Tema: Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

◁ *Guía de Ejercicios # 14* ▷

1. En la figura 1 se muestra un diagrama de bloques de un servomotor DC con control proporcional y derivativo $K(s) = K_p + K_d s$.

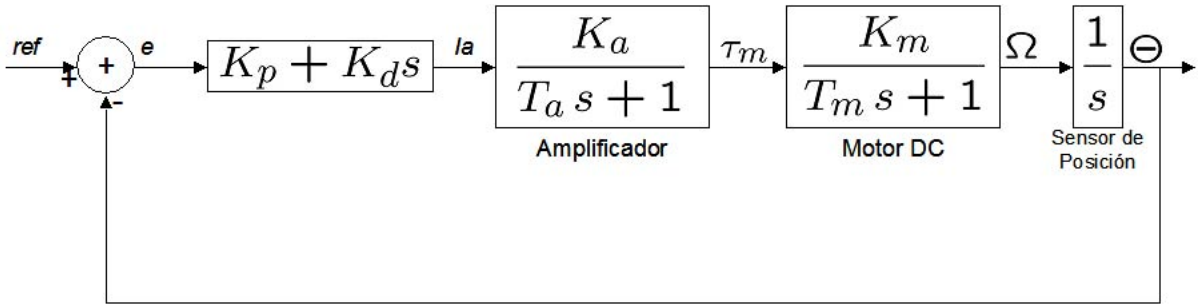


Figura 1: Modelo de un servomotor con control PD (proporcional-derivativo).

(a) Empleando el criterio de R-H encuentre las condiciones que K_p y K_d deben cumplir para que el sistema sea estable.

La función de transferencia del lazo cerrado está dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{K_a K_m (K_p + K_d s)}{s(T_a s+1)(T_m s+1)}}{1 + \frac{K_a K_m (K_p + K_d s)}{s(T_a s+1)(T_m s+1)}} \\ &= \frac{K_a K_m (K_p + K_d s)}{s(T_a s + 1)(T_m s + 1) + K_a K_m (K_p + K_d s)}\end{aligned}$$

La ecuación característica se puede re-escribir como:

$$\bar{q}(s) = T_m T_a s^3 + (T_m + Ta) s^2 + (1 + K_a K_m K_d) s + K_a K_m K_p$$

Sean $a = T_m T_a$, $b = T_m + T_a$, $c = 1 + K_a K_m K_d$ y $d = K_a K_m K_p$, la tabla de R-H se puede construir como:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & a & c \\ s^2 & b & d \\ s^1 & \frac{bc-ad}{b} & 0 \\ s^0 & d & \end{array}$$

Por lo tanto,

$$d > 0 \Rightarrow K_p > 0$$

y

$$bc - ad > 0 \Rightarrow c > ad/b$$

es decir

$$K_a K_m K_d + 1 > \frac{T_a T_m K_a K_m K_p}{T_m + T_a}$$

de donde se tienen que:

$$K_d > \frac{1}{K_m K_a} \left(\frac{T_a T_m K_a K_m K_p}{(T_m + T_a)} - 1 \right)$$

(b) ¿Qué ocurre si el control es puramente derivativo, es decir si $K_p = 0$ y $K_d > 0$?
Si $K_p = 0$, luego $c > 0$, es decir:

$$\begin{aligned} 1 + K_a K_m K_d &> 0 \\ K_d &> -\frac{1}{K_a K_m} \end{aligned}$$

Sin embargo, este resultado no garantiza la estabilidad, porque no se puede aplicar el Criterio de R-H! *Para aplicar el Criterio de R-H, se requiere que todos los coeficientes de la ecuación característica sean estrictamente positivos*.

Por otro lado, es fácil ver que con $K_p = 0$, la ecuación característica tendría un polo en cero. Por lo tanto el sistema se vuelve críticamente estable con control puramente derivativo.

2. Considere un sistema realimentado cuya ecuación característica está dada por:

(a) $q(s) = s^3 + 3408.3s^2 + 1204000s + 1.5 \times 10^7 K$ Determine el rango de K para que el sistema sea estable:

s^3	1	1204000
s^2	3408.3	$1.5 \times 10^7 K$
s^1	$\frac{410.36 \times 10^7 K}{3408.3}$	
s^0	$1.5 \times 10^7 K$	

Para que el sistema sea estable debe cumplirse que:
(1)

$$\begin{aligned} \frac{410.36 \times 10^7 K}{3408.3} &> 0 \\ 410.36 \times 10^7 K &> 0 \\ \Rightarrow K &< 273.57 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 1.5 \times 10^7 K &> 0 \\ \Rightarrow K &< 0 \end{aligned}$$

Finalmente el intersectar las soluciones:

$$0 < K < 273.57$$

$\Rightarrow$ Obsevar que sucede para $K = 273.57$

(b) $q(s) = s^3 + 3Ks + (K+2)s + 4$ Determine el rango de K para que el sistema sea estable:

s^3	1	$k + z$
s^2	$3K$	4
s^1	$\frac{3K(K+2)-4}{3K}$	0
s^0	4	

Debe cumplirse que:
(1)

$$\begin{aligned} 3K &> 0 \\ \Rightarrow K &> 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{3K(K+2)-4}{3K} &> 0 \\ 3K^2+6K-4 &> 0 \\ \Rightarrow K &> 0.527 \\ \Rightarrow K &> -2.528 \end{aligned}$$

Intersecando las soluciones:

$$K > 0.527$$

3. Determine si el sistema es estable. Considere un sistema realimentado cuya ecuación característica está dada por:

(a) $q(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & \frac{(1)(3)-(2)(5)}{1} = -7 & \frac{(1)(10)-(2)(0)}{1} = 10 \\ s^1 & \frac{(-7)(5)-(1)(10)}{(-7)} & 0 \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

Existen 2 cambios de signo, por lo tanto el sistema es inestable. $\Rightarrow$ Destacar que los coeficientes son positivos y no son nulos.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 0 & 3K & \end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{(1)(2)-(1)(2)}{(1)} = 0$$
$$b_{n-2} = \frac{(3)(1)-(1)(0)}{(1)} = 3$$

(b) $q(s) = s^4+s^3+2s^2+2s+3$
Se reemplaza el valor cero por $\xi \to 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & \xi & 3 \\ s^1 & \frac{2\xi-3}{\xi} & 0 \\ s^0 & 3 & 0 \end{array}$$

Existen 2 cambios de signo, luego el sistema es inestable.

(c) $q(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 8 & 7 \\ s^4 & 4 & 8 & 4 \\ s^3 & 6 & 6 & 0 \\ s^2 & 4 & 4 & \\ s^1 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$c_{n-1} = \frac{(6)(4)-(6)(4)}{(4)} = 0$$
$$c_{n-3} = \frac{(6)(0)-(4)(0)}{(4)} = 0$$

La filas de s^1 hace necesaria la ecuación auxiliar, usando los coeficienes de la fila superior.

$$\Rightarrow A(s) = 4s^2 + 4$$
$$\frac{dA(s)}{ds} = 8s + 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc} s^1 & 8 & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

No existen cambios de signo, por lo tanto el sistema es estable
$\Rightarrow$ Destacar:

$$4s^2 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow s = \pm j$$

El sistema es finalmente estable y es provocó la fila de ceros en el coeficiente de s^1.

Anexo: Recordatorio tabla de Routh-Hurwitz

Criterio de Routh-Hurwitz

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{p(s)}{q(s)} \\ q(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$

Condiciones necesarias pero no suficientes:

- Coeficientes de igual signo
- Coeficientes distintos de cero

$\Rightarrow$ Se necesita saber la posición de los polos:

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & & & & \end{array}$$

Donde:

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \qquad c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$