Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 3

Respuesta temporal de segundo orden

6 de Agosto 2024

Vicente Fernández Rojas - vichofernandezr1@uc.cl

Problema 1

Considere una planta con el siguiente modelo:

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}(s-1)}{s^2+s+1}$$

Haga un gráfico lo más detallado posible y cualitativamente correcta de la respuesta del sistema ante un escalón unitario en $t = 0$, con condiciones iniciales igual a cero.

Solución:

Identificamos ciertas características de la planta:

- Retardo: $t_d = 0.5$
- Polos: $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$ Como la parte real es $-\frac{1}{2}$, la constante de tiempo es $\tau = 2$
- Ganancia a continua: $G(0) = -1$
- Cero de fase no mínima: $s = 1$ Existe undershoot denotado por M_u
- Periodo de respuestas de segundo orden: $T = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}/2} \approx 7.22$

Con esta información, se construye un gráfico similar al siguiente:

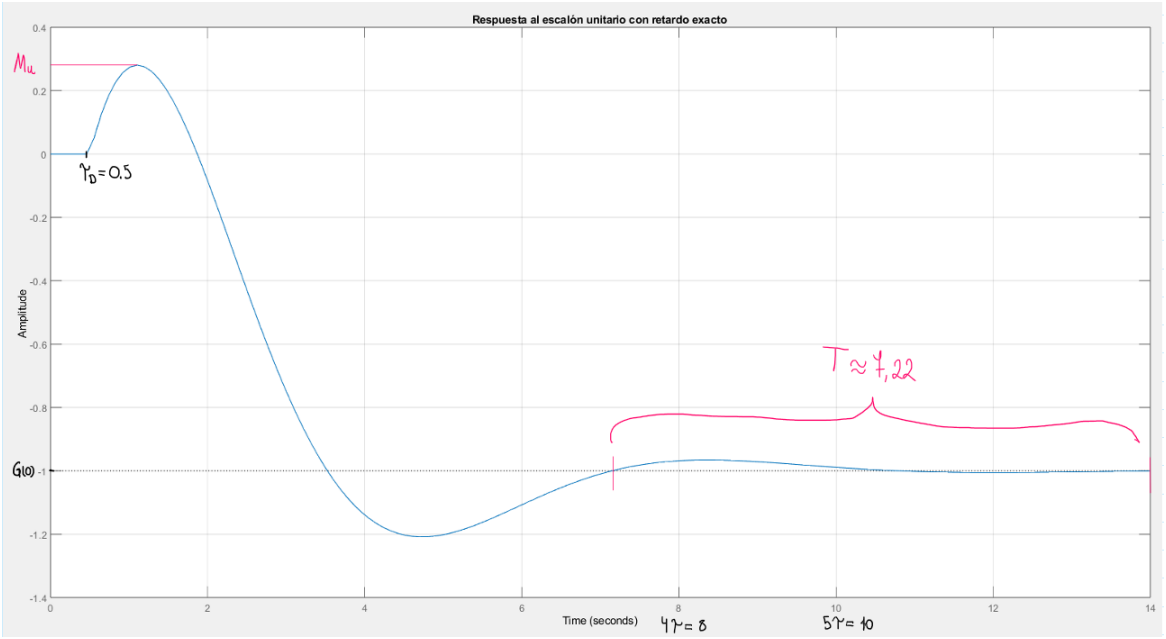


Figura 1: Respuesta real del sistema

Pregunta 2

La respuesta de una planta a un escalón unitario en $t = 0$ se muestra en la figura:

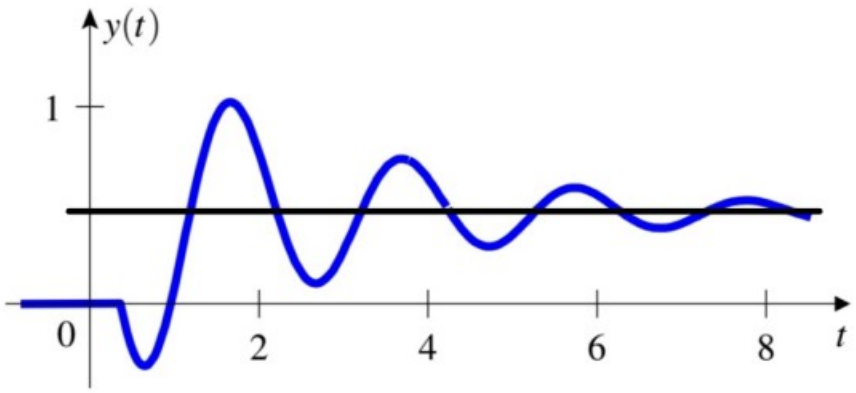


Figura 2: Respuesta de la planta ante un escalón

Haga un gráfico aproximado pero cualitativamente correcto de la salida de la planta en un esquema de control en **lazo abierto** diseñado para:

1. Una respuesta rápida
2. Buen seguimiento a constantes iguales a 1
3. Actuación limitada $|u(t)| < 2$

Solución:

Debido al undershoot, la planta tiene un cero de fase no mínima. Por las oscilaciones y el retardo inicial, se puede concluir que se trata de un sistema de segundo orden con retardo de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{K(-s+c)}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} e^{-s\tau_d}$$

Un control en lazo abierto debe ser **estable** y **realizable**, por lo que no ivertiremos los ceros de fase no mínima ni tampoco podemos invertir el retardo. Lo que sí podemos invertir son los polos complejos y la ganancia continua:

$$C(s) = \frac{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}{Kc(\tau s + 1)^2}$$

Notar que los dos polos (τs+1) vuelven al controlador realizable, es decir, implementable. Así:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s)C(s) = \frac{-s+c}{c(\tau s+1)^2} e^{-s\tau_d}$$

Con esto se logra que en estado estacionario $G(0)C(0) = 1$. Recordar que no se puede evitar el retardo ni el undershoot. Falta satisfacer que $|u(t)| < 2$. Recordar que la actuación u corresponde a la salida del controlador $C(s)$, por lo que por el teorema del valor final:

$$u_\infty = C(0) = \frac{1}{G(0)}$$

Donde gráficamente $G(0) = g(\infty) = 0.5$, por lo que quedaría:

$$u_\infty = \frac{1}{0.5} = 2$$

Luego, por el teorema del valor inicial:

$$u_{0^+} = C(\infty) = \frac{1}{Kc\tau^2} < 2$$

$$\tau > \frac{1}{\sqrt{2Kc}}$$

Así, la respuesta al escalón unitario se verá como lo siguiente:

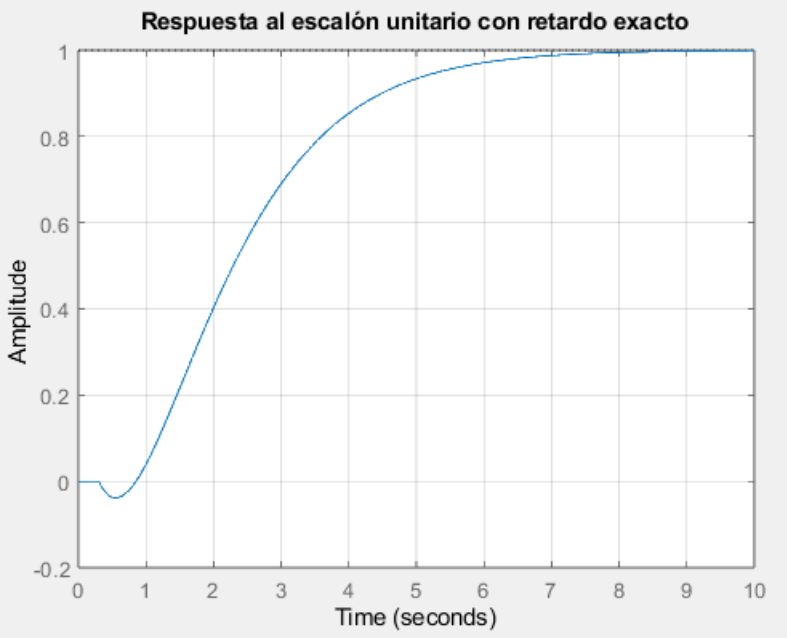


Figura 3: Respuesta con controlador