Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 8

Asignación de polos

25 de Octubre 2024

Vicente Fernández - vichofernandezr1@uc.cl

El objetivo de esta ayudantía es abrir las puertas al concepto de **asignación de polos**, en el cual vamos a poder sintonizar/diseñar controladores generales de la forma

$$C(s) = \frac{p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots}{\ell_0 + \ell_1 s + \ell_2 s^2 + \cdots}$$

tales que los polos de lazo cerrado, y por ende, el comportamiento temporal, sea como nosotros queramos. La ayudantía será una introducción a los temas que abordaremos en las próximas dos clases y presentará los conceptos clave necesarios, apoyándose en conocimientos previos como la respuesta temporal, entre otros.

Problema 1

Suponga que el modelo nominal de una planta está dado por

$$G_o(s) = \frac{-s + 5}{(s+2)(s+3)}$$

Se sabe además que

1. La referencia es $r(t) = 2t$ (rampa)
2. La perturbación de salida es $d_o(t) = \cos(1.5t)$
3. El ruido de medición es significativo sólo a frecuencias mayores que 10 [rad/s]

Proponga un polinomio de lazo cerrado $A_{cl}(s)$ que le permita cumplir con todas las especificaciones, es decir, seguir a la referencia, atenuar la perturbación de salida, y no dejar pasar el ruido de frecuencia mayor a 10 [rad/s].

Solución:

Antes de proponer un polinomio de lazo cerrado, en otras palabras, antes de forzar los polos de lazo cerrado a estar en alguna ubicación específica y lograr alguna respuesta temporal que necesitamos, debemos proponer una estructura correcta para el controlador.

- **Estructura de $C(s)$:**

  a) Seguimiento de referencia: Para seguir una referencia tipo rampa, ya no nos sirve mirar el estado estacionario de la salida y_∞, ya que este será infinito si lograramos seguir esta referencia. Por ende, nos concentraremos en el error de seguimiento $E(s) = Y(s) - R(s)$, el cual debiese ser cero en estado estacionario, es decir, queremos que

  $$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$$

  Para ello, veremos que basta imponer que el controlador tenga dos polos en $s = 0$ (es decir, doble integración). Esto se vería como

  $$C(s) = \frac{\tilde{C}(s)}{s^2}$$

  donde $\tilde{C}(s)$ es la parte que nos falta definir del controlador.

  Note que

  $$E(s) = \frac{1}{G_o(s)C(s)}R(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)\frac{\tilde{C}(s)}{s^2}} \times \frac{2}{s^2} = \frac{2}{s^2 + G_o(s)\tilde{C}(s)}$$

  Entonces,

  $$e_\infty = \lim_{s\to 0} E(s)s = \lim_{s\to 0} \frac{2s}{s^2 + G_o(s)\tilde{C}(s)} = \frac{0}{G_o(0)\tilde{C}(0)} = \frac{0}{\frac{5}{6}\tilde{C}(0)} = 0$$

  lo cual sería **cero** justo como queríamos, siempre y cuando escogamos $\tilde{C}(0) \neq 0$.

  b) Rechazo de perturbación: Para rechazar perturbaciones, debemos mirar a la función de sensibilidad $S_o(s) = Y(s)/D_o(s)$. Como vamos a ver en clases la próxima semana, para matar la perturbación de salida $d_o(t) = \cos(1.5t)$, basta que el controlador tenga polos complejos conjugados en $\pm j1.5$. Entonces, la estructura del controlador debiese ser

  $$C(s) = \frac{\bar{C}(s)}{(s^2 + 1.5^2)}$$

donde $\bar{C}(s) = \tilde{C}(s)/s^2$. Note que para esta elección de controlador, tenemos que

$$S_o(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)\frac{\bar{C}(s)}{(s^2+1.5^2)}}$$

Justamente, para ver si somos capaces de "matar" la perturbación de salida, necesitamos que $S_o(j1.5) = 0$, y esto es justamente lo que pasa cuando el controlador se define como lo hicimos arriba. Es decir,

$$S_o(j1.5) = \frac{1}{1 + G_o(s)\frac{\bar{C}(s)}{((j1.5)^2+1.5^2)}} = S_o(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)\frac{\bar{C}(s)}{0}} = 0$$

En resumen, para seguimiento de la rampa $r(t) = 2t$ y rechazo de la perturbación de salida $d_o(t) = \cos(1.5t)$, debemos utilizar un contorlador de la forma

$$\boxed{C(s) = \frac{\tilde{C}(s)}{s^2(s^2 + 1.5^2)}}$$

Ahora que tenemos la estructura del controlador, debemos preocuparnos del ruido de medición, el cual lo trataremos a través del ancho de banda del lazo cerrado.

- **Ancho de banda del lazo cerrado $A_{cl}(s)$:**

  a) Ruido de medición: Para el ruido de medición, recuerde que la relación entre $Y(s)$ y $D_m(s)$ está dada por

  $$\frac{Y(s)}{D_m(s)} = -T_o(s)$$

  Dado que el ruido se encuentra en frecuencias mayores a 10 [rad/s], basta que escogamos el ancho de banda de $T_o(s)$ estríctamente menor a 10. De forma que $\frac{Y(j\omega)}{D_m(j\omega)} = -T_o(j\omega) \approx 0$ para frecuencias mayores a 10 [rad/s]. Obviamente, mientras menor que 10 sea el ancho de banda, mejor rechazo del ruido.

  b) Cero de fase no mínima: Hace mucho tiempo (Clase09), vimos que los ceros de fase no mínima de la planta tenian un efecto en la respuesta temporal, el cual estaba dado por un *undershoot* M_u. También vimos que existía una cota que relacionaba el undershoot con la ubicación $s = c$ del cero y el tiempo de asentamiento t_s, la cual está dada (aproximadamente) por

  $$M_u > \frac{1}{ct_s}$$

  En nuestro caso $c = 5$, y el tiempo de asentamiento dependerá de qué tan rápido fijemos el ancho de banda del lazo. Por ejemplo, para un sistema de segundo orden, $t_s \approx \frac{4}{\psi\omega_n}$. Entonces, mientras más grande sea el ancho de banda ω_n, más pequeño

será t_s, y por ende, más grande será el undershoot M_u. De momento, el ancho de banda debe ser menor a 10 [rad/s], pero ojalá que fuese más chico para tener menor undershoot, pero no puede ser tampoco menor a 1.5 [rad/s] por que si no estaríamos dejando pasar el ruido de salida al rededor de esa frecuencia. Basta entonces elegir, por ejemplo, un ancho de banda entre medio, el cual podría ser 5 [rad/s].

Resumiendo, escogeremos el **ancho de banda del lazo cerrado menor a** 5 **[rad/s]**. ¿Cómo podemos forzar esto? bueno, escogiendo los polos **dominantes** de lazo cerrado de segundo orden, y el resto de los polos necesarios los podemos elegir en una ubicación más alejada de tal manera que no afecten a la respuesta temporal. ¿Cómo saber cuántos polos de lazo cerrado poner en el $A_{cl}(s)$? Lo veremos en las clases siguientes.

De momento, sabemos que el polinomio de lazo cerrado, usando el controlador que propusimos arriba tiene la forma

$$A_{cl}(s) = \text{num}\{1 + G_o(s)C(s)\} = \text{num}\left\{1 + \frac{-s+5}{(s+2)(s+3)} \times \frac{\tilde{C}(s)}{s^2(s^2+1.5^2)}\right\}$$

Para efectos de esta ayudantía, supondremos que $\tilde{C}(s)$ se puede escribir como $\tilde{C}(s) = \dfrac{P(s)}{L(s)}$.

Entonces, el polinomio de lazo cerrado quedaría como

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= \text{num}\left\{1 + \frac{-s+5}{(s+2)(s+3)} \times \frac{P(s)}{s^2(s^2+1.5^2)L(s)}\right\} \\ &= s^2(s^2+1.5^2)L(s)(s+2)(s+3) + (-s+5)P(s) \end{aligned}$$

Note que el orden del polinomio de lazo cerrado depende de la elección de $P(s)$ y $L(s)$. Pero esto lo dejaremos para la próxima semana. De momento, sabemos que el orden es al menos mayor a 6. Pero por otro lado, nosotros dijimos que queríamos que los polos de lazo abierto se comportaran como un sistema de segundo orden con ancho de banda menor a 5 [rad/s]. Entonces, basta elegir los polos dominantes de segundo orden, y el resto de los polos los ponemos más rápidos, es decir, más alejados del eje real. Un ejemplo de $A_{cl}(s)$ que cumple con tener ancho de banda menor a 5 rad/s es el siguiente:

$$\boxed{A_{cl}(s) = (s^2 + 2\psi\omega_n s + \omega_n^2)(s+20)^n} \tag{1}$$

donde $\omega_n = 4 < 5$ [rad/s] y ψ puede ser como Ud. lo desee, por ejemplo, $\psi = 0.7$. Además, el valor de n dependerá de cuantos polos extra tenemos que agregar dependiendo del orden de $P(s)$ y $L(s)$.

Para terminar el diseño del controlador, debemos escoger $P(s)$ y $L(s)$ tales que los polos de lazo cerrado sean exactamente los que dijimos en (1). Para ello, veremos la próxima semana que $P(s)$ y $L(s)$ se escogen igualando coeficientes en la ecuación:

$$s^2(s^2+1.5^2)L(s)(s+2)(s+3) + (-s+5)P(s) = (s^2+5.6s+16)(s+20)^n$$

Esto es lo que vamos a ver en detalle la próxima semana, y es el **método de asignación de polos** que nos permitirá diseñar controladores $C(s)$ que hagan exactamente lo que queramos!