Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 1

23 de Agosto 2024

Ayudante - martin.valencia@uc.cl

Problema 1

Un sistema está descrito por el siguiente modelo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y^3(t) - \alpha y(t) = 2u(t)$$

Determine el modelo linealizado en torno al punto de operación (u_Q, y_Q).

Solución:

Una opción es hacerlo con variables de estado. Sea $x = y$, entonces

$$\dot{x} = -x^3 + \alpha x + 2u =: f(x,u)$$
$$y = x =: g(x,u)$$

Sea $\Delta x := x - x_Q$, $\Delta u = u - u_Q$ y $\Delta y := y - y_Q = y - x_Q$, entonces el sistema linealizado viene dado por

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$
$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$$

Donde cada una de las matrices corresponde a lo siguiente

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_Q,u_Q)} = \left.(-3x^2 + \alpha)\right|_{(x_Q,y_Q)} = -3x_Q^2 + \alpha$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_Q,u_Q)} = 2$$

$$C = 1$$
$$D = 0$$

Nota: En general, cuando el modelo descrito por una ecuación diferencial con la variable y, esto suele significar que el estado del sistema se está midiendo directamente. Es por esto la función $y = g(x, u) = x$, la función que modela el sensor captura directamente a x!

Problema 2

Un sistema está descrito por el modelo

$$\frac{dy(t)}{dt} + |y(t)| = u$$

1. Determine los puntos de operación del sistema para $u_Q = 2$
2. Obtenga el modelo linealizado alrededor de los puntos de equilibrio obtenidos anteriormente

Solución:

Pregunta 1

Los puntos de operación se obtienen resolviendo $\dot{y} = 0$. Con ello se llega a:

$$|y_Q| = u_Q = 2$$

Debido al valor absoluto, esta ecuación tiene dos soluciones: $y_! = \{-2, 2\}$. Por lo tanto, los puntos de equilibrio son los siguientes pares:

$$(u_Q, y_Q) = \begin{cases} (2, -2) \\ (2, 2) \end{cases}$$

Pregunta 2

Para obtener el modelo linealizado, se define el estado $x = y$, con lo que se obtiene el siguiente modelo:

$$\dot{x} = f(x, u) = -|x| + u$$
$$y = g(x, u) = x$$

Luego, para obtener el modelo linealizado es necesario trabajar con las derivadas. Dado a que la función valor absoluto presenta un cambio en la pendiente, se debe tener cuidado a

la hora de evaluar las derivadas en los puntos de operación. Su comportamiento se ilustra en la figura 1

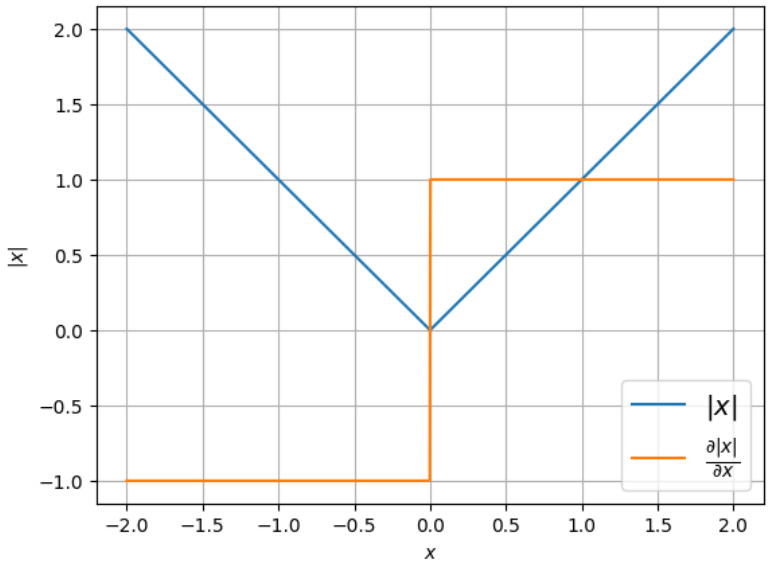


Figura 1: Valor absoluto y su derivada

Con el cual, obtenemos el modelo linealizado utilizando $\Delta x := x - x_Q$, $\Delta u = u - u_Q$ y $\Delta y := y - y_Q = y - x_Q$ para cada uno de los puntos de operación:

- $u_Q = 2, x_Q = -2$: El modelo puede ser escrito como

$$\dot{x} = x + u$$
$$y = x$$

  Por lo que linealizando se llega a:

$$\Delta\dot{x} = \Delta x + \Delta u$$
$$\Delta y = \Delta x$$

- $u_Q = 2, x_Q = 2$: El modelo puede ser escrito como

$$\dot{x} = -x + u$$
$$y = x$$

  Por lo que linealizando se llega a:

$$\Delta\dot{x} = -\Delta x + \Delta u$$
$$\Delta y = \Delta x$$

Problema 3

En el esquema de control en lazo abierto de la figura, $G_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$ con $a > 0$. Diseñe un controlador en lazo abierto que permita tener $y(t) = r(t)$ en estado estacionario para referencias constantes.

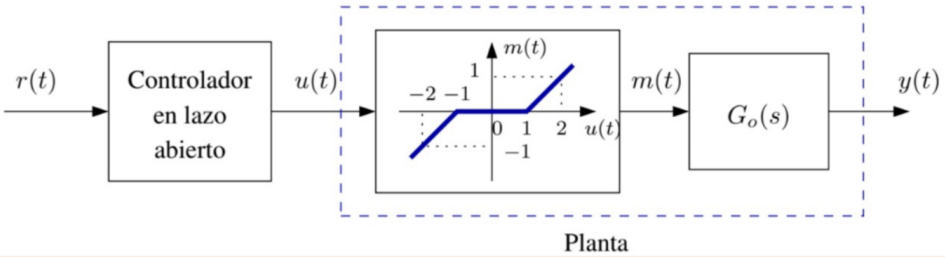


Figura 2: Sistema problema 3

Solución:

El bloque previo a $G_o(s)$ se trata de una no linealidad llamado comúnmente como "zona muerta":

$$m(t) = f(u(t)) = \begin{cases} u(t) - 1 & , u(t) > 1 \\ 0 & , -1 < u(t) < 1 \\ u(t) + 1 & , u(t) < -1 \end{cases}$$

Podemos invertir la zona muerta con la siguiente función:

$$u(t) = f^{-1}\left(u_1(t)\right) = \begin{cases} u_1(t) + 1, & u(t) > 0 \\ u_1(t) - 1, & u(t) < 0 \end{cases}$$

De esta forma $m(t) = f(u(t)) = f(f^{-1}(u_1(t))) = u_1(t)$. Hasta el momento, el controlador de lazo abierto tendrá la forma:

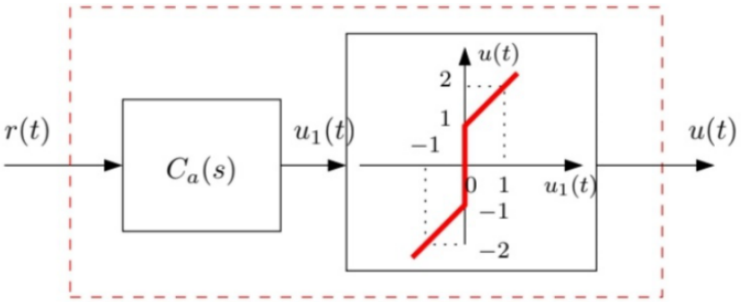


Figura 3: Sistema con primer bloque

Falta diseñar $C_a(s)$. Dado que queremos $y = r$ en estado estacionario para referencias constantes, basta que escojamos:

$$C_a(s) = a^2$$

Ya que con esta elección:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a^2}{(s+a)^2} \Rightarrow Y(j0) = R(j0)$$

Con lo que se obtiene un seguimiento perfecto en estado estacionario ($\omega = 0$).