Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 2

Laplace y sistemas de primer orden

30 de Agosto 2024

Ayudante - Manuel San Francisco (msf@uc.cl)

Problema 1

Considere el siguiente sistema LTI

$$\dot{y} + 2y = 4u$$

1. Determine y(t) para todo $t \geq 0$, con $u(t) = 1 \quad \forall\, t \geq 0$ y condición inicial $y(0) = -0.5$

> **Solución:**
>
> Usando Laplace, la ecuación queda como lo siguiente:
>
> $$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 4U(s)$$
> $$Y(s) = \frac{4}{s+2}U(s) + \frac{y(0)}{s+2}$$
>
> Donde el término rojo corresponde a la respuesta forzada, mientras que el verde es la respuesta homogénea. Dado que $u(t)$ corresponde al escalón, la transformada de Laplace corresponde a $U(s) = \frac{1}{s}$, por lo que queda como sigue:
>
> $$Y(s) = \frac{4}{s(s+2)}U(s) + \frac{y(0)}{s+2}$$
> $$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{y(0)}{s+2}$$
>
> Luego con la condición inicial $y(0) = -0.5$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} - \frac{0.5}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2.5}{s+2}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$y(t) = 2 - 2.5e^{-2t}$$

2. Grafique $y(t)$

Solución:

La gráfica se ve como lo siguiente:

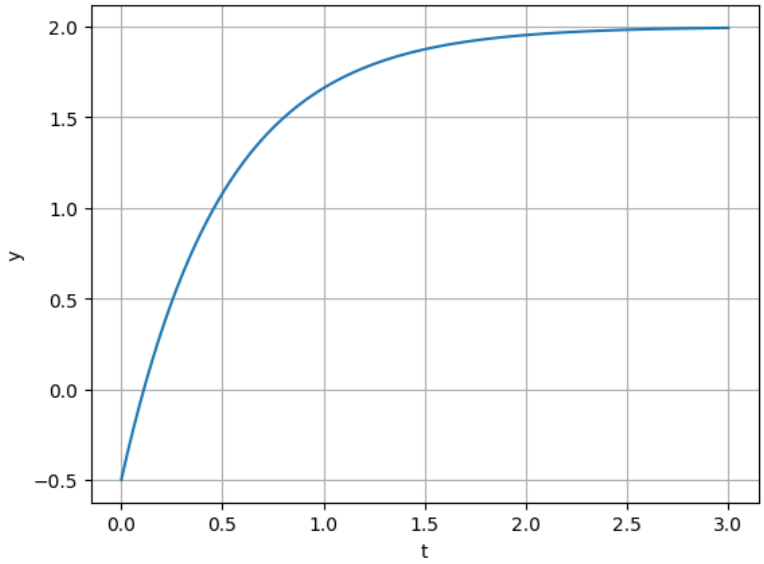


Figura 1: Señal $y(t)$

3. Verifique que $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = 2$ usando el teorema del valor final.

Solución:

El teorema de valor final establece que:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Por lo que queda:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} s\frac{2}{s} - s\frac{2.5}{s+2}$$
$$y_\infty = 2$$

Pregunta 2

Considere el siguiente sistema:

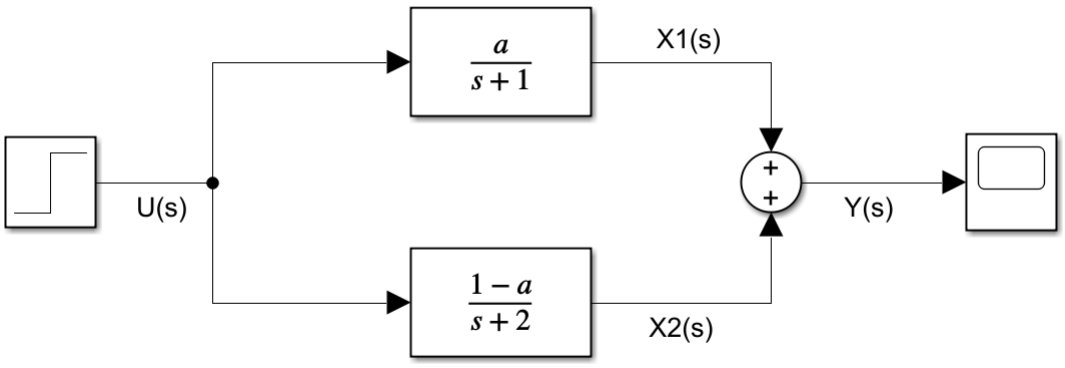


Figura 2: Sistema a estudiar

1. Determine la función de transferencia del sistema con estrada $U(s)$ y salida $Y(s)$.

Solución:

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$
$$Y(s) = \frac{a}{s+1}U(s) + \frac{1-a}{s+2}U(s)$$
$$Y(s) = \frac{a(s+2)+(1-a)(s+1)}{(s+1)(s+2)}U(s)$$
$$Y(s) = \frac{s+1+a}{(s+1)(s+2)}U(s)$$

Con esta formulación, la función de transferencia corresponde a:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1+a}{(s+1)(s+2)}$$

2. Determine sus polos y ceros.

Solución:

Los polos del sistema son:

$$p_1 = -1 \ , \ p_2 = -2$$

Mientras que los ceros son:

$$z_1 = -1 - a$$

3. Calcule la respuesta al impulso del sistema

Solución:

La respuesta al impulso del sistema está dada por la inversa de Laplace de la función de transferencia. Esto es fácil ver ya que si $u(t) = \delta(t)$, $U(s) = 1$, por lo que quedaría:

$$Y(s) = \frac{s + 1 + a}{(s + 1)(s + 2)}$$

Por lo que la respuesta al impulso es:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 1 + a}{(s + 1)(s + 2)}\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{(s + 1)} + \frac{1 - a}{s + 2}\right\}$$

$$y(t) = ae^{-t} + (1 - a)e^{-2t} \quad \forall \ t \geq 0$$

4. Analice que pasa para a pequeño. Tome por ejemplo 0.1.

Solución:

Al reemplazar en la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s + 1.1}{(s + 1)(s + 2)}$$

De lo cual se obtiene la siguiente respuesta al impulso

$$y(t) = 0.1e^{-t} + 0.9e^{-2t}$$

Como se observa, el término asociado al polo $s = -1$ casi desaparece. Esto da a entender el efecto de la cancelación de polos y ceros en la respuesta temporal, y que en el límite **teóricamente desaparece**.