el sistema

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

en su forma canónica observable ¿Cuáles son los valores propios en cada caso?

108. Para el sistema

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^3 + 3.5s^2 + 2.5s + 0.5}$$

(a) Obtenga representación en el espacio de estado.

(b) ¿Es el sistema controlable y observable?

109. Establezca condiciones de controlabilidad y observabilidad para el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_{33}x_3 + b_3u \\ y &= c_1x_1\end{aligned}$$

110. Considere el sistema de estanques de la figura 52. Asumiendo linealidad en la dinámica de los estanques:

(a) ¿Es controlable el sistema? Demuestre.

(b) ¿Es observable el sistema? Demuestre.

Asuma que la función de transferencia para el estanque 1 es:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

y $f_0(t) = h(t)$; (flujo salida = altura)

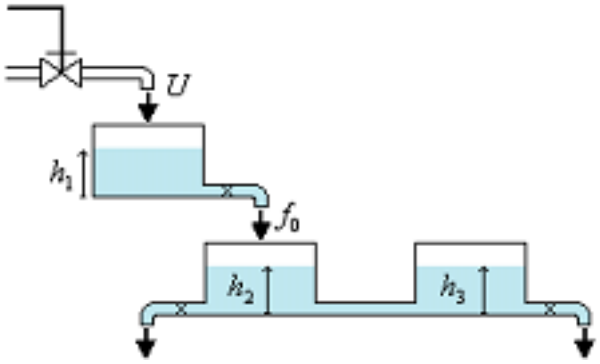


Figura 52: Sistema de estanques.

111. Para la planta:

$$G(s) = 0.2\frac{s^2 - s + 0.25}{s^2 + s - 2}$$

(a) Determine un controlador en el estado que ubique todos los polos del sistema en -1.

(b) Idem para

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

112. Para la planta:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 - 3s^2 + 2s + 3.5}$$

(a) Obtenga una ecuación de estado.

(b) Realimente en el estado de forma de fijar los polos del sistema realimentado en -1, -2 y -3.

(c) Determine la función de transferencia del controlador.

113. Para la planta:

$$F(s) = \frac{g_4 s^3 + g_3 s^2 + g_2 s + g_1}{s^4 + a_4 s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1}$$

determine la función de transferencia de un controlador que modifica los polos del sistema en lazo abierto a polos del sistema en lazo cerrado iguales a -1.

114. La figura 53 muestra el lazo de control para guiado automático de un vehículo, cuyo modelo posee parámetros $\tau_1 = 50\,ms$ y $\tau_2 = 40\,ms$.

(a) Determine una ecuación de estado para el vehículo.

(b) Considere $R = 0$ y que el algoritmo de control está dado por

$$u(t) = -K_1 y(t) - K_2 \frac{dy}{dt}(t) - K_3 \frac{d^2y}{dt^2}(t)$$

¿Cómo elegiría los parámetros K_1, K_2 y K_3 si desea que el sistema realimentado tenga como constantes de tiempo $\tau_1 = 30\,ms$, $\tau_2 = 20\,ms$, $\tau_3 = 10\,ms$?

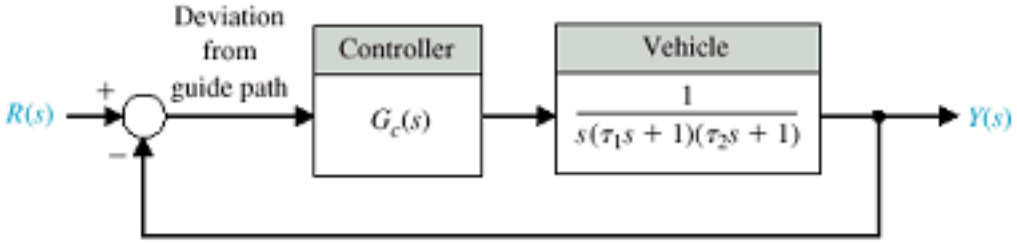


Figura 53: Sistema realimentado para guiado automático de un vehículo.

6. Control Optimo en el Estado

- Control LQR
- Observadores

115. Considere el sistema de estanques de la figura 54, para el cual:

i. $L = 50\,m$ y los largos de las tuberías restantes son despreciables.

ii. El sensor H posee un retardo en la medición de $20\,s$.

iii. La variable de entrada (manipulada) es U y la de salida (controlada) es H.

Analice la dinámica del sistema empleando herramientas de simulacin y anlisis numérico (ej. Matlab, Octave, Scilab) y desarrolle controladores según se indica a continuación:

(a) *Modelación dinámica del proceso.* Obtenga expresiones analíticas del modelo dinámico del sistema empleando los principios físicos que rigen su comportamiento y asigna valores prácticos/empíricos a sus parámetros.

(b) *Simulación dinámica.* Simule el modelo dinámico no-lineal ante cambios escalón en las entradas.

(c) *Linealización.* Linealice el modelo para un punto de operación a elección. Especificar rango de validez de la linealización.

(d) *Comparación modelos no-lineal y lineal.* Compare las respuestas del modelo no-lineal y lineal ante cambios en escalón. Grafique las diferencias y el error del modelo linealizado.

(e) *Modelo en el Espacio de Estado.* Calcule los valores propios del sistema y derive un modelo en el espacio de estado.

(f) *Modelos de actuadores y sensores.* Desarrolle un modelo para el sensor y válvula de control. En el sensor incluya ruido y un retardo de $20\,s$ en la medición. En la válvula simule las saturaciones inferior y superior.

(g) *Controlador PID.* Diseñe un controlador PID y simule el sistema realimentado ante cambios escalón en la referencia (altura deseada en estanque 4). Se debe obtener una buena respuesta dinámica y error permanente nulo.

(h) *Controlador en el espacio de estado.* Diseñe un controlador en el estado que localice todos los polos del sistema realimentado en $s = -0.2\,s^{-1}$ y que no genere error permanente.

(i) *Controlador LQR.* Diseñar un controlador en el estado que no genere error permanente en lazo cerrado y que sea óptimo cuadráticamente, es decir que minimice la integral entre 0 y t del error al cuadrado en la variable controlada más el cuadrado ponderado de la energía de control utilizada.

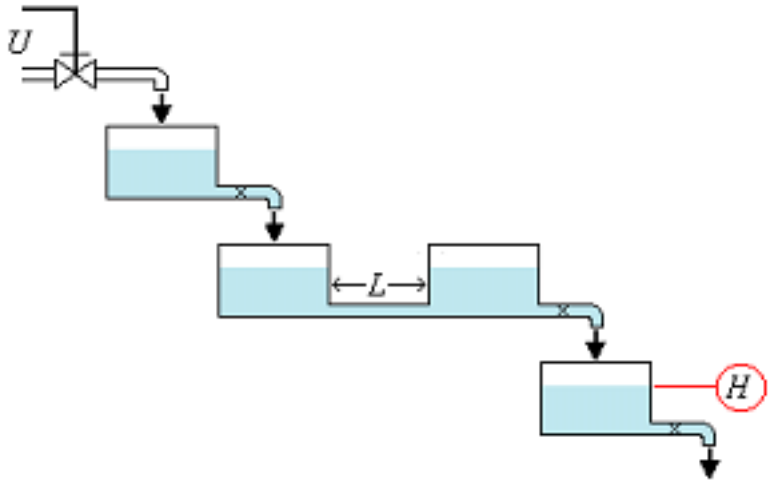


Figura 54: Sistema de estanques.