Control Optimo LQR y Filtros de Kalman

Prof. Miguel Torres T.

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Pontificia Universidad Católica de Chile

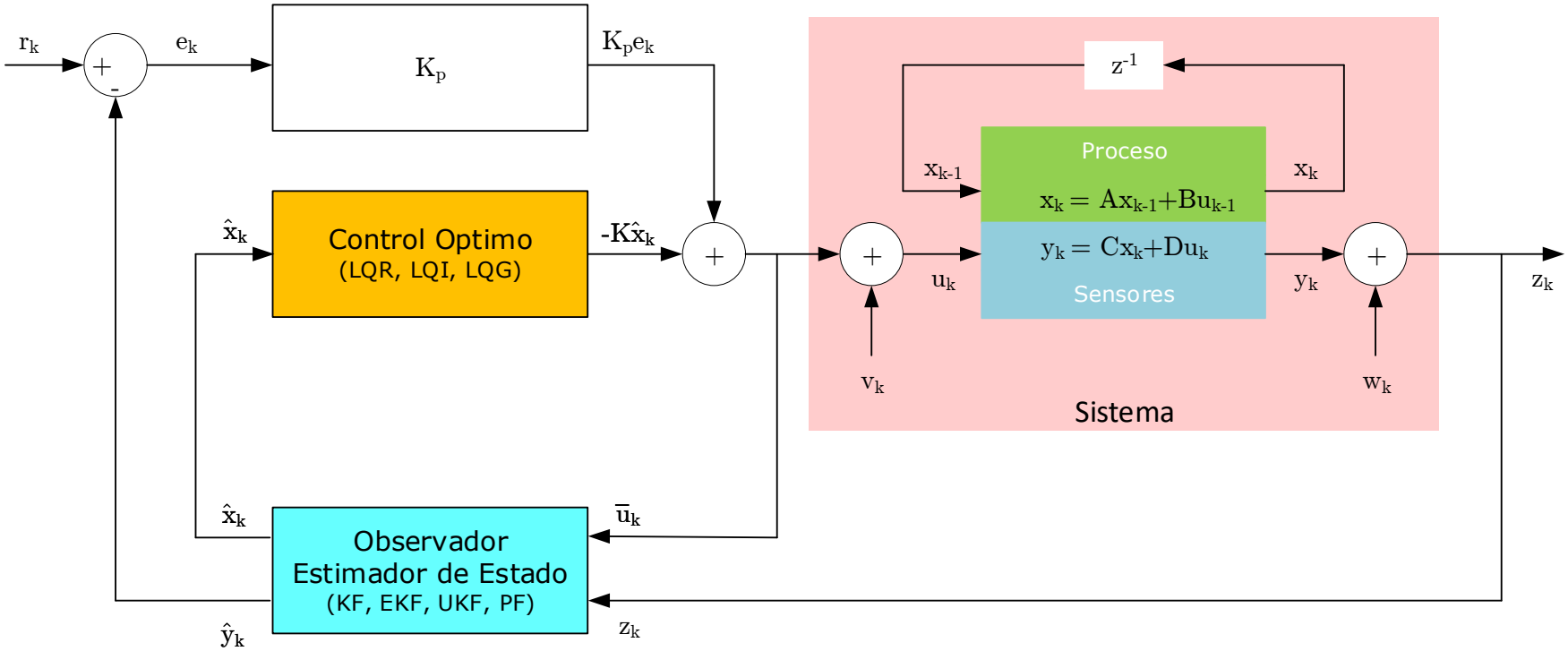
IEE2613 Control Automático



Contenidos

1. Diseño de Controles Avanzados
2. Métricas de Desempeño
3. Nociones Básicas de Filtros de Kalman
   - Ejemplo EKF Avión
4. Nociones Básicas de Control LQR
   - Ejemplo LQG Avión
5. Lista de Chequeo para Diseño de Controles Automáticos

Diseño de controles avanzados

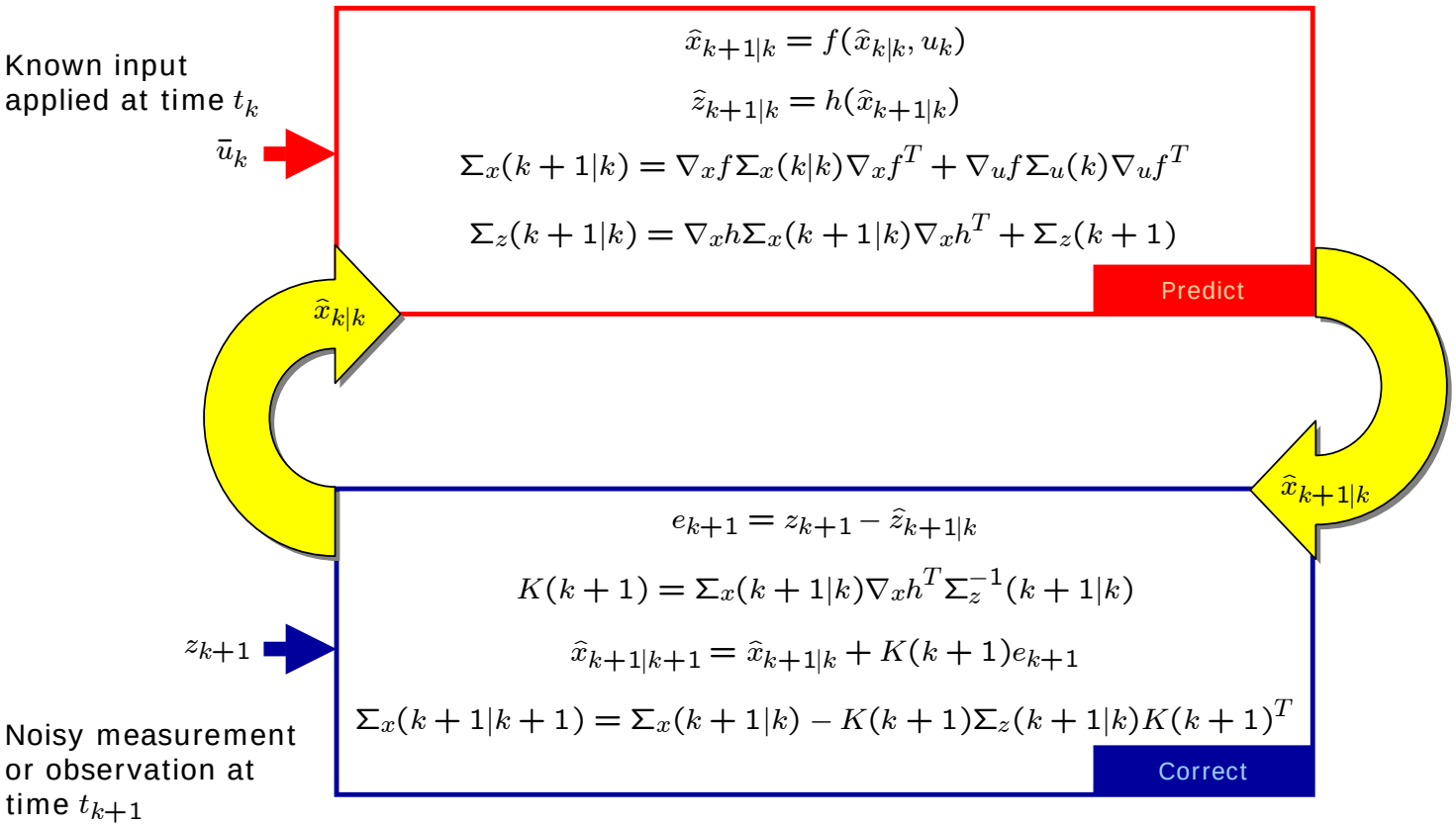


1. $$e_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k^r - x_k)^2 + (y_k^r - y_k)^2 + (z_k^r - z_k)^2}$$
2. $$MSE = e_{RMS}^2$$
3. $$SSD = N\, e_{RMS}^2$$
4. $$J_u = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k^2$$
5. $$J = \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{x}_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|^2$$

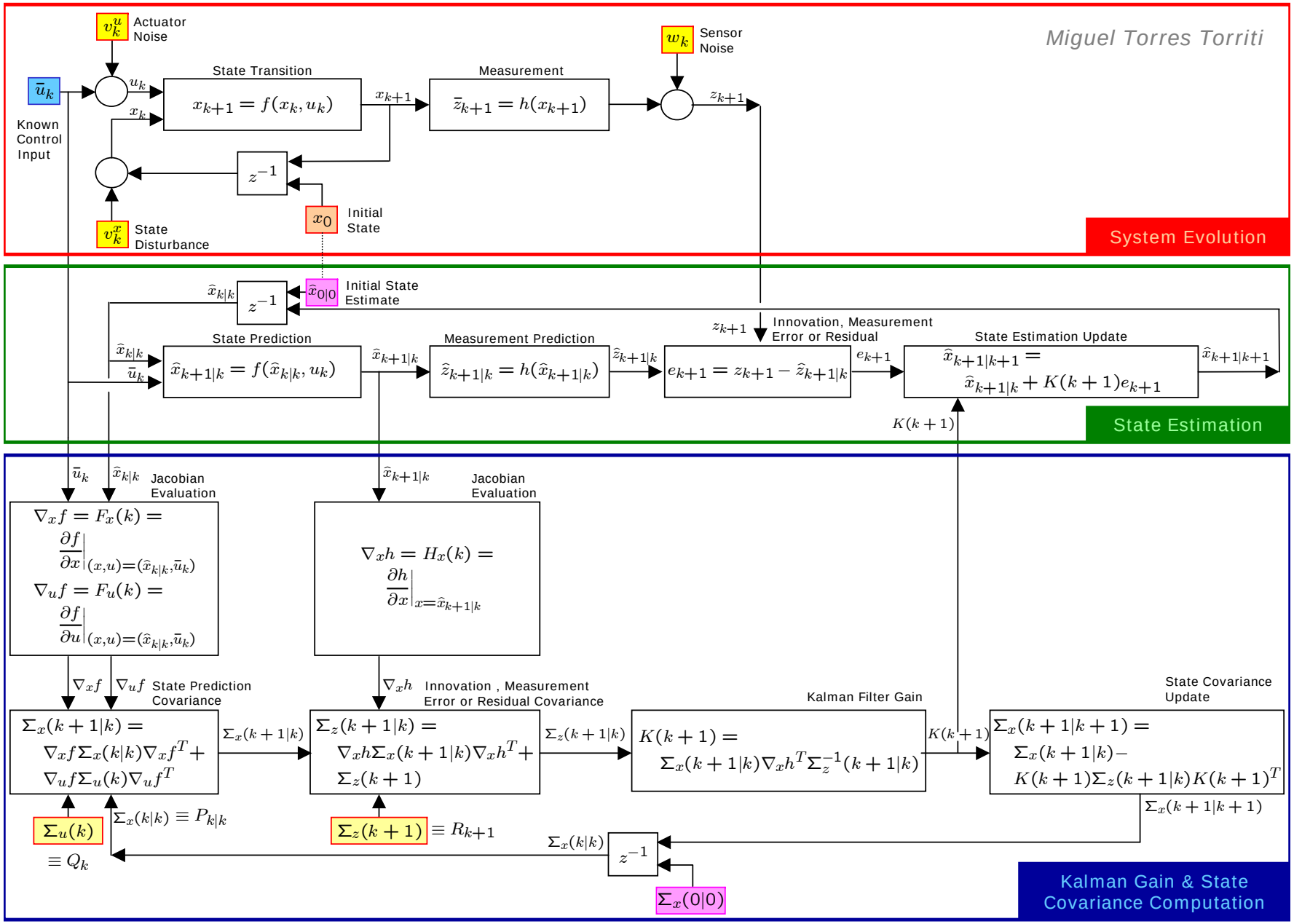
8. $$IAE = \int_0^t |e(\tau)| d\tau$$
9. $$IQE = \int_0^t |e(\tau)|^2 d\tau$$
10. $$ITAE = \int_0^t |e(\tau)| t d\tau$$
11. t_r (response time), t_r (peak time), M_p (overshoot), t_{ss} (time stead-state)
12. Loop closure $\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_0\|$ (cierre de trayectorias cerradas)
13. SNR
14. $\mathcal{H}_\infty$

Nociones Básicas de Filtros de Kalman

Extended Kalman Filter



Miguel Torres Torriti



Flowchart of the 1st Order Extended Kalman Filter

Algoritmo del Filtro de Kalman

Para el sistema compuesto de:

- Proceso:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{v}_k \quad (1)$$

- Medición:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{H}_k\mathbf{w}_k \quad (2)$$

- Estado Inicial:

$$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$$

Algoritmo del Filtro de Kalman

- Ruido del Proceso (ruido en actuadores y perturbaciones al estado):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &\sim N(0, \mathbf{Q}_k) \;\; i.i.d. \\ \mathbb{E}(\mathbf{v}_k) &= 0 \\ \mathbb{E}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) &= \mathbf{Q}_k \\ \mathbb{E}(\mathbf{v}_j \mathbf{v}_k^T) &= 0 \; \forall j \neq k \\ \mathbb{E}(\mathbf{v}_j \mathbf{x}_k^T) &= 0 \; \forall j, k \end{aligned}$$

- Ruido de Medición (ruido en el sensor):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &\sim N(0, \mathbf{R}_k) \;\; i.i.d. \\ \mathbb{E}(\mathbf{w}_k) &= 0 \\ \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) &= \mathbf{R}_k \\ \mathbb{E}(\mathbf{w}_j \mathbf{w}_k^T) &= 0 \; \forall j \neq k \\ \mathbb{E}(\mathbf{w}_j \mathbf{x}_k^T) &= 0 \; \forall j, k \end{aligned}$$

Algoritmo del Filtro de Kalman

- Predicción:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1|k} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, 0) = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}_{0|0} \equiv \bar{\mathbf{x}}_0 \\
\mathbf{z}_{k+1|k} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_k, 0) = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k \\
\mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \quad \mathbf{P}_{0|0} \equiv \mathbf{P}_0 \\
\mathbf{S}_{k+1|k} &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k^T
\end{aligned}
$$

Algoritmo del Filtro de Kalman

- Corrección/Actualización:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{k+1} &= z_{k+1} - z_{k+1|k} \\
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{C}_k^T\mathbf{S}_{k+1|k}^{-1} \\
\mathbf{x}_{k+1|k+1} &= \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} \\
\mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1|k}\mathbf{K}_{k+1}^T
\end{aligned}
$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \underbrace{\mathbf{A}_{k-1}\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}}_{\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \underbrace{\left[\mathbf{A}_{k-1}\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}\right]}_{\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \right)$$

Relación entre notaciones

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &\leftrightarrow \Sigma_{\mathbf{x}} \\
\mathbf{Q} &\leftrightarrow \Sigma_{\mathbf{v}} \\
\mathbf{M} &\leftrightarrow \Sigma_{\mathbf{xv}} \\
\mathbf{S} &\leftrightarrow \Sigma_{\mathbf{z}} \\
\mathbf{R} &\leftrightarrow \Sigma_{\mathbf{w}} \\
\mathbf{A} &\leftrightarrow \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f} \\
\mathbf{B} &\leftrightarrow \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f} \\
\mathbf{G} &\leftrightarrow \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{f} \\
\mathbf{C} &\leftrightarrow \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h} \\
\mathbf{D} &\leftrightarrow \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{h} \\
\mathbf{H} &\leftrightarrow \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{h} \\
k^{+} &\leftrightarrow k|k \\
k^{-} &\leftrightarrow k|k-1
\end{aligned}
$$

Derivación del filtro de Kalman

- Justificación como minimizador del error cuadrático de estimación:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \arg\min_{\mathbf{x}_{k|k}} \mathbb{E}\left(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\|^2\right)$$

- Justificación probabilística Bayesiana (estimador de máxima verosimilitud):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \arg\max_{\mathbf{x}_{k|k}} P(\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}|\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k) \\ &= \arg\max_{\mathbf{x}_{k|k}} P(\mathbf{z}_k|\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) P(\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}|\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k)\end{aligned}$$

- La derivación formal es extensa. Involucra estimación de mínimos cuadrados, pseudoinversas, actualización de covarianzas (propagación de la incertidumbre) y conceptos de estimación recursiva Bayesiana.
- Para un estudio formal recomiendo el curso *IEE3936 Estimación y Control Optimo* (ECO).

Error cuadrático de estimación de la medición

Error cuadrático de estimación de la medición

$$\begin{aligned} J(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mathbf{z}}^T \epsilon_{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{z}-\widehat{\mathbf{y}})^T(\mathbf{z}-\widehat{\mathbf{y}}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{z}-\mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}})^T(\mathbf{z}-\mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \tag{3}$$

Nota: En esta relación conocemos $\mathbf{z}$*, por lo tanto podemos encontrar* $\widehat{\mathbf{x}}$*.*

Error cuadrático de estimación de la medición

Expandiendo $J(\mathbf{z})$

$$J(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(\mathbf{z}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}^T\mathbf{C}^T\mathbf{z} + \widehat{\mathbf{x}}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}})$$

Para encontrar el $\widehat{\mathbf{x}}$ que minimiza el error en la estimación de la medición es necesario que

$$\frac{\partial J(\mathbf{z})}{\partial \widehat{\mathbf{x}}} = 0,$$

Luego, calculando

$$\frac{\partial J(\mathbf{z})}{\partial \widehat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{z}^T\mathbf{C} + \widehat{\mathbf{x}}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C} = 0$$

y reordenando:

$$\mathbf{C}^T\mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^T\mathbf{z}$$

Estimador de mínimos cuadrados (LSE)

Finalmente, despejando $\widehat{\mathbf{x}}$:

Estimador de mínimos cuadrados (LSE)

$$\widehat{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T}_{\mathbf{C}_L^\dagger}\mathbf{z} \tag{4}$$

donde $\mathbf{C}_L^\dagger$ es la pseudo-inversa izquierda de $\mathbf{C}$. Este estimador se conoce como LSE, por sus siglas en inglés *Least Square Estimator*.

Estimador de mínimos cuadrados (LSE)

El estimador $\widehat{\mathbf{x}}$ es el mínimo de $J(\mathbf{z})$ si la matriz Hessiana de $J(\mathbf{z})$ es definida positiva, es decir:

$$\frac{\partial^2 J(\mathbf{z})}{\partial \widehat{\mathbf{x}}^2} = \underbrace{\mathbf{C}^T}_{n\times m}\underbrace{\mathbf{C}}_{m\times n} > 0$$

Recordando que $\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = \min(\mathrm{rank}(\mathbf{A}), \mathrm{rank}(\mathbf{B}))$, para que la condición anterior se cumpla es necesario que $\mathrm{rank}(\mathbf{C}) = n$. Por lo tanto, para poder recuperar $\widehat{\mathbf{x}}$ a partir de $\mathbf{z}$ es necesario que $m \geq n$. ¡No es lo usual en la práctica!

Algoritmo del Filtro de Bayes

Algoritmo 1: Algoritmo del Filtro de Bayes

Input: $bel(x_{t-1}), u_t, z_t$

for *all* x_t **do**

$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$ ← Predicción (Prediction/Control update)

$bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \overline{bel}(x_t)$ ← Actualización (Correction/measurement update)

donde η es el factor de normalización:

$$\eta = \frac{1}{p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})}$$

end

return $bel(x_t)$

Algoritmo del Filtro de Bayes

Es importante destacar que la implementación del algoritmo requiere de:

- un prior, "creencia inicial" o "posterior inicial" del estado $bel(x_0) = p(x_0)$,
- un modelo probabilístico de las mediciones $p(z_t|x_t)$ (cap. 6, Thrun et al.),
- un modelo probabilístico de la transición de estado $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$ (cap. 5, Thrun et al.) y
- una representación de $bel(x_t)$ (caps. 3 y 4, Thrun et al.).

Además se requiere asumir que el proceso es Markoviano, lo cual es falso en la realidad por errores e incertidumbre de modelación y errores de aproximación, pero satisfactorio en la práctica.

Ejemplo Movimiento Longitudinal-Lateral de un Avión

Boeing 747-8



Ejemplo Movimiento Longitudinal-Lateral de un Avión

Modelo del proceso:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cos(\theta) - v_y \sin(\theta) \\ v_x \sin(\theta) + v_y \sin(\theta) \\ \omega \\ \frac{k_t}{m}(u_1 + v_1) - \frac{k_{v_x}}{m} v_x + v_y \omega + v_3 \cos(v_4) \\ -\frac{k_{v_y}}{m} v_y - v_x \omega + v_3 \sin(v_4) \\ \frac{k_\zeta}{J} v_x (u_2 + v_2) - \frac{k_\omega}{J} \omega \end{bmatrix}$$

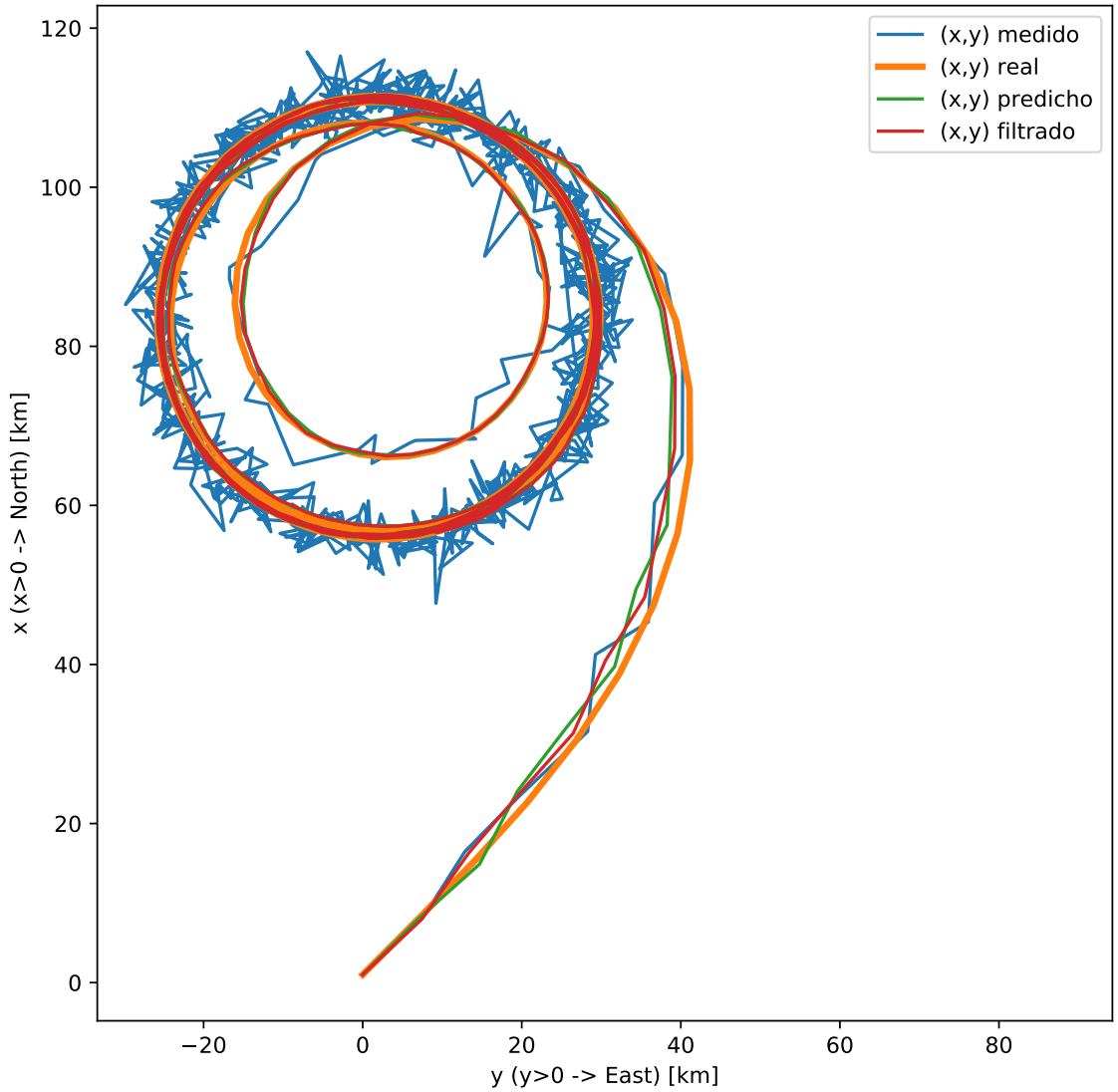
v_1 y v_2 son el ruido en actuadores, v_3 es la magnitud de la pertubación atmosférica y v_4 la dirección de la pertubación.

Modelo del sensor:

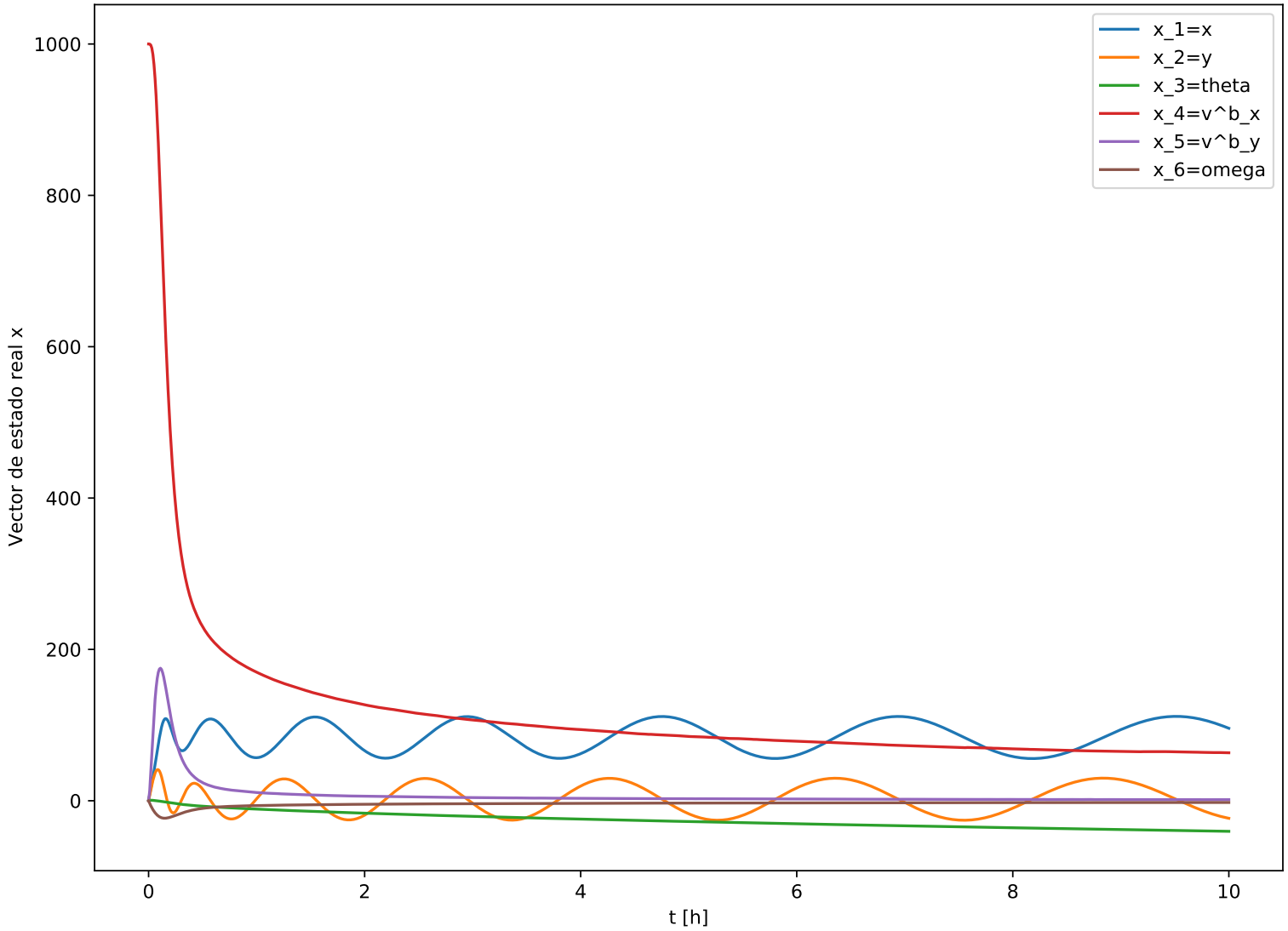
$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_\theta \end{bmatrix}$$

w_x, w_y y w_θ son los ruidos en el sensor de posicionamiento (GPS) y rumbo (brújula).

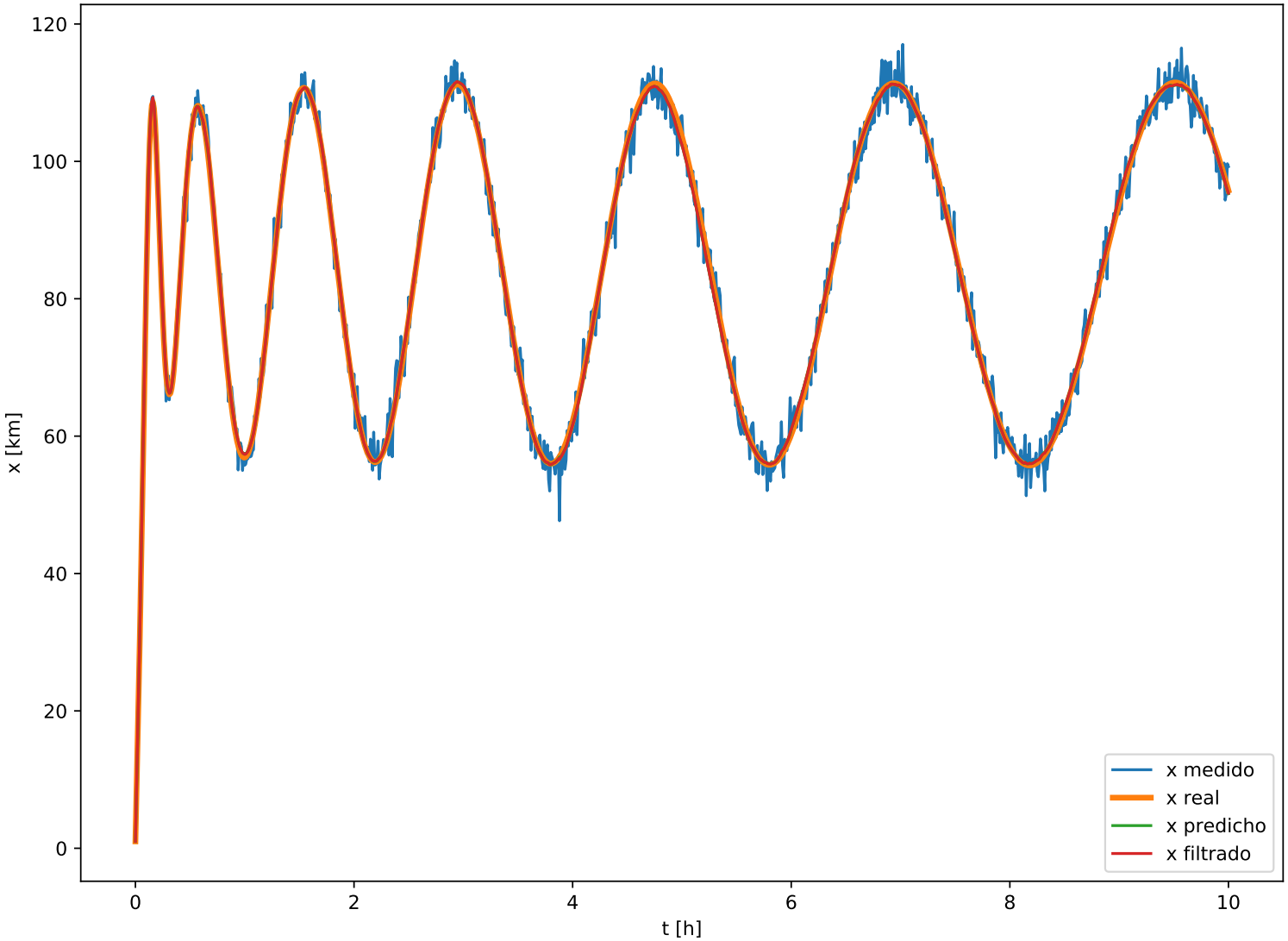
Trayectoria filtrada (estimada y predicha) del avión



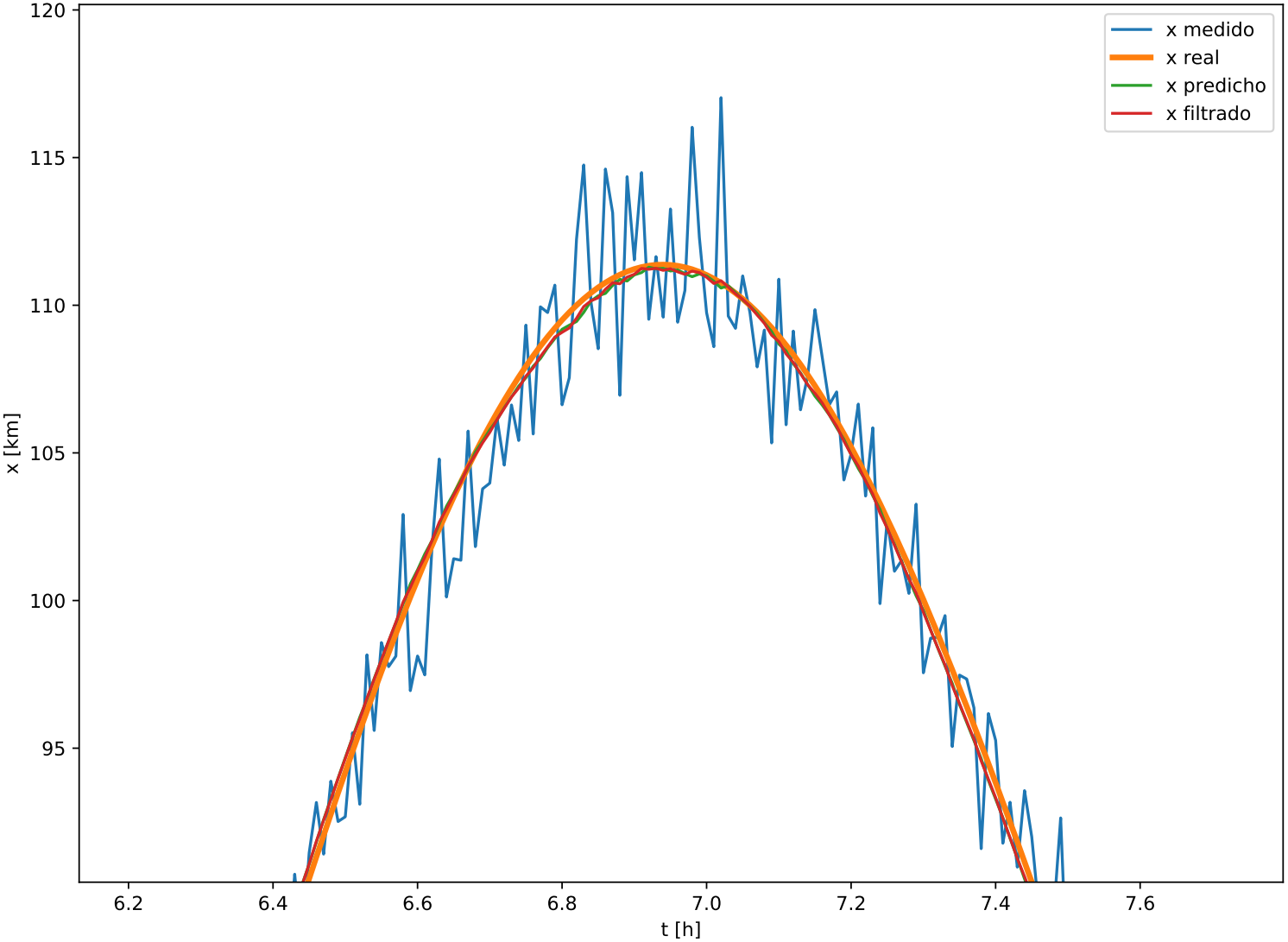
Vector de estado filtrado del avión



Posición x (oeste-este) del avión medida, real, predicha y filtrada



Posición x (oeste-este) del avión medida, real, predicha y filtrada (detalle)



Nociones Básicas de Control LQR

LQR de tiempo continuo y horizonte finito

Para un sistema lineal continuo en el tiempo, definido en el intervalo $t \in [t_0, t_1]$, y descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con función cuadrática de costo definida por

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_1)F(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

el control realimentado que minimiza el valor de la función de costo es:

$$u = -Kx,$$

donde K está dada por

$$K = R^{-1}B^T P(t)$$

y P se encuentra mediante la solución de la ecuación diferencial de Riccati en tiempo continuo:

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = -\dot{P}(t).$$

Condiciones de optimialidad para $J^\star$

Las condiciones de optimalidad para la funcional de costo óptima $J^\star$ son:

1. Equación de estado:
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
2. Ecuación de co-estado:
$$-\dot{\lambda} = Qx + A^T\lambda$$
3. Ecuación estacionaria:
$$0 = Ru + B^T\lambda$$
4. Condiciones de borde:
$$x(t_0) = x_0, \quad \text{y} \quad \lambda(t_1) = F(t_1)x(t_1)$$

LQR de tiempo continuo y horizonte infinito

Para un sistema lineal continuo en el tiempo descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con funcional de costo definida como

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

el control realimentado que minimiza el valor del costo es

$$u = -Kx,$$

donde K está dado por

$$K = R^{-1} B^T P,$$

y P se encuentra resolviendo la ecuación algebraica de Riccati de tiempo continuo

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

LQR de tiempo discreto y horizonte finito

Para un sistema lineal de tiempo discreto descrito por*

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

con un índice de desempeño definido como

$$J = \sum_{k=0}^{N} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right)$$

la secuencia de control óptima que minimiza el índice de desempeño está dada por

$$u_k = -F_k x_k,$$

LQR de tiempo discreto y horizonte finito

donde

$$F_k = (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A,$$

y P_k se encuentra iterativamente hacia atrás en el tiempo resolviendo la ecuación dinámica de Riccati

$$P_{k-1} = Q + A^T \left(P_k - P_k B \left(R + B^T P_k B \right)^{-1} B^T P_k \right) A$$

con condición final

$$P_N = Q.$$

* Gregory C. Chow. *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*, Krieger Publ. Co., 1986.

LQR de tiempo discreto y horizonte infinito

Para un sistema lineal de tiempo discreto descrito por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

con un índice de desempeño definido como

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right)$$

la secuencia de control óptima que minimiza el índice de desempeño está dada por

$$u_k = -F x_k,$$

donde

$$F = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A,$$

LQR de tiempo discreto y horizonte infinito

y P la solución positiva definida y única de la ecuación algebraica discreta de Riccati (DARE, por las siglas en inglés de discrete-time algebraic Riccati equation)

$$P = Q + A^T \left(P - PB \left(R + B^T PB \right)^{-1} B^T P \right) A.$$

Una manera de resolver esta ecuación es iterando la ecuación dinámica de Riccati de horizonte finito hasta que converja.

LQG de tiempo continuo y horizonte finito

Considere el sistema lineal dinámico con perturbaciones e incertidumbre en el estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}$ representa el vector de variables de estado del sistema, $\mathbf{u}$ es el vector de inputs de control e $\mathbf{y}$ es el vector de salidas medidas disponibles para retroalimentación. Los ruidos de proceso $\mathbf{v}(t)$ y medición $\mathbf{w}(t)$ se asumen blancos, aditivos Gaussianos.

LQG de tiempo continuo y horizonte finito

Dado el sistema anterior, el objetivo es encontrar un historia del input de control $\mathbf{u}(t)$ que en todo momento t dependa solo de mediciones pasadas $\mathbf{y}(t')$, $0 \leq t' < t$, tal que se minimice la siguiente función de costo en un horizonte finito $t \in [0, T]$:

$$J = \mathbb{E}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(T)F\mathbf{x}(T) + \int_0^T \mathbf{x}^{\mathbf{T}}(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t)R(t)\mathbf{u}(t)\,dt\right),$$

con

$$F \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0,$$

donde $\mathbb{E}$ denota el valor esperado. El tiempo final (horizonte) T puede ser finito o infinito. Si el horizonte tiende a infinito, el primer término $\mathbf{x}^T(T)F\mathbf{x}(T)$ de la función de costo se vuelve despreciable e irrelevante al problema. Además, para mantener el costo finito cuando $T = \infty$, la función de costo debe tomarse como $J_\infty = J/T$.

LQG de tiempo continuo y horizonte finito

El controlador LQG que resuelve el problema de control está especificado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= A(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + K(t)\left(\mathbf{y}(t) - C(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\right), \\
\hat{\mathbf{x}}(0) &= E\left(\mathbf{x}(0)\right), \\
\mathbf{u}(t) &= -L(t)\hat{\mathbf{x}}(t).
\end{aligned}$$

La matriz $K(t)$ es la llamada *ganancia de Kalman* del filtro de Kalman asociado, representado por la primera ecuación. En cada instante de tiempo t este filtro genrea un estimador $\hat{\mathbf{x}}(t)$ del estado $\mathbf{x}(t)$ usando las mediciones pasadas y los inputs de control.

La ganancia de Kalman $K(t)$ se calcula a partir de las matrices $A(t)$, $C(t)$, las dos matrices de covarianza del ruido $V(t)$, $W(t)$ asociadas a los ruidos $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$, y finalmente $\mathbb{E}\left(\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\right)$, la covarianza inicial del estado.

LQG de tiempo continuo y horizonte finito

Estas cinco matrices determinan la ganacia de Kalman a través de la ecuación diferencial matricial de Riccati:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t) + V(t),$$

con condición inicial

$$P(0) = E\left(\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\right).$$

Dada la solución $P(t)$, $0 \leq t \leq T$, la ganancia de Kalman resulta en

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t).$$

LQG de tiempo continuo y horizonte finito

La matriz $L(t)$ es la denominada *matriz de ganancia de realimentación*. Esta matriz está determinada por las matrices $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ y F a través de la siguiente ecuación diferencial matricial de Riccati:

$$-\dot{S}(t) = A^T(t)S(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t),$$

con condición final

$$S(T) = F.$$

Dada la solución $S(t)$, $0 \leq t \leq T$, la ganancia de realimentación resulta en

$$L(t) = R^{-1}(t)B^T(t)S(t).$$

LQG de tiempo continuo y horizonte infinito

- Cuando las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $V(t)$ y $W(t)$ no dependen de t y T tiende a infinito el contralador LQG se convierte en un sistema dinámico invariante en el tiempo. En ese caso, ambas ecuaciones diferenciales matriciales de Riccati pueden ser reemplazadas por las ecuaciones algebraicas de Riccati correspondientes.

Dualidad entre observabilidad (LQE) y controlabilidad (LQR) y Separabilidad

- Observe la similaridad entre las dos ecuaciones diferenciales matriciales de Riccati, la primera "fluyendo" hacia adelante en el tiempo, mientras la segunda corriendo hacia atrás en el tiempo. Esta similaridad es llamada *dualidad*. La primera ARE resuelve el problema LQE (linear-quadratic estimation). La segunda ecuación resuelve el problema LQR (linear-quadratic regulator). Estos problemas son duales el uno del otro y juntos resuelven el problema de control LQG (linear-quadratic-Gaussian). Es decir, el LQG resuelve en forma separada e independiente un LQE y un LQR, y por lo tanto, se dice que el LQG es un problema *separable*.

LQG de tiempo discreto y horizonte finito

Considere el sistema lineal dinámico de tiempo discreto con perturbaciones e incertidumbre en el estado:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = C_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{w}_{k+1} \quad (6)$$

donde k representa el instante de muestre, $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_k$ representan los procesos de ruido blanco Gaussiano con matrices de covarianza V_k, W_k, respectivamente.

La función de costo a ser minimizada en un horizonte finito $k \in [0, N]$ es:

$$J = \mathbb{E}\left({\mathbf{x}^T}_N F \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}_k^T Q_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T R_k \mathbf{u}_k \right)$$

con

$$F \geq 0, \quad Q_i \geq 0, \quad R_i > 0.$$

LQG de tiempo discreto y horizonte finito

El controlador LQG de tiempo discreto es:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= A_k\hat{\mathbf{x}}_k + B_k\mathbf{u}_k + K_k\left(\mathbf{y}_k - C_k\hat{\mathbf{x}}_k\right), \hat{\mathbf{x}}_0 = E(\mathbf{x}_0),\\ \mathbf{u}_k &= -L_k\hat{\mathbf{x}}_k.\end{aligned}$$

La ganancia de Kalman está dada por,

$$K_k = A_k P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + W_k)^{-1},$$

donde P_k se determina de acuerdo a la siguiente ecuación de diferencias matricial de Riccati corriendo hacia adelante en el tiempo:

$$P_{k+1} = A_k\left(P_k - P_k C_k^T\left(C_k P_k C_k^T + W_k\right)^{-1} C_k P_k\right) A_k' + V_k,$$

con condición inicial

$$P_0 = \mathbb{E}\left(\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T\right).$$

LQG de tiempo discreto y horizonte finito

La ganancia de realimentación se calcula según:

$$L_k = (B_k^T S_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} A_k,$$

donde S_k se determina de acuerdo a la siguiente ecuación de diferencias matricial de Riccati corriendo hacia atrás en el tiempo:

$$S_k = A_k^T \left(S_{k+1} - S_{k+1} B_k \left(B_k^T S_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} B_k^T S_{k+1} \right) A_k + Q_k,$$

con condición final

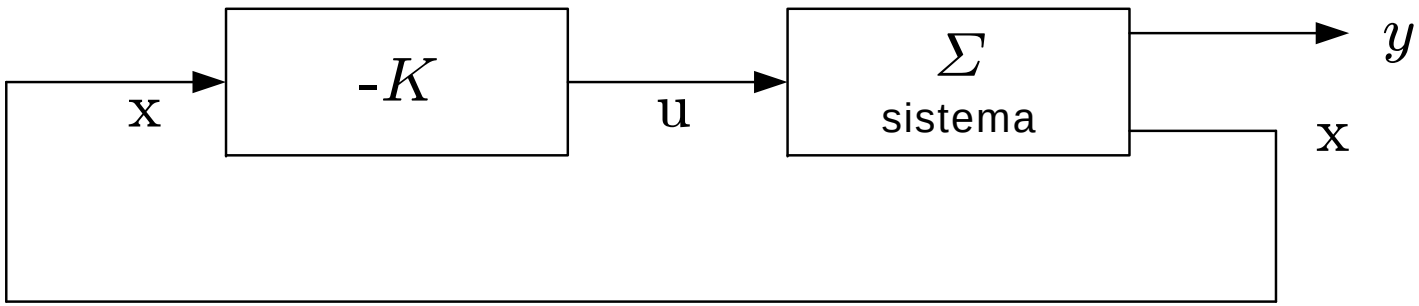
$$S_N = F.$$

LQG de tiempo discreto y horizonte infinito

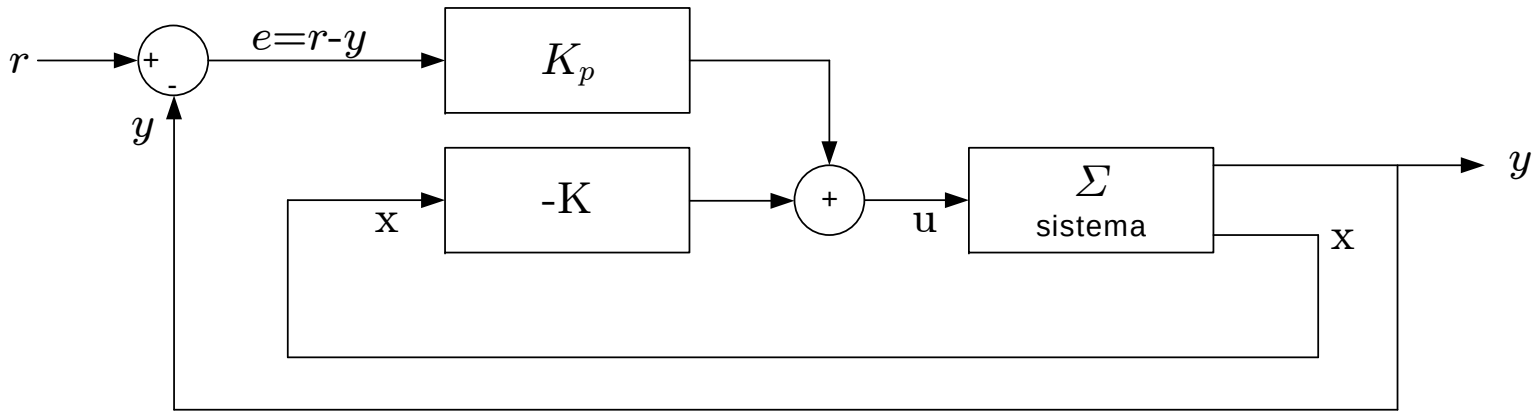
Si todas las matrices de la formulación del problema son invariantes y si el horizonte de tiempo N tiende a infinito, entonces el LQG de tiempo discreto se convierte invariante en el tiempo. En este caso, las ecuaciones de diferencias matriciales de Riccati se reemplazan por las ecuaciones algebraicas matriciales de tiempo-discreto de Riccati. Estas determinarán el LQE de tiempo invariante y el LQR de tiempo invariante en tiempo discreto.

Además en el caso $N \to \infty$, también es necesario considerar una función de costo $J_\infty = J/N$ en vez de la original J para mantener el costo finito.

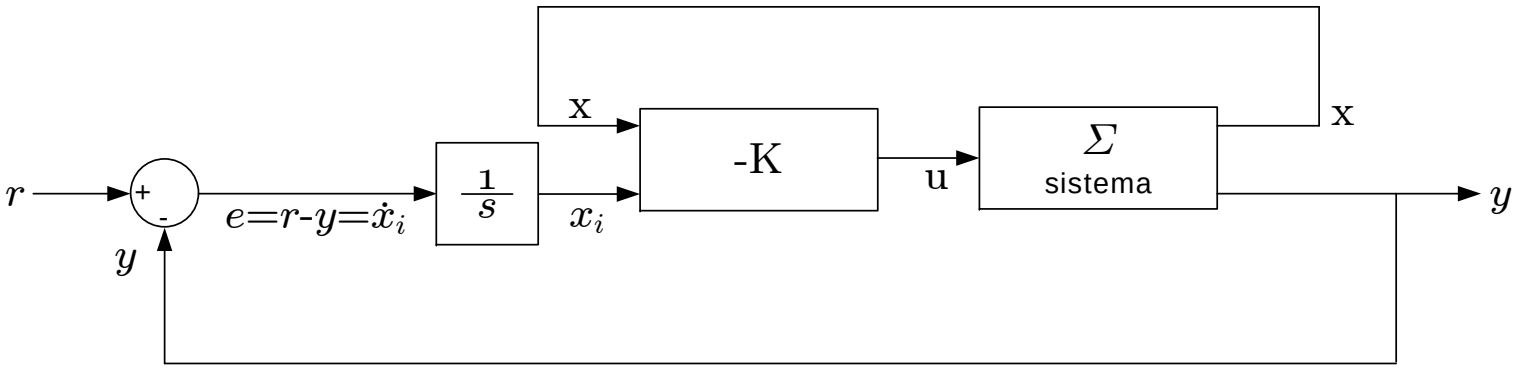
LQR



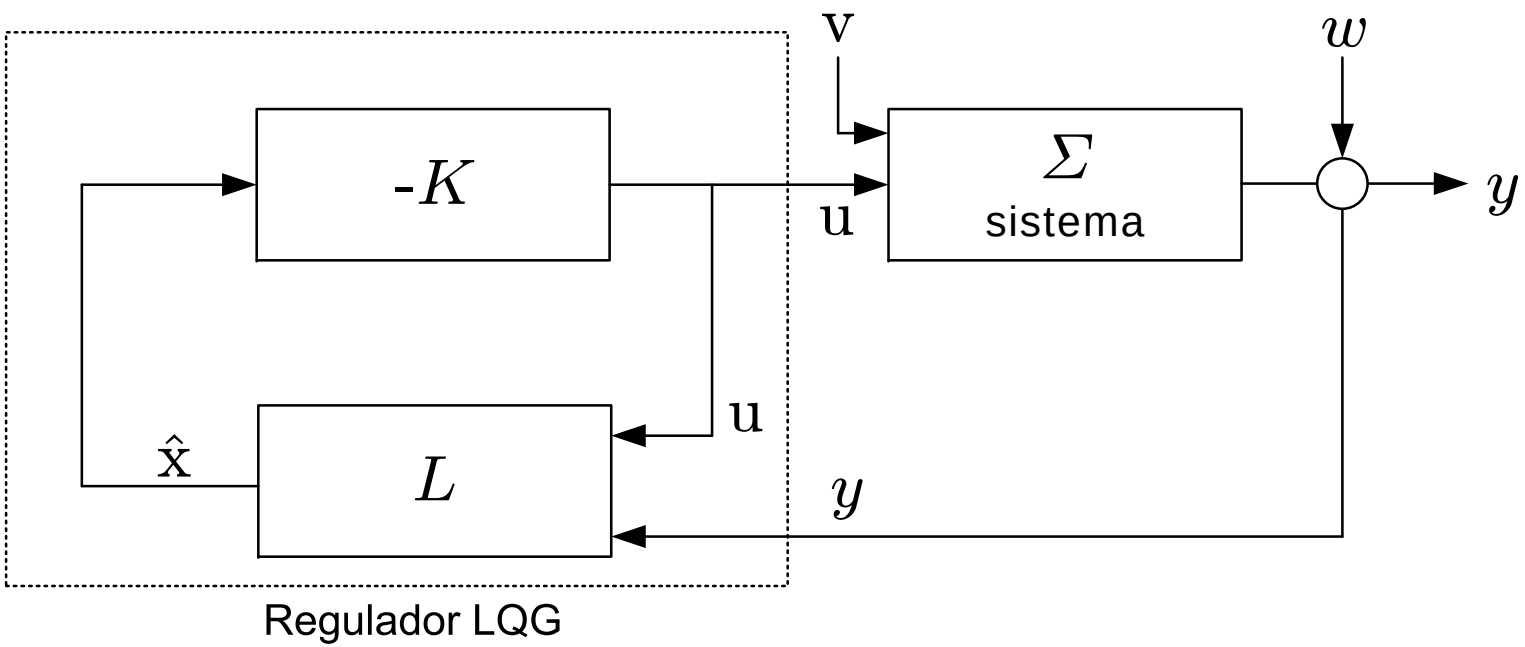
LQR con Referencia



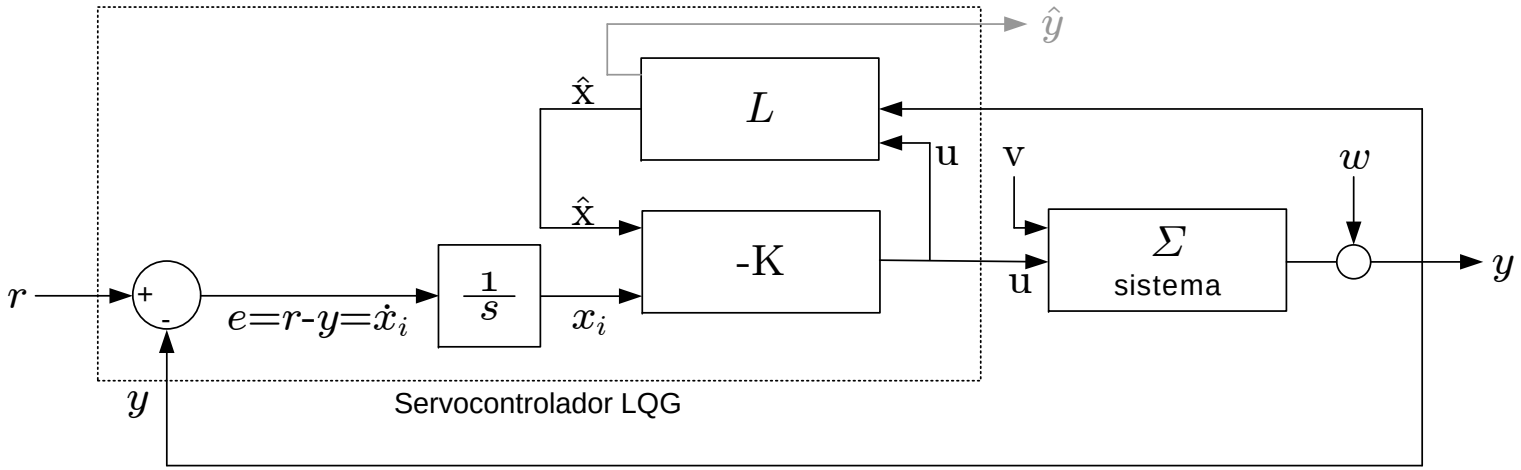
LQI (linear quadratic integrator)



LQG



LQG tracking servocontroller (LQE+LQI)



LQI

Se extiende el vector de estado con un estado auxiliar:

$$x_i = \int e dt \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{x}_i = e = r - y$$

de modo que el estado aumentado es:

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{bmatrix}$$

y el sistema aumentado es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_a &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \\ \mathbf{y}_a &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_a \end{aligned}$$

con $\mathbf{u}_a = [\mathbf{u}^T \ r^T]^T$.

como

$$\dot{x}_i = r - y = r - \mathbf{Cx} - \mathbf{Du}$$

las matrices del sistema aumentado están dadas por

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ -\mathbf{D} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

LQI

Sin embargo, en la práctica r es una perturbación al sistema (r no es una variable manipulada por el controlador sino por el usuario), por lo tanto, el sistema aumentado que se desea estabilizar asume que la minimización de J se realiza con $r = 0$ (u otro valor fijo cualquiera, y por ser fijo no importa), lo cual equivale a resolver el problema LQR con un sistema aumentado que no tiene r por input, es decir con $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}$, y matrices

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{D}_a = \mathbf{D}.$$

LQI

Las matrices aumentadas de costos en este caso son

$$\mathbf{Q}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times n} & \frac{1}{e_{max}^2} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{R}.$$

donde $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ son la matrices de penalización utilizadas en el LQR estándar, el cual se resuelve en Matlab o Python con

$$[K_a, S_a, e_a] = \texttt{lqr}(A_a, B_a, Q_a, R_a)$$

para obtener la ganancia de controlador para el sistema aumentado.

LQI

El término e_{max} corresponde al máximo error esperado entre la referencia y la salida y del sistema.

El término $\frac{1}{e_{max}^2}$ penaliza el estado

$$x_i = \int e dt.$$

La elección del factor de penalización $\frac{1}{e_{max}^2}$ solo constituye un buen punto de partida. En la práctica deben verificarse otros valores, aunque también debe cuidarse de no reducirlo demasiado porque puede enfatizar demasiado la acción integral y los *overshoots* que típicamente esta conlleva.

LQI

Mientras que si se hubiese considerado la referencia y $\mathbf{u}_a = [\mathbf{u}^T \ r^T]^T$, entonces se habrían requerido matrices

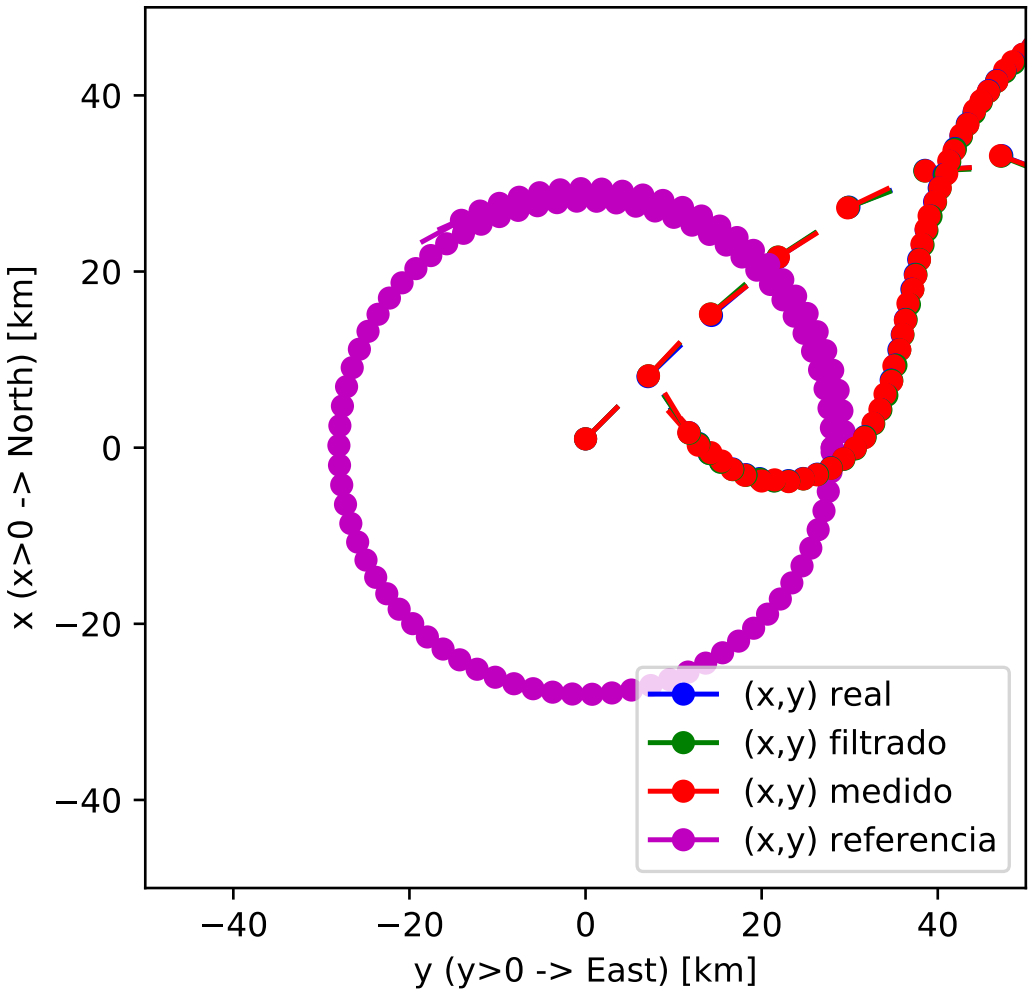
$$\mathbf{Q}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times n} & \frac{1}{e_{max}^2} \end{bmatrix}$$

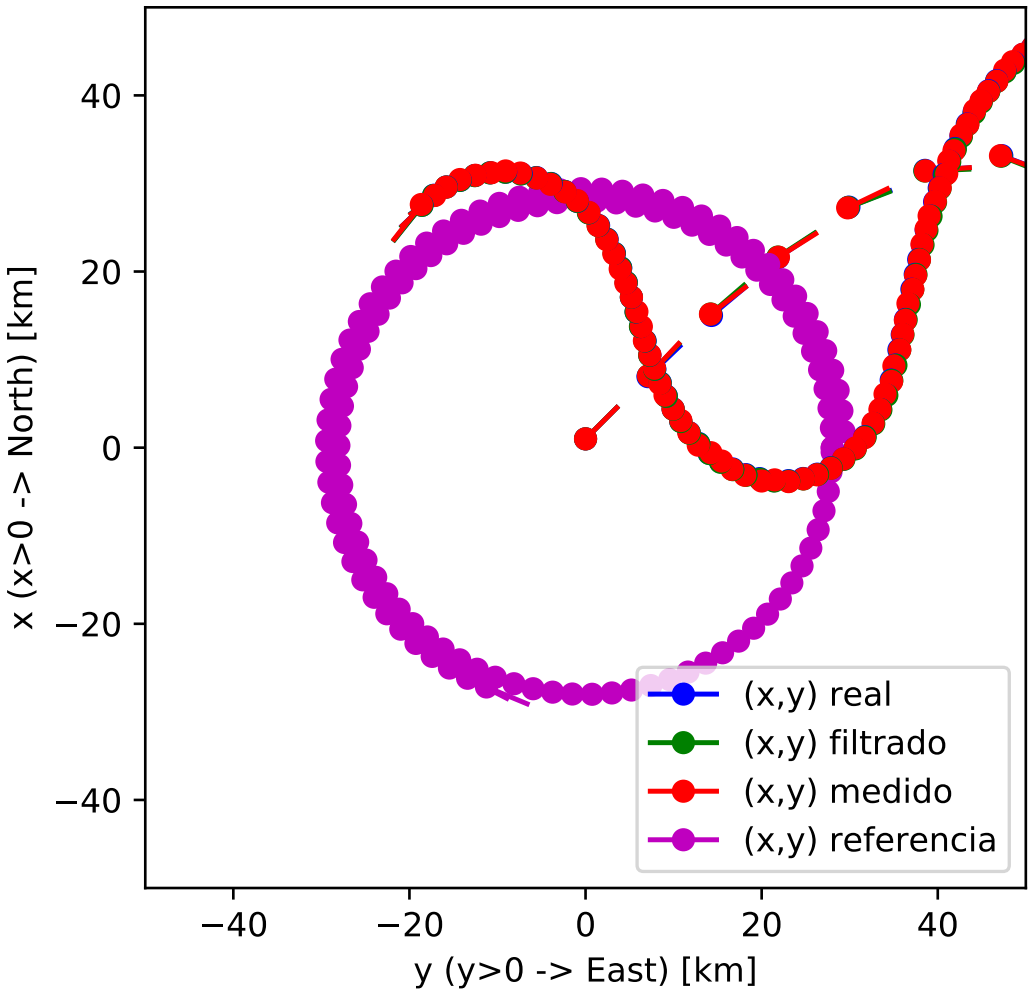
y

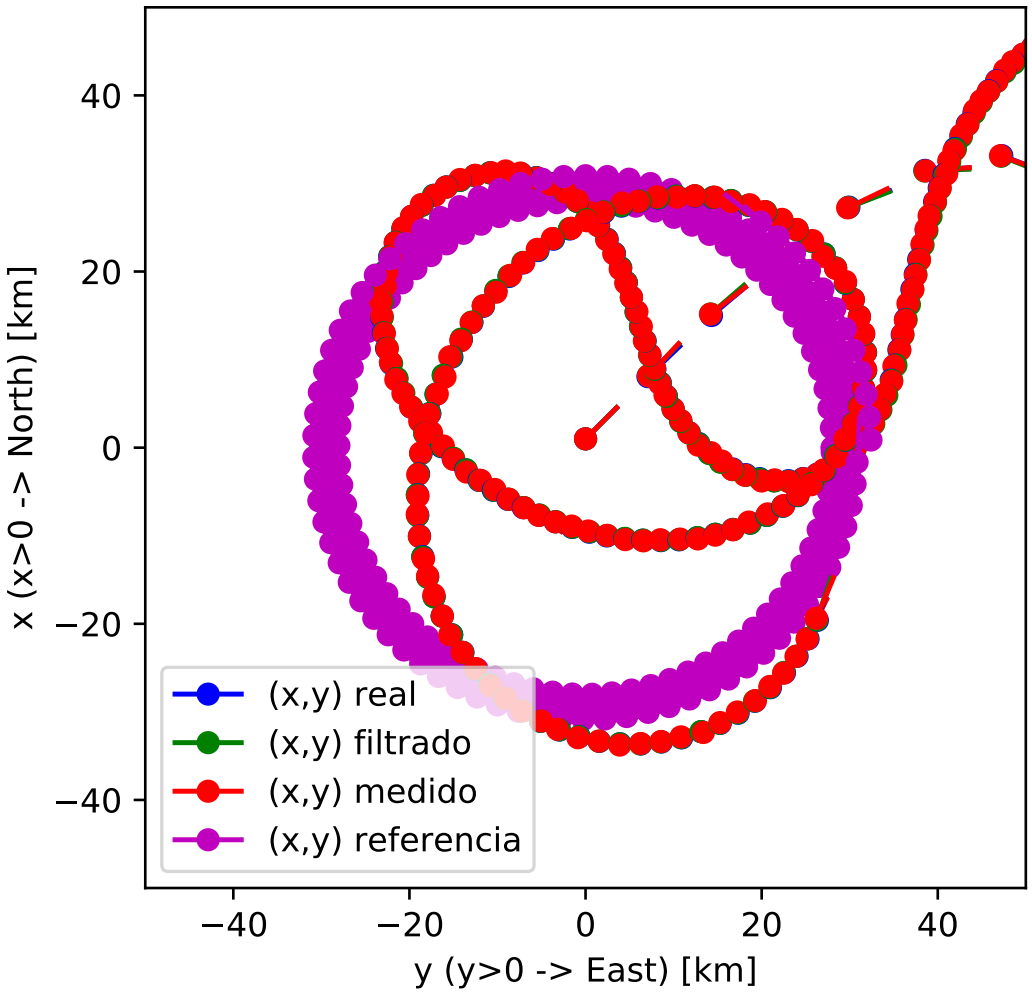
$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{p\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times p} & \frac{\infty}{r_{max}^2} \end{bmatrix}.$$

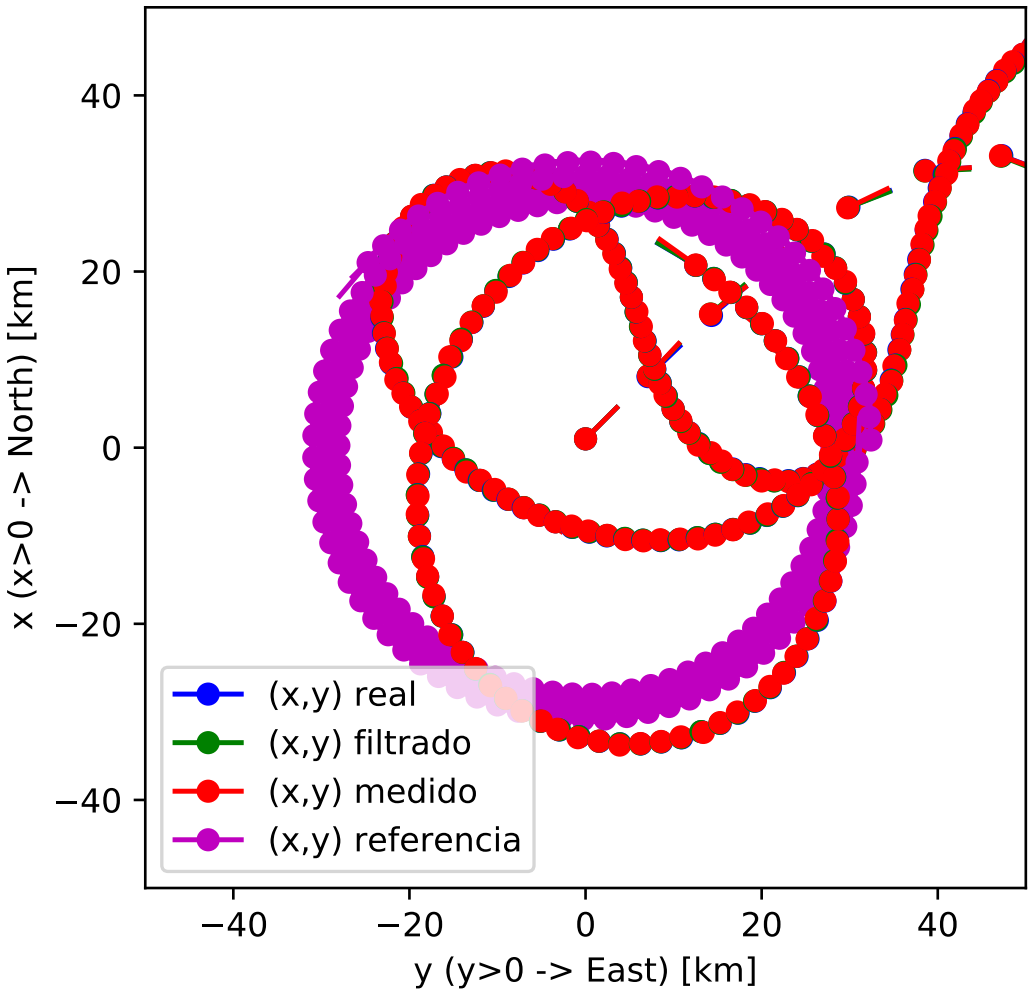
El término r_{max} corresponde a la máxima referencia esperada.

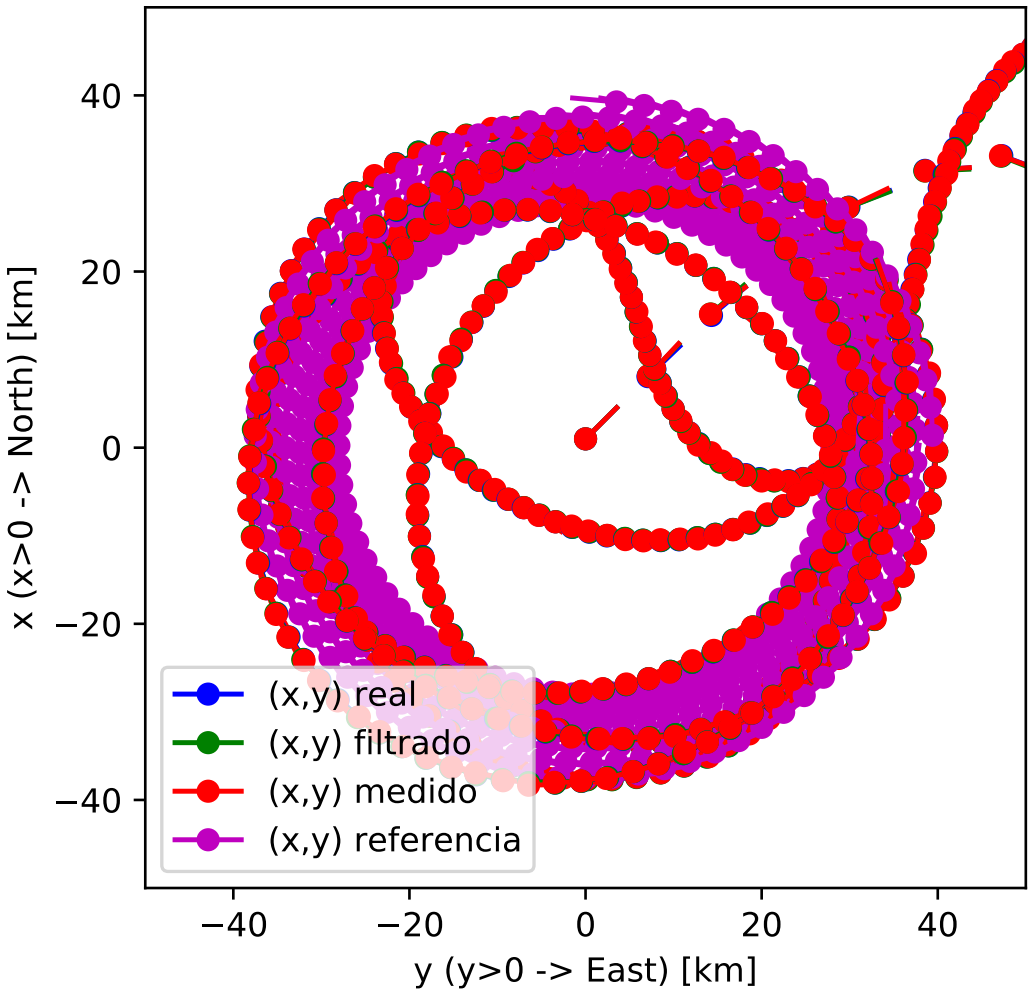
Nótese que en este caso, el término inferior derecho de la matriz $\mathbf{R}_a$ aparece como ∞, porque como r no puede usarse en la realidad como variable manipulada por el controlador, la formulación del LQR debe ser tal que penalice fuertemente cualquier intento de usar r!

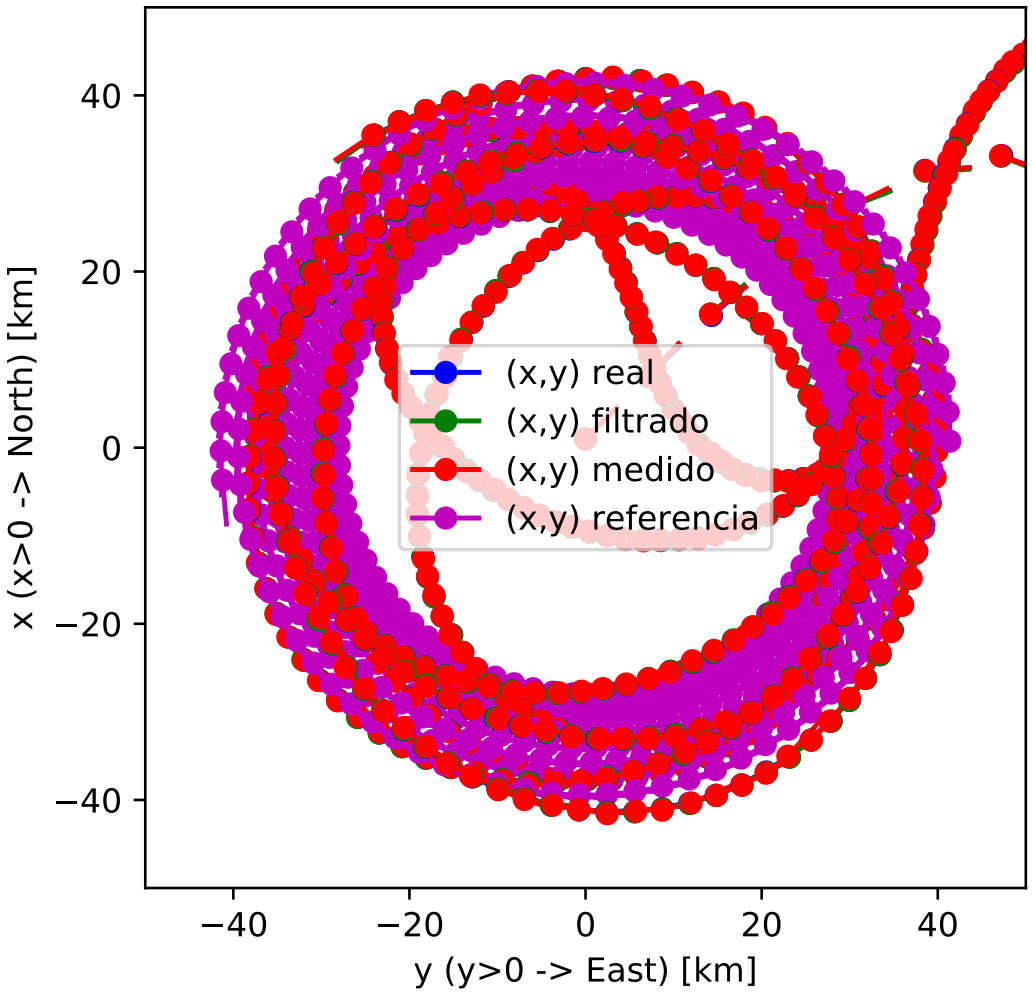

40
20
0
−20
−40
x (x>0 -> North) [km]
−40
−20
0
20
40
y (y>0 -> East) [km]
(x,y) real
(x,y) filtrado
(x,y) medido
(x,y) referencia


40
20
0
−20
−40
x (x>0 -> North) [km]
−40
−20
0
20
40
y (y>0 -> East) [km]
(x,y) real
(x,y) filtrado
(x,y) medido
(x,y) referencia


40
20
0
−20
−40
x (x>0 -> North) [km]
−40
−20
0
20
40
y (y>0 -> East) [km]
(x,y) real
(x,y) filtrado
(x,y) medido
(x,y) referencia

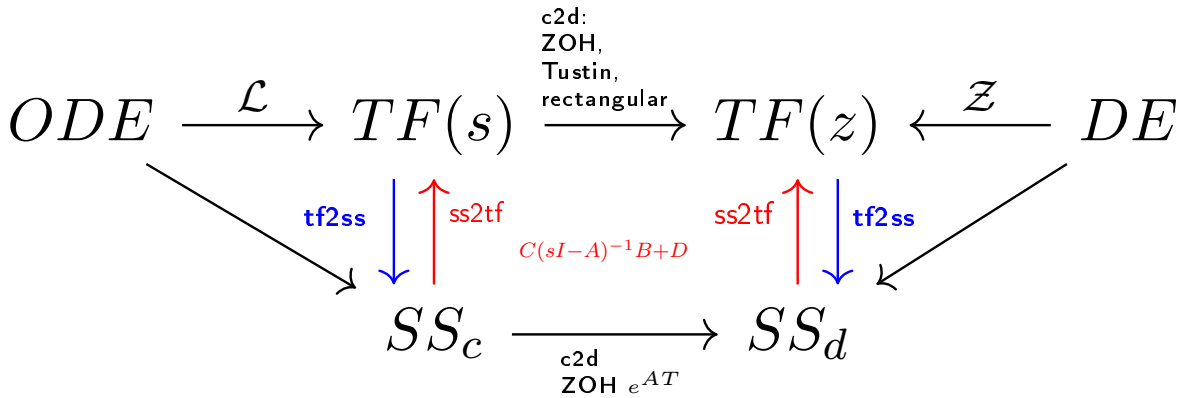

40
20
0
−20
−40
x (x>0 -> North) [km]
−40
−20
0
20
40
y (y>0 -> East) [km]
(x,y) real
(x,y) filtrado
(x,y) medido
(x,y) referencia


40
20
0
−20
−40
x (x>0 -> North) [km]
−40
−20
0
20
40
y (y>0 -> East) [km]
(x,y) real
(x,y) filtrado
(x,y) medido
(x,y) referencia

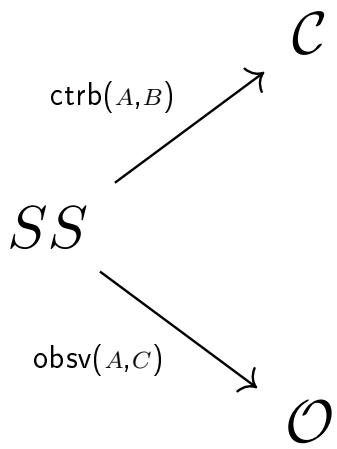

40
20
0
−20
−40
x (x>0 -> North) [km]
−40
−20
0
20
40
y (y>0 -> East) [km]
(x,y) real
(x,y) filtrado
(x,y) medido
(x,y) referencia

Lista de chequeo para diseño de controles automáticos

1. Modelar



2. Verificar la controlabilidad y observabilidad



3. Caracterizar la respuesta del sistema en lazo abierto: típicamente respuesta al escalón en lazo abierto (*step testing*).

Lista de chequeo para diseño de controles automáticos

4. Diseñar el controlador
    1. Definir estructura: PID, PPFSF, LQR, LQG, LQI
    2. Sintonizar el controlador
        1. Analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado: Routh-Hurwitz, LGR, Nyquist, Bode.
        2. Calcular márgenes de ganancia y fase: Diagramas de Nyquist, Bode o Nichols.
        3. Caso control PID pueden servir los métodos de Ziegler-Nichols de lazo abiertoo lazo cerrado.
5. Simular y evaluar desempeño del controlador en lazo cerrado.