Capítulo 7 – Métodos de Respuesta en Frecuencia – Estabilidad en el Dominio de la Frecuencia –

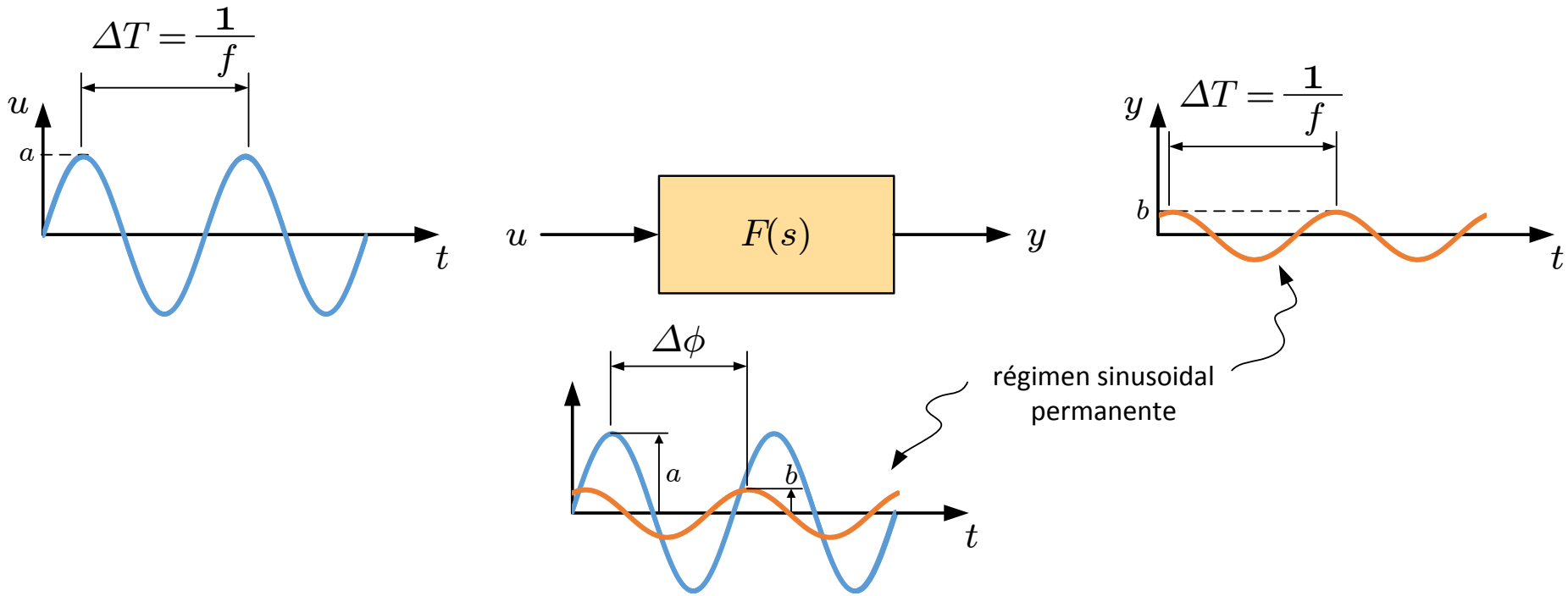
Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Métodos de respuesta en frecuencia

Respuesta en frecuencia: Cuantifica la respuesta en régimen permanente de un sistema a una señal sinusoidal de entrada a distintas frecuencias.



Para una frecuencia determinada ($\omega = 2\pi f = 2\pi/\Delta T$), los valores de $\frac{b(\omega)}{a(\omega)}$ y $\Delta\phi(\omega)$ caracterizan la respuesta en frecuencia del sistema.

Métodos de respuesta en frecuencia

- Los matemáticos Routh (1876, UK) & Hurwitz (1895, Hannover) independientemente desarrollaron un método equivalente para determinar si las partes reales de las raíces de un polimonio son negativas.
- El ingeniero eléctrico Evans (1948, USA) desarrolla un método para determinar gráficamente el lugar geométrico de las raíces de las eucación característica.
- Las raíces están directamente relacionadas a la respuesta en el dominio del tiempo. Sin embargo, las raíces también están relacionadas a la respuesta en frecuencia.
- Los ingenieros eléctricos Nyquist (1932, USA) y Bode (1940, USA) establecieron los criterios que determinan la estabilidad de un sistema a partir de las características de respuesta en frecuencia, siendo Nyquist el primero en reconocer la conexión entre la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia (caracterizable por su función de transferencia) y las raíces del la ecuación de transferencia (también obtenidas de la función de transferencia).

Métodos de respuesta en frecuencia



Harry Theodor Nyqvist
February 7, 1889 (Stora Kil, Nilsby, Värmland, Sweden) –
April 4, 1976 (Harlingen, Texas)



Hendrik Wade Bode
December 24, 1905 (Madison, Wisconsin) – June 21, 1982 (Cambridge, Massachusetts)

- Harry Nyquist. Regeneration Theory. *Bell System Technical Journal*, v. 11 (1): 126–147, USA, January, 1932.
- Hendrik Wade Bode. Relations Between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design. *Bell System Technical Journal*, v. 19, USA, 1940.

Harry Nyquist (1889-1976)



Harry Theodor Nyqvist

February 7, 1889 (Stora Kil, Nilsby, Värmland, Sweden) – April 4, 1976 (Harlingen, Texas)

- Desarrollo de telegrafía, fax y TV.
- Estabilidad de amplificadores y sistemas realimentados.
- Trabajo en el estudio del ruido térmico (Johnson-Nyquist).

B.Sc.Elec. 1914, M.Elec.Eng. 1915 Univ. North Dakota

Ph.D. (Physics) 1917 Yale

AT&T Bell Labs 1917-1954

Hendrik Bode (1905-1982)



Hendrik Wade Bode

24 Diciembre 1905, Madison, Wisconsin
– 21 Junio 1982 Cambridge, Massachusetts

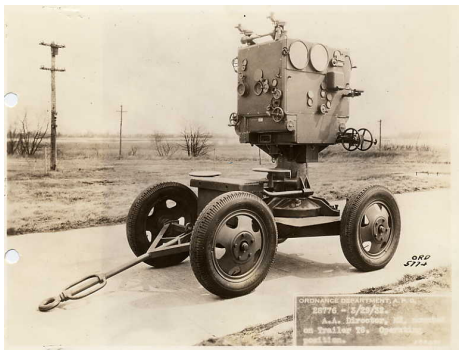
B.A. 1924, M.A. 1926 Ohio State Univ.

Ph.D. (Physics) 1935 Columbia Univ.

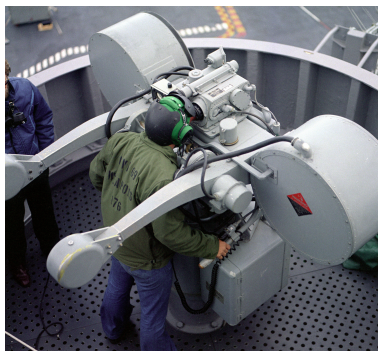
Bell Labs 1927-1967

Harvard Univ. 1967-1974 (1982)

- 25 patentes (filtros y fire control systems).
- Contratado por Bell Labs, NY, para diseñar filtros electrónicos y equalizadores.
- Responsable del control Director T-15 (sistema automático anti-aéreo) durante WWII. Problemas para "derivar el ruido", introduce esquema digital.



Director T6 – M2



Mark 115 – Sea Sparrow

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

1. Encuentre la función de transferencia en el dominio de Fourier de un sistema LTI cuya entrada es periódica.
2. Encuentra la respuesta en el dominio de Fourier.

Solución:

De la defenición de sistema LTI:

$$\left[s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i\right] y(t) \quad = \quad \left[\sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right] u(t), \qquad s \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}$$

Si la señal de entrada es periódica, luego $u(t)$ tiene serie de Fourier:

$$u(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

La solución del sistema a partir de la respuesta al impulso es:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0\tau} d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{jn\omega_0\tau} d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{jn\omega_0(t-\tau)} d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau
\end{aligned}
$$

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

Recordando la definición de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(h) = H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

es posible entonces escribir la respuesta:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

como

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_0) c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

Por lo tanto, la serie de Fourier de la salida:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^y e^{jn\omega_0 t}$$

tiene coeficientes:

$$c_n^y = H(n\omega_0)c_n$$

Conociendo la descripción de Fourier de la entrada, es decir los coeficientes c_n y $H(\omega)$ es posible conocer la descripción de la salida en el dominio de Fourier.

Repaso análisis de señales

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

¿Cuánto vale $H(\omega)$?
Sabemos que:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

y que:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Ambas deben satisfacer:

$$\left[s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \right] y(t) = \left[\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right] u(t), \quad s \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}$$

Repaso análisis de señales

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

Sin perder generalidad, podemos asumir que la señal de entrada es una exponencial compleja, esto significa:

$$u(t) = Ae^{j\omega t}$$

y que:

$$y(t) = H(\omega)Ae^{j\omega t}$$

Las cuales reemplazadas en:

$$\left[s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i\right] y(t) = \left[\sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right] u(t), \quad s \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}$$

resultan en:
Sabemos que:

$$\left[(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (j\omega)^i\right] H(\omega)Ae^{j\omega t} = \left[\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i\right] Ae^{j\omega t}$$

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

Por lo tanto, a partir de

$$\left[(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (j\omega)^i\right] H(\omega) A e^{j\omega t} = \left[\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i\right] A e^{j\omega t}$$

se tiene que:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i}{(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (j\omega)^i}$$

Función de transferencia en el dominio de Fourier de un Sistema LTI con entradas periódicas

Conclusiones importantes:

1. La función

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i}{(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (j\omega)^i}$$

   es la función de transferencia $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ en el dominio de Fourier!!!
2. La salida $y(t)$ tiene descripción en Fourier $\mathcal{F}(y)$ dada por:

$$\mathcal{F}(y) = \{c_n^y\} = \{H(n\omega_0)c_n\}$$

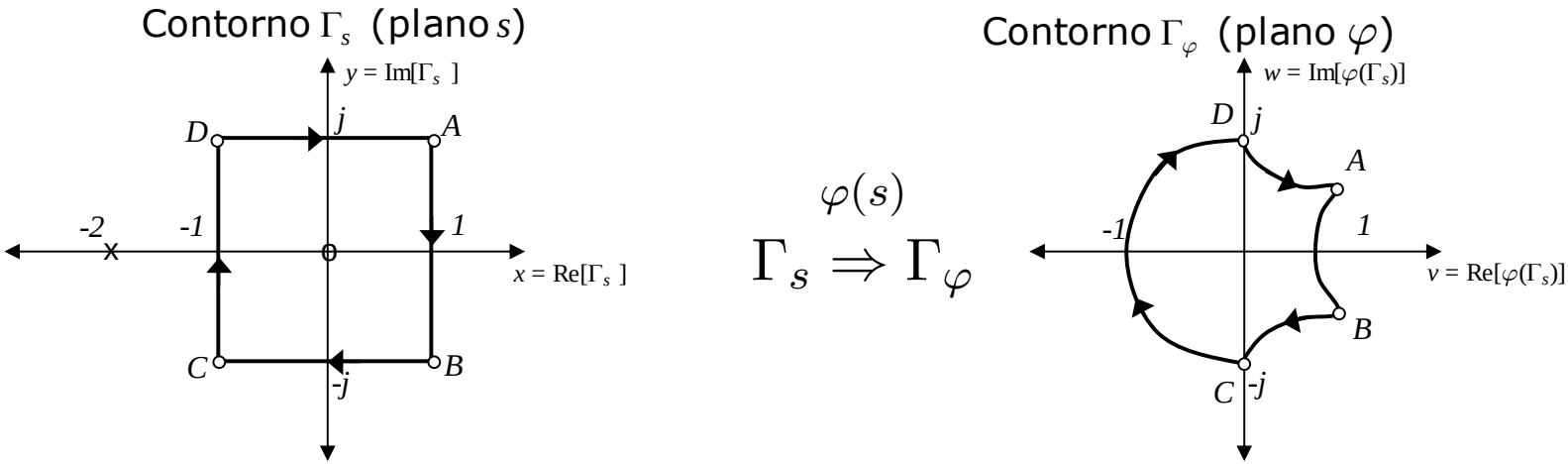
Ver también el libro *Samir S. Soliman y Mandyam D. Srinath, "Continuous and Discrete Signals and Systems", 2da ed., Prentice Hall, 1998.*

Criterio de Estabilidad de Nyquist

- Relaciona la respuesta de frecuencia del sistema en lazo abierto al número de polos en $\mathbb{C}_+ \stackrel{def}{=} \{s \in \mathbb{C} | \text{Re}(s) > 0\}$ del sistema en lazo cerrado.
- Utilidad del criterio de Nyquist:
  1. Permite determinar la estabilidad de sistemas más complejos, por ejemplo, con una o más resonancias, en los que la curva de magnitud cruza varias veces los 0 dB y/o en los que la fase cruza varias veces 180°.
  2. Permite tratar:
     - Sistemas inestables en lazo abierto.
     - Sistemas de fase no-mínima.
     - Sistemas con retardos puros (retardo de transporte, transportation lag).

Transformaciones de Contorno

Por ejemplo, si $\varphi(s) = \dfrac{s}{s+2}$, su transformación de contorno es:



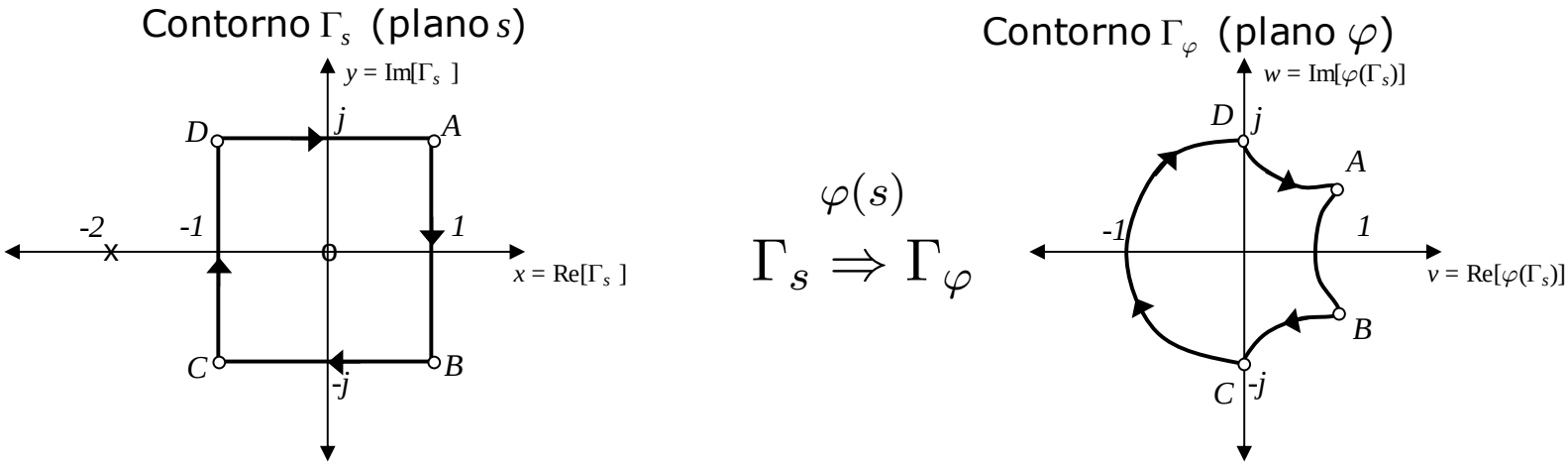
$\varphi : s \in \mathbb{C} \to \varphi(s) \in \mathbb{C}$ es una transformación conforme (*conformal map*).

La función $\varphi(s)$ evaluada en un contorno Γ_s (curva en el plano complejo $\mathbb{C}_s$) genera otra contono Γ_φ (curva en el plano complejo $\mathbb{C}_\varphi$).

Específicamente para el *Principio del Argumento de Cauchy* se requiere que φ sea una función meromorfa en una región R cerrada por un contorno, por ejemplo, una función racional $\varphi(s) = p(s)/q(s)$ de dos polinomios $p(s)$ y $q(s)$ que es analítica salvo en las discontinuidades definidas por las raíces de $q(s)$ (polos de $\varphi(s)$).

Principio del Argumento de Cauchy

Por ejemplo, si $\varphi(s) = \dfrac{s}{s+2}$, su transformación de contorno es:



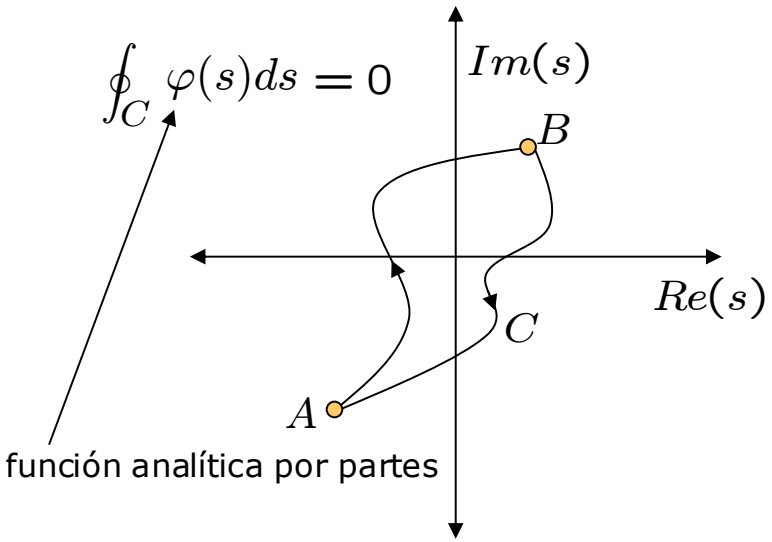
Principio del Argumento de Cauchy

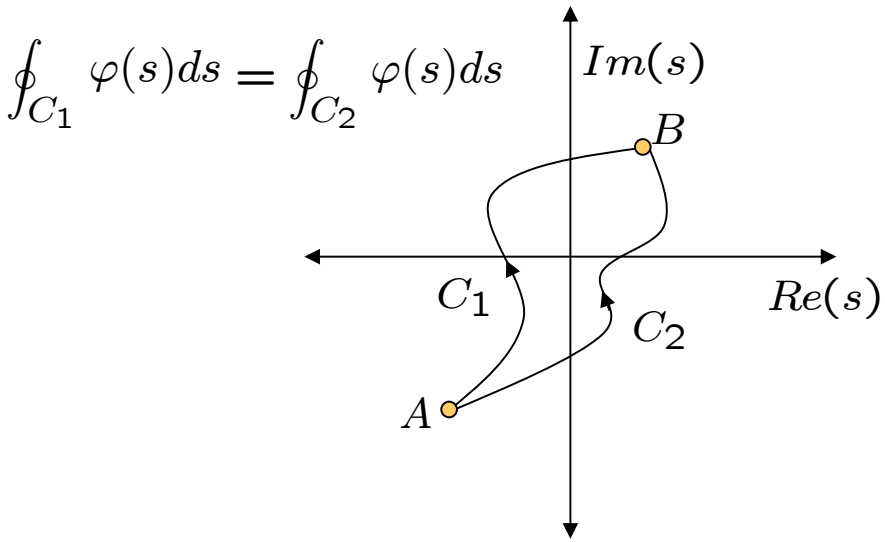
Si un contorno Γ_s en el plano s rodea Z ceros y P polos de $\varphi(s)$ y no pasa a través de ningún polo o cero de $\varphi(s)$ cuando el recorrido es en la dirección del movimiento del reloj a lo largo del contorno Γ_s, el contorno correspondiente Γ_F en el plano $\varphi(s)$ rodea el origen de dicho plano $N = Z - P$ veces en la misma dirección (N es positivo en el sentido de giro de los punteros del reloj).

Derivación del Principio del Argumento

Requiere de un conjunto de resultados de la teoría de variable compleja, entre estos los más importantes son:

1. Teorema (de la Integral) de Cauchy



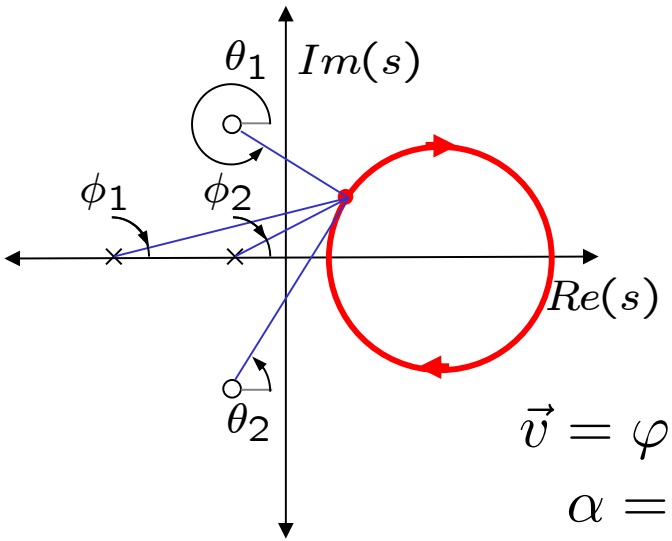


2. Teorema del Residuo de Cauchy $\Rightarrow$ Principio del Argumento

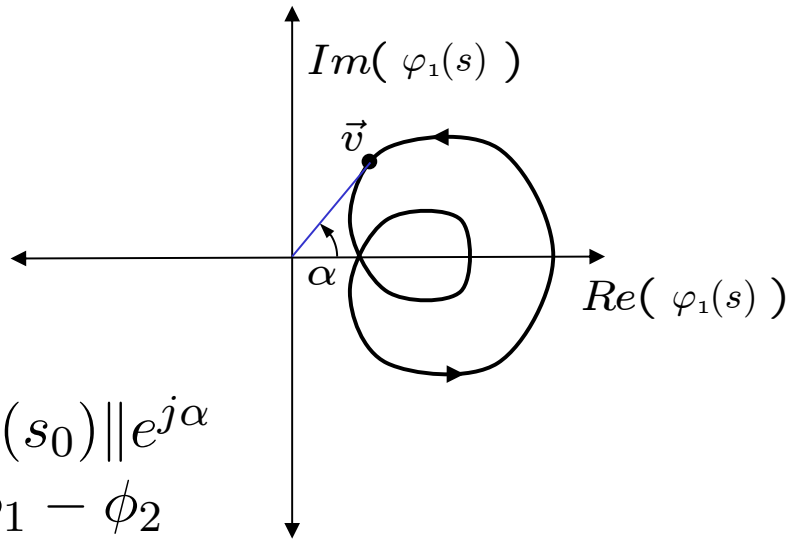
$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \varphi(s)ds = \sum_{i=1}^{l} \text{Res}(\varphi(s); s_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi j}\oint_C d(\ln(\varphi(s)) = N - P$$

donde l es el número de singularidades contenidas por el contorno C.

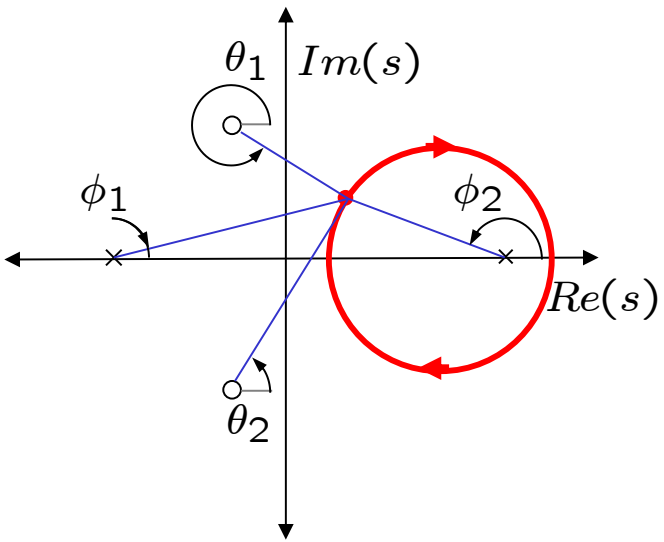
Principio del Argumento y las Singularidades



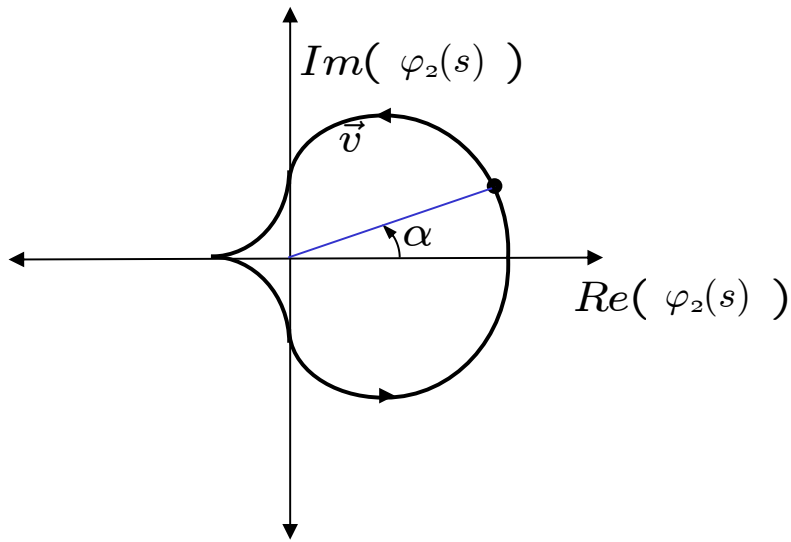
$\varphi_1(s)$
$\Rightarrow$



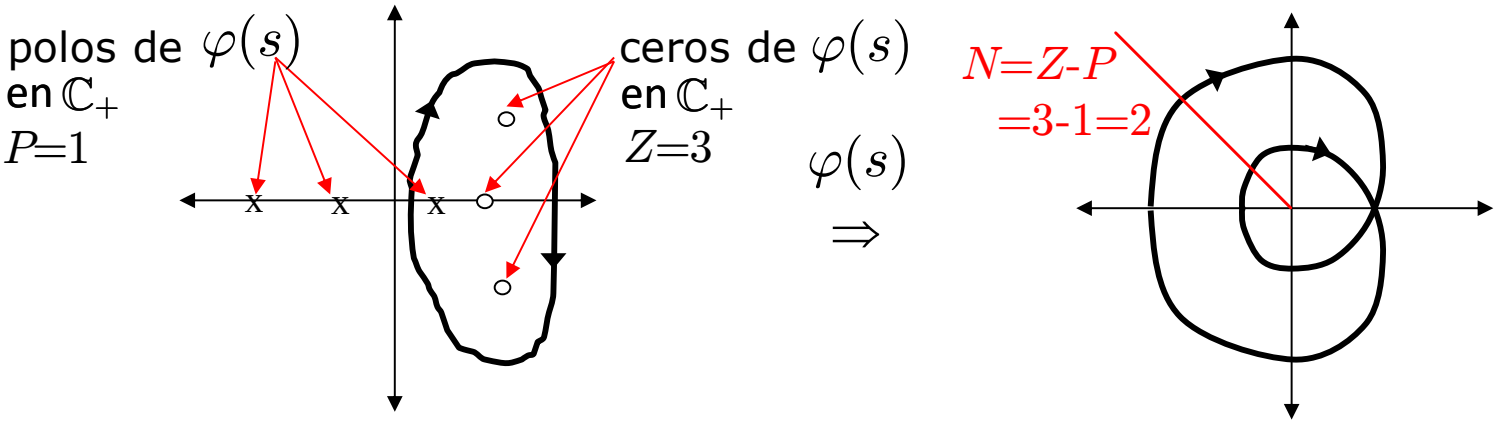
$$\vec{v} = \varphi_1(s_0) = \|\varphi_1(s_0)\| e^{j\alpha}$$
$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2$$



$\varphi_2(s)$
$\Rightarrow$



Ejemplo Sistema Realimentado



Caso sistema realimentado

La función de transformación (no de transferencia) que se utiliza, $\varphi(s) : \Gamma_s \to \Gamma_\varphi$, se define como la ecuación característica de lazo cerrado:

$$\varphi(s) \stackrel{def}{=} \bar{q}(s) \;=\; 1 + KF(s) \;=\; \frac{q(s) + Kp(s)}{q(s)}$$

donde $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ es la planta del sistema en lazo abierto.

Ejemplo Sistema Realimentado

Caso sistema realimentado

- Si el sistema es estable, entonces los ceros de $\varphi(s) \equiv \bar{q}(s)$ estarán a la izquierda del eje $j\omega$.
- Escogiendo un contorno en s que encierre el lado inestable $\mathbb{C}_+$ y aplicando el *Principio del Argumento*, se puede determinar al observar la grafica de $\varphi(s) \equiv \bar{q}(s)$, si hay ceros en semi-plano derecho $\mathbb{C}_+$.
- En otras palabras, se grafica $\Gamma_\varphi \overset{def}{=} \varphi(s)|_{s=\Gamma_s} \equiv \bar{q}(s)|_{s=\Gamma_s}$ a partir del contorno Γ_s en el plano s y se determina el número de rodeos al origen, y por tanto, los ceros inestables de $\varphi(s) \equiv \bar{q}(s)$ (ceros dentro de $\Gamma_s \in \mathbb{C}_+$).
- *Notar que los ceros de $\varphi(s) \equiv \bar{q}(s)$ son las raíces de la ecuación caracterísitca $q(s) + Kp(s)$, mientras que los polos de $\varphi(s) \equiv \bar{q}(s)$ son las raíces $q(s)$, que son los polos del sistema en lazo abierto.*

Ejemplo Sistema Realimentado

Grafica Γ_φ desplazada

- En el análisis anterior existe el problema de determinar cuantos polos y ceros tiene $\varphi(s) \in \mathbb{C}_+$ (ello determinará N). Sin embargo, $\varphi(s)$ no está necesariamente en forma factorizada, por lo que N no se obtiene fácilmente.
- Como solución a lo anterior se define una nueva función:

$$\varphi'(s) \;=\; \varphi(s) - 1 = KF(s),$$

  lo que implica que $\Gamma_{\varphi'} = \Gamma_\varphi - 1$, y la curva Γ_φ desplazada en -1 es igual a la curva $\Gamma_{\varphi'}$.
- Como $\varphi'(s) = KF(s)$ puede estar en forma factorizada $K\frac{\prod_{i=1} m(s-z_i)}{\prod_{j=1} n(s-p_j)}$, se facilita la identificación de P y los cálculos. Sin embargo, al utilizar $\varphi'(s)$ debe tenerse presente que el número de rodeos al origen de la curva Γ_φ en el plano complejo $\varphi(s)$ es igual al número de rodeos al punto $(-1, 0)$ de la curva $\Gamma_{\varphi'}$ en el plano complejo $\varphi'(s)$.
- Por lo anterior, para un contorno Γ_s es más sencillo graficar $\varphi'(s) = KF(s)|_{s=\Gamma_s}$ y contar los giros N entorno a $(-1, 0)$, que graficar $\varphi(s) = 1 + KF(s)|_{s=\Gamma_s}$ y contar los giros entorno a $(0, 0)$.

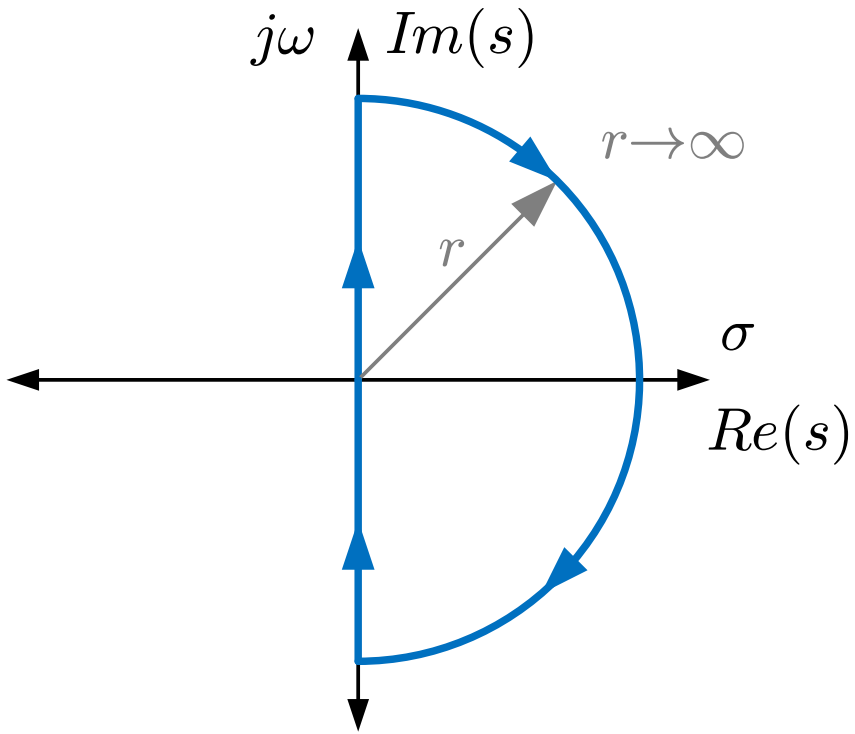
Ejemplo Sistema Realimentado

¡Atención!

- ¡Recuerde *siempre* que la función de transformación de contornos $\varphi(s)$ para sistemas realimentados se construye a partir de la ecuación característica de lazo cerrado $\bar{q}(s)$!
- Tenga presente que algunos textos de sistemas de control utilizan la notación $F(s)$ o $H(s)$ para referirse a la transformación de contorno, en vez de $\varphi(s)$. La notación $F(s)$ se presta fácilmente para confusión porque daría a entender que la transformación de contorno $\varphi(s)$ es la función de transferencia de lazo abierto $F(s)$, cuando realidad corresponde a la ecuación caracterítica de lazo cerrado. Es decir, $\varphi(s)$ es $1 + KF(s)$ no es $KF(s)$. Aún cuando grafiquemos $\varphi'(s) = KF(s)$ y para esto usemos la función de transferencia de lazo abierto $F(s)$, la gráfica $\varphi'(s) = KF(s)$ nos entrega información sobre $1 + KF(s)$ si consideramos que la curva $\Gamma_{\varphi'}$ es idéntica a la curva Γ_{φ} desplazada a lo largo del eje real a la ubicación $(-1, 0)$.

$\Gamma_s \stackrel{def}{=}$ Contorno "D" de Nyquist

La curva $\Gamma_s \in \mathbb{C}_+$ se define a partir del Contorno "D" de Nyquist.



Criterio de Nyquist

Un sistema con retroalimentación negativa es estable, *si y sólo si*, el contorno Γ_{KF} en el plano complejo $KF(s)$, rodea al punto $(-1, 0)$ en el sentido contrario al horario tantas veces como polos con partes positivas tenga $F(s)$.
Como Z debe ser 0 y $Z = N + P = 0$, entonces si $P = n_p$ (distinto de 0), se requiere $N = -n_p$ para la estabilidad.

Recuerde que Z representa el número de ceros de $\varphi(s) = 1 + KF(s) = \frac{q(s)+Kp(s)}{q(s)}$, es decir las raíces de la ecuación caracterísitca $q(s) + Kp(s)$ del sistema en lazo cerrado que se encuentran en $\mathbb{C}_+$ encerradas por el contoro D de Nyquist, mientras que P es el número de polos en $\mathbb{C}_+$ de $\varphi(s) = 1 + KF(s) = \frac{q(s)+Kp(s)}{q(s)}$, es decir raíces de $q(s)$, los polos del sistema en lazo abierto en $\mathbb{C}_+$.

Procedimiento para realizar el Diagrama de Nyquist

1. Dibuje la curva $G(s) \stackrel{def}{=} KF(s)$ (la respuesta del lazo abierto incluyendo el compensador/controlador) para $s = j\omega$ con $-\infty \leq \omega \leq \infty$.

   Para efectos prácticos:

   - Evalúe $\omega \in [0, \omega_h]$ con ω_h lo suficientemente grande de modo que $\|KF(j\omega)\| \approx 0$ para todo $\omega > \omega_h$.
   - Cuando $F(s)$ tiene polos $s_i = \pm j\omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, E$, sobre el eje imaginario, divida el intervalo $\omega \in [0, \omega_h]$ en tramos $\omega \in [\omega_i + \epsilon, \omega_{i+1} - \epsilon]$, $i = 1, 2, \ldots, E$, con $\omega_0 = 0$, $\omega_{E+1} = \omega_h$. En los polos s_i, evalue $KF(s)$ en $s = s_i + \epsilon e^{j\phi}$, $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   - Luego copie la curva obtenida reflejándola entorno al eje real.

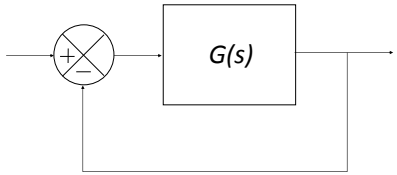
   Note que para cualquier sistema físico, la magnitud de $KF(j\omega)$ será pequeña a frecuencias altas, por eso basta graficar para $\omega \in [0, \omega_h]$. Además el diagrama de Nyquist siempre es simétrico con respecto al eje real!

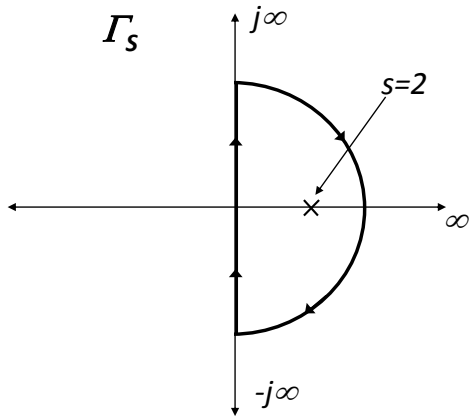
2. Cuente el número de giros en sentido horario de la curva entorno a -1. Este número será N. Para contar el número de giros, dibuje una recta desde -1 hasta infinito en cualquier dirección. Luego cuente cuantas veces la curva $G(s) = KF(s)$ pasa de un lado al otro de la recta. Si los giros son en sentido antihorario, entonces N es negativo.
3. Determine el número P de *polos inestables del lazo abierto* de $F(s)$.
4. Calcule el número Z de *ceros (raíces) inestables de la ecuación caracteríticas del lazo cerrado* como:

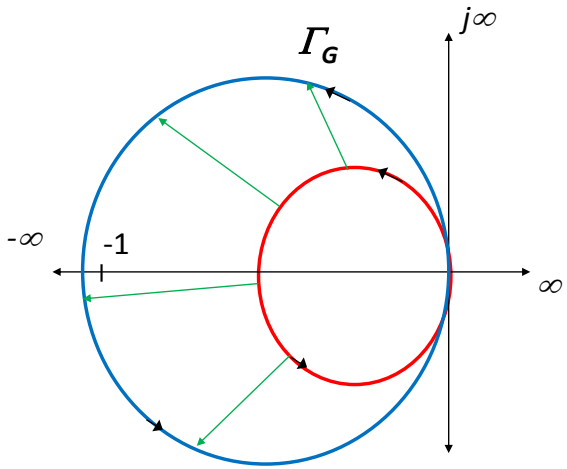
$$\boxed{Z = N + P}$$

Criterio de Estabilidad de Nyquist - Ejemplo 1

$$G(s) = KF(s) = \frac{K}{s-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1+KF(s)}$$



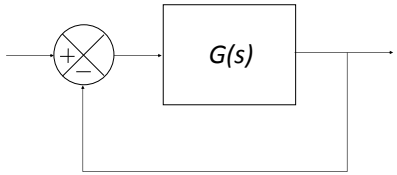


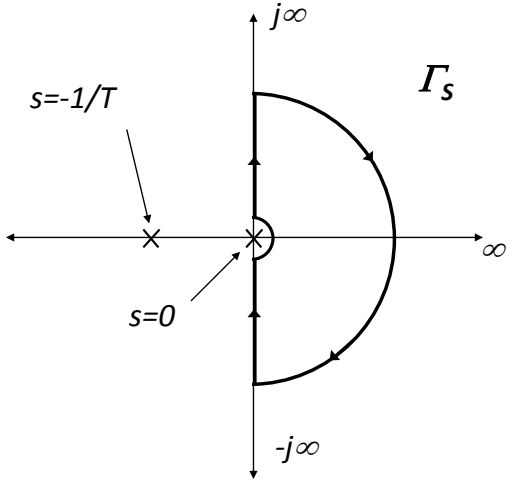


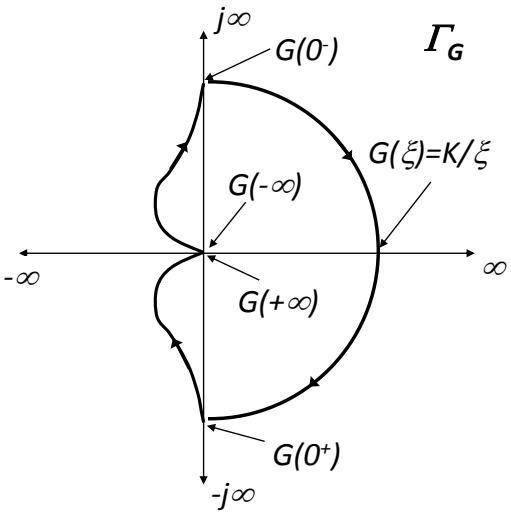
Para estabilidad, $Z = N + P = 0$. Como $P = 1$, se requiere que $\Gamma_G \equiv \Gamma_{KF}$ rodee el punto $(-1, 0)$ una vez en el sentido contrario a las agujas del reloj, porque $N = -1$. Ello se logra aumentando la ganancia K, que equivale a "expandir" Γ_G.

Criterio de Estabilidad de Nyquist - Ejemplo 2

$$G(s) = KF(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1+KF(s)}$$





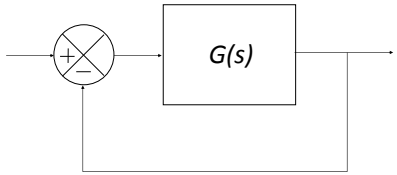


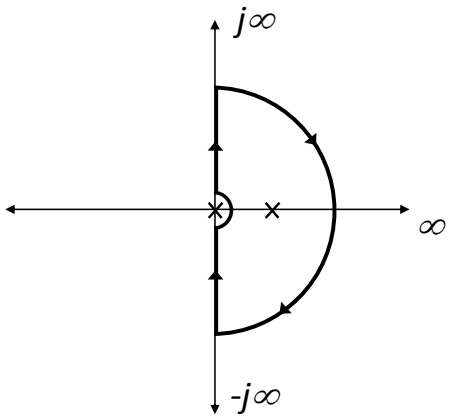
Hay un cero en el origen, por lo que se debe modificar el contorno "**D**" (Γ_s), rodeando el cero en el origen para obtener Γ_G.

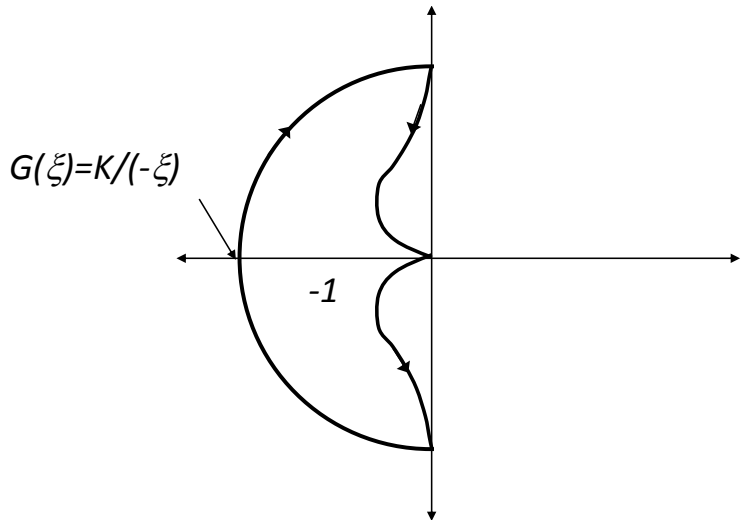
¿Qué pasa con Γ_G para Γ_s en torno a 0? Se define un rotor infinitesimal $s = \epsilon \cdot e^{j\phi}$, donde para $\phi = 0$, $s = \epsilon$, por lo tanto, $G(\epsilon) \to +\infty$ cuando $\epsilon \to +0$.

Criterio de Estabilidad de Nyquist - Ejemplo 3

$$G(s) = KF(s) = \frac{K}{s(s-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1+KF(s)}$$





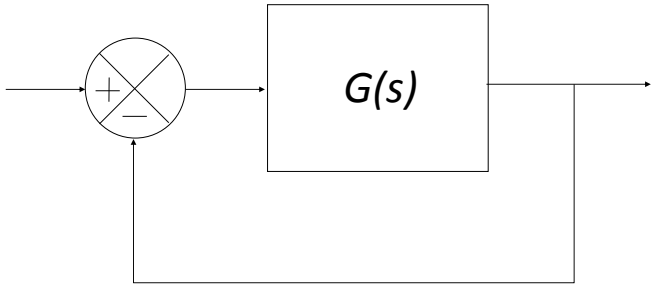


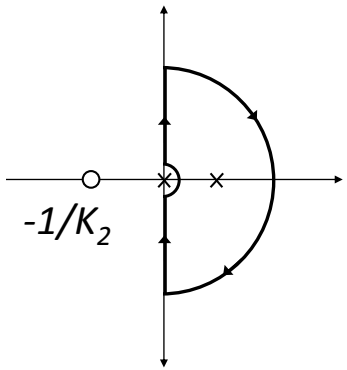
Existe un polo dentro del contorno "**D**". El diagrama de Nyquist Γ_G da una vuelta en torno a -1 en el sentido horario, es decir $Z = N + P = 2$.

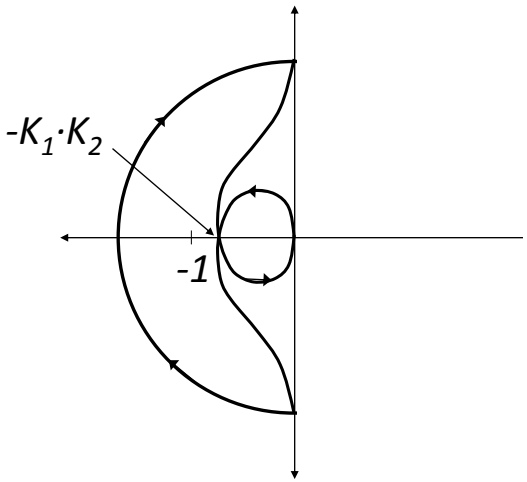
Resultado: $\Rightarrow$ hay 2 raíces de la ecuación caracteristica del sistema realimentado en el lado derecho del plano s.

Criterio de Estabilidad de Nyquist - Ejemplo 4

$$G(s) = KF(s) = \frac{K_1 \cdot (K_2 s + 1)}{s(s-1)}$$







Dado que $P = 1$, se requiere $N = -1$, o sea $K_1 \cdot K_2 > 1$.

Recordar que:

$\Rightarrow$ El sistema realimentado es estable si $Z = 0$, es decir si $K_1 \cdot K_2 > 1$, ¡de lo contrario es inestable!

Estabilidad Relativa

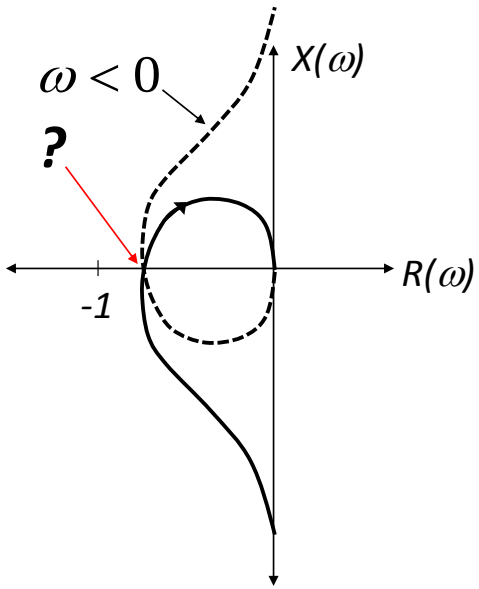
¿Qué tan estable es el sistema?

$$G(s) = KF(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Para encontrar el cruce en el eje real, se busca ω tal que $X(\omega) = 0$, y luego se reemplaza en $R(\omega)$.

$$X(\omega) = \frac{-K \cdot \frac{1}{\omega} \cdot (1 - \omega^2 \cdot T_1 \cdot T_2)}{1 + \omega^2 \cdot (T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 \cdot T_1^2 \cdot T_2^2}$$

$$R(\omega) = \frac{-K \cdot (T_1 + T_2)}{1 + \omega^2 \cdot (T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 \cdot T_1^2 \cdot T_2^2}$$

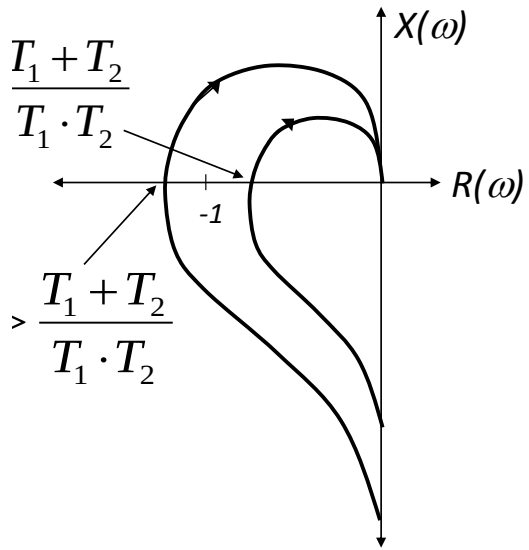


Estabilidad Relativa

¿Qué tan estable es el sistema?

Se reemplaza la solución de $X(\omega) = 0$ en:

$$R(\omega)\Big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}} = \frac{-K \cdot (T_1 \cdot T_2)}{T_1 + T_2}$$



Dado que $P = 0$ y se requiere $Z = 0$ para la estabilidad, la condición de estabilidad es:

$$\frac{-K \cdot (T_1 \cdot T_2)}{T_1 + T_1} > -1 \Rightarrow K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}$$

Luego, la ganancia crítica será $K_c = \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}$

Si K disminuye bajo K_c, el sistema realimentado se hace más estable. Habrá luego un margen en el cual el sistema permanecerá estable ante aumentos de ganancia de la planta.

Margen de Ganancia (MG)

Definición

Margen de Ganancia (MG)

Factor por el cual debe aumentarse la ganancia actual (de la planta o controlador) para que la curva $\Gamma_G \equiv G(j\omega)$ pase por el punto $(-1, 0)$.

$$|MG \cdot KF(j\omega_1)| \;=\; |MG \cdot R(\omega_1)| \;=\; 1$$

$$MG \;=\; -\frac{1}{|KF(j\omega_1)|} \;=\; \frac{1}{|R(j\omega_1)|}$$

donde ω_1 es la frecuencia en la cual $KF(j\omega)$ cruza el eje real, es decir ω_1 satisface $X(\omega_1) = 0$.

Generalmente se expresa en decibeles, es decir:

$$MG = 20 \cdot \log |KF(j\omega_1)| \text{ [dB]}$$

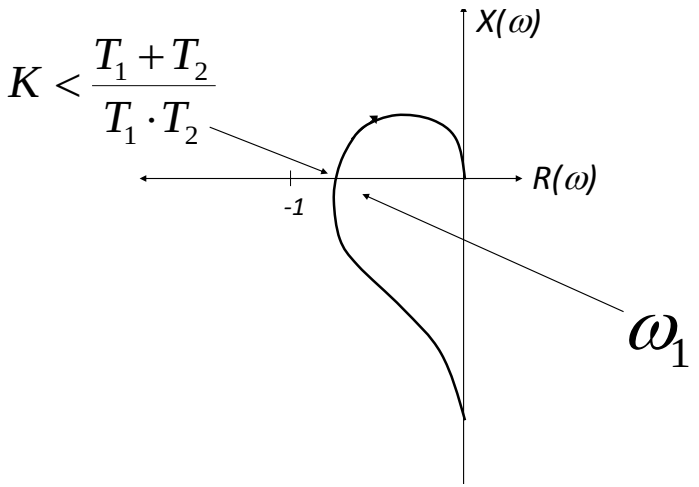
Este margen tiene sentido sólo si el sistema realimentado es nominalmente estable.

Margen de Ganancia (MG)

Ejemplo

Para el ejemplo anterior,

$$G(s) = KF(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



Suponiendo que $T_1 = T_2 = 1$ y $K = 0.5$:

$$MG = \frac{T_1 + T_2}{K \cdot T_1 \cdot T_2} = \frac{2}{0.5} = 4$$

en decibeles: $MG = 12[dB]$

Es decir, la ganancia puede aumentarse 4 veces antes de alcanzar la inestabilidad.

Este margen tiene sentido sólo si el sistema realimentado es nominalmente estable.

Margen de Fase (MF)

Definición

¡El Margen de Ganancia no es suficiente para determinar la robustez de un sistema!

Margen de Fase (MF)

Ángulo en el cual debe girar la curva $\Gamma_G \equiv G(j\omega)$ para que el punto de magnitud unitaria $|G(j\omega_2)| = 1$ pase a través del punto $(1, 0)$ del diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$.

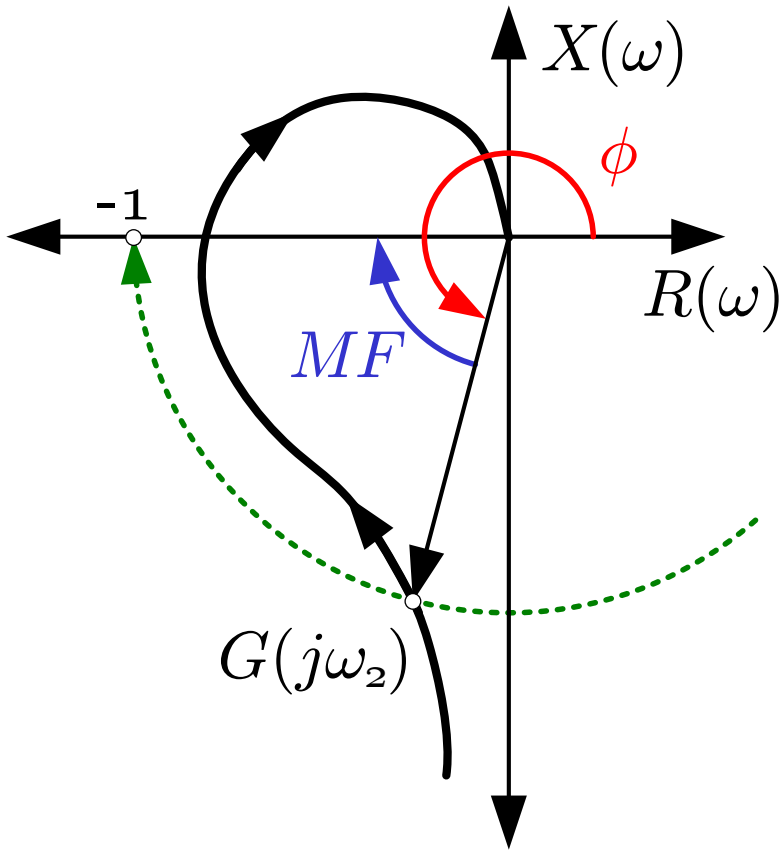
Definiendo

$$\begin{aligned} \phi &\stackrel{def}{=} \angle G(j\omega_2) = \angle KF(j\omega_2) \\ &= \arctan\left(\frac{X(\omega_2)}{R(\omega_2)}\right) \\ &= 180^\circ + \arctan\left(\frac{|X(\omega_2)|}{|R(\omega_2)|}\right) \end{aligned}$$

donde ω_2 es la frecuencia para la cual $|KF(j\omega_2)| = 1$:

$$\phi + MF = -180^\circ \Rightarrow MF = -180^\circ - \phi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} MF &= -180^\circ - \arctan\left(\frac{X(\omega_2)}{R(\omega_2)}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{|X(\omega_2)|}{|R(\omega_2)|}\right) \end{aligned}$$

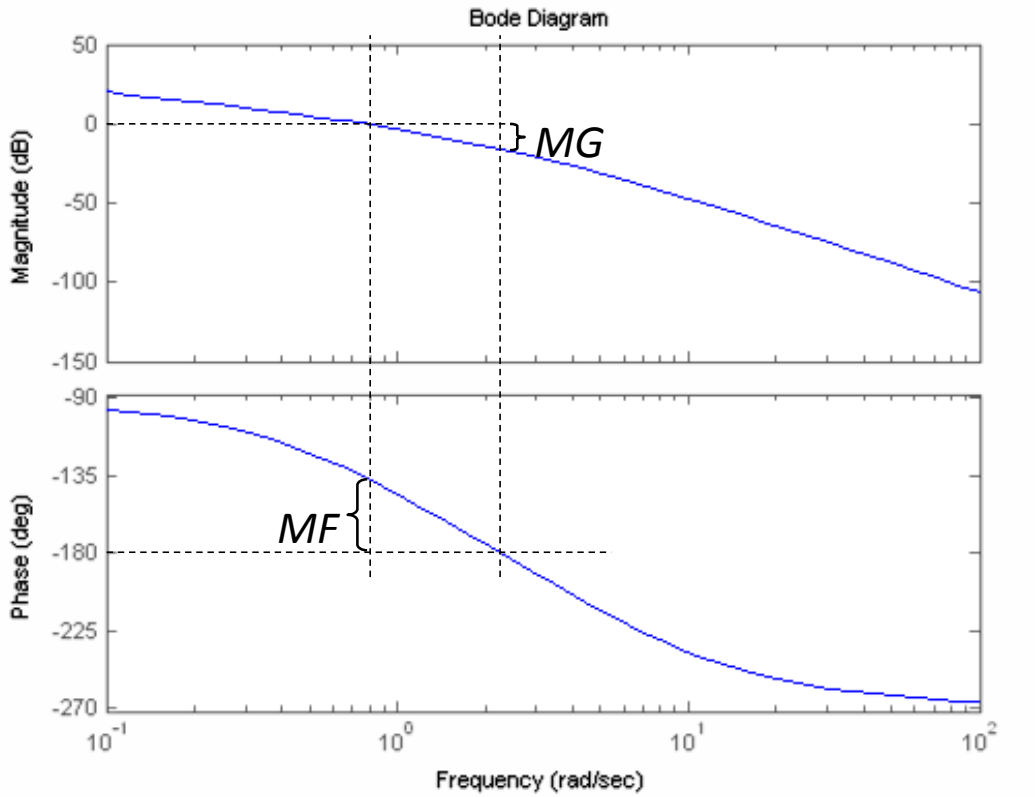


Márgenes de Ganancia y Fase

A partir del diagrama de Bode

Otra manera simple y directa de determinar ambos márgenes es a través del diagrama de Bode.

Por ejemplo: $G(j\omega) = \dfrac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \dfrac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)}$

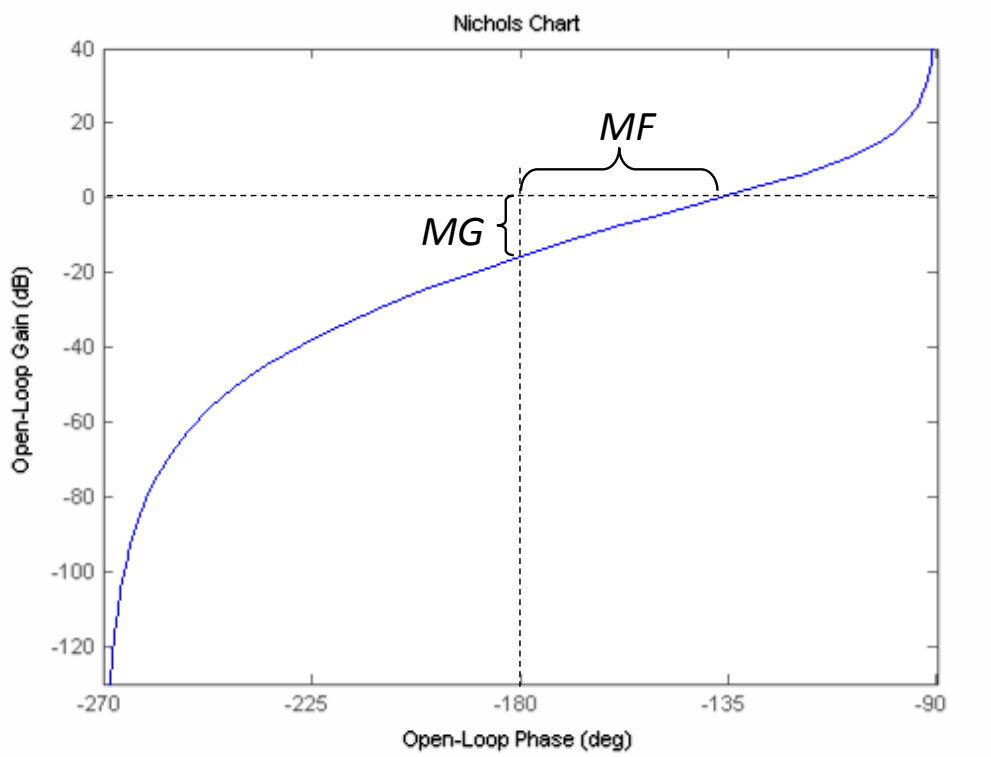


Márgenes de Ganancia y Fase

A partir del diagrama de Nichols

El diagrama de Nichols concentra en un sólo gráfico ambos parámetros:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$$



Gráficas de Nyquist, Bode y Nichols

Las gráficas de Nyquist, Bode y Nichols son distintas maneras de representar $KF(j\omega)$.

Si $KF(j\omega) \leftrightarrow R(\omega) + jX(\omega) \leftrightarrow M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = M(\omega)\angle\phi(\omega)$ con

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \text{Re}\{KF(j\omega)\} \\ X(\omega) &= \text{Im}\{KF(j\omega)\} \\ M(\omega) &= \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2} \\ \phi(\omega) &= \arctan\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) \end{aligned}$$

- Nyquist: Representación $X(\omega)$ vs. $R(\omega)$ en forma Cartesiana $(R(\omega), X(\omega))$ o Polar $(M(\omega), \angle\phi(\omega))$.
- Bode: Representación Magnitud y Fase $M(\omega)$ vs. ω y $\phi(\omega)$ vs. ω.
- Nichols: Representación Magnitud vs. Fase $M(\omega)$ vs. $\phi(\omega)$.

Gráficas de Nyquist, Bode y Nichols – Pros y Contras

Todos los diagramas son útiles para encontrar el MG y el MF. Sin embargo, algunos son más fáciles de hacer o se prestan mejor para visualizar ciertas condiciones.

- Nyquist:
  - Pros:
    - Facilita visualizar/analizar sistemas con retardo, por sobre Bode, LGR y R-H.
  - Contras:
    - Dificulta ver magnitudes y fases a distintas frecuencias, ya que las frecuencias no aparecen en forma explícita como en Bode.
    - Lo anterior dificulta el diseño de compensadores y filtros para frecuencias específicas.
  - Observaciones: Muchos textos muestan la forma Polar $(M(\omega), \angle\phi(\omega))$, pero esta es más difícil de calcular manualmente que la forma Cartesiana $(R(\omega), X(\omega))$.
- Bode:
  - Pros:
    - Facilita diseñar compensador y filtros para frecuencias específicas.
    - Sirve para identificar la planta.
    - El método manual mediante asíntotas es el más fácil de aplicar.
    - Al utilizar la escala logaritmica se pueden apreciar mejor los comportamientos a altas frecuencias, cosa que es difícil de visualizar en el diagrama de Nyquist.
  - Contras:
    - Para graficar a mano se requiere la planta expresada en términos de sus ceros y polos.
    - Apreciar el efecto o presencia del retardo es más difícil que en la gráfica de Nyquist.
- Nichols:
  - Pros:
    - Resume en un gráfico el margen de ganancia y margen de fase.
  - Contras:
    - Pierde información explícita de las frecuencias que si está en la gráfica de Bode.
    - Apreciar el efecto o presencia del retardo es más difícil que en la gráfica de Nyquist.
  - Observaciones: Siendo un diagrama que no contiene información explicita de las frecuencias como el diagrama de Nyquist, sus ventajas son dudosas... posiblemente su uso sea más una cuestión de gustos... entre Nyquist y Bode se tiene una batería adecuada de instrumentos para analizar la estabilidad.

Estabilidad de Sistemas con Retardo

Para la planta $G(s)$ se calculan la magnitud y la fase:

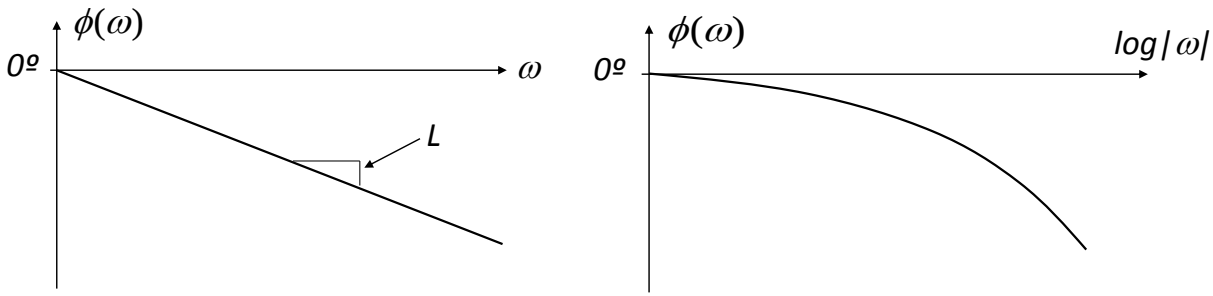
$$G(s) = G'(s) \cdot e^{-Ls} = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$\Rightarrow$ Magnitud: $|G(j\omega)| = |G'(j\omega)| \cdot \underbrace{|e^{-j\omega L}|}_{1} = |G'(j\omega)|$

$\Rightarrow$ Fase: $\phi(j\omega) = -90^o - \arctan|\omega T_1| - \arctan|\omega T_2| - L\omega$

¡El retardo aporta un desfase $-L\omega$ a la fase!

Las gráficas del retardo como función lineal de la frecuencia y en función del logarítmo de la frecuencia:



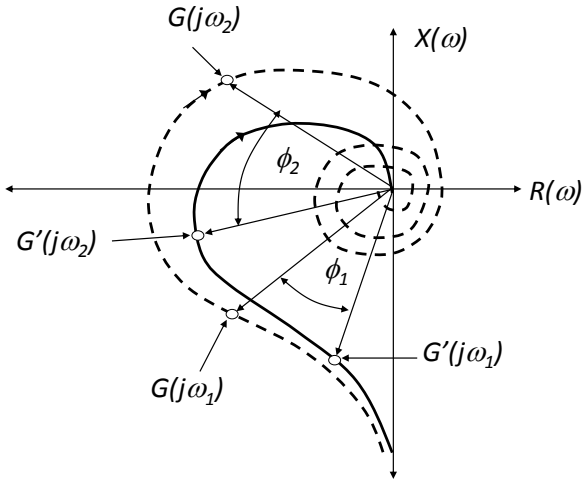
Estabilidad de Sistemas con Retardo

En el diagrama de Nyquist:

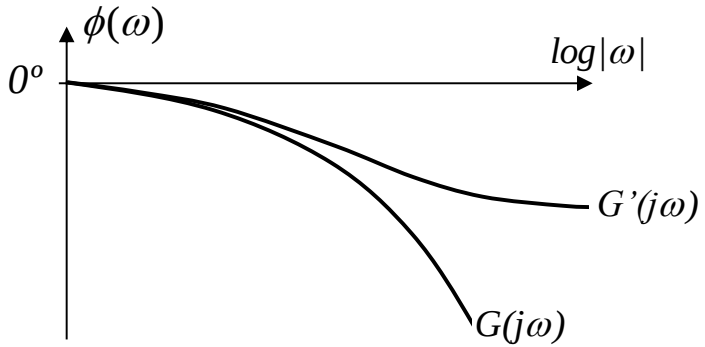
$$G(s) = G'(s) \cdot e^{-Ls} = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$\phi_1 = -\omega_1 L$$

$$\phi_2 = -\omega_2 L$$

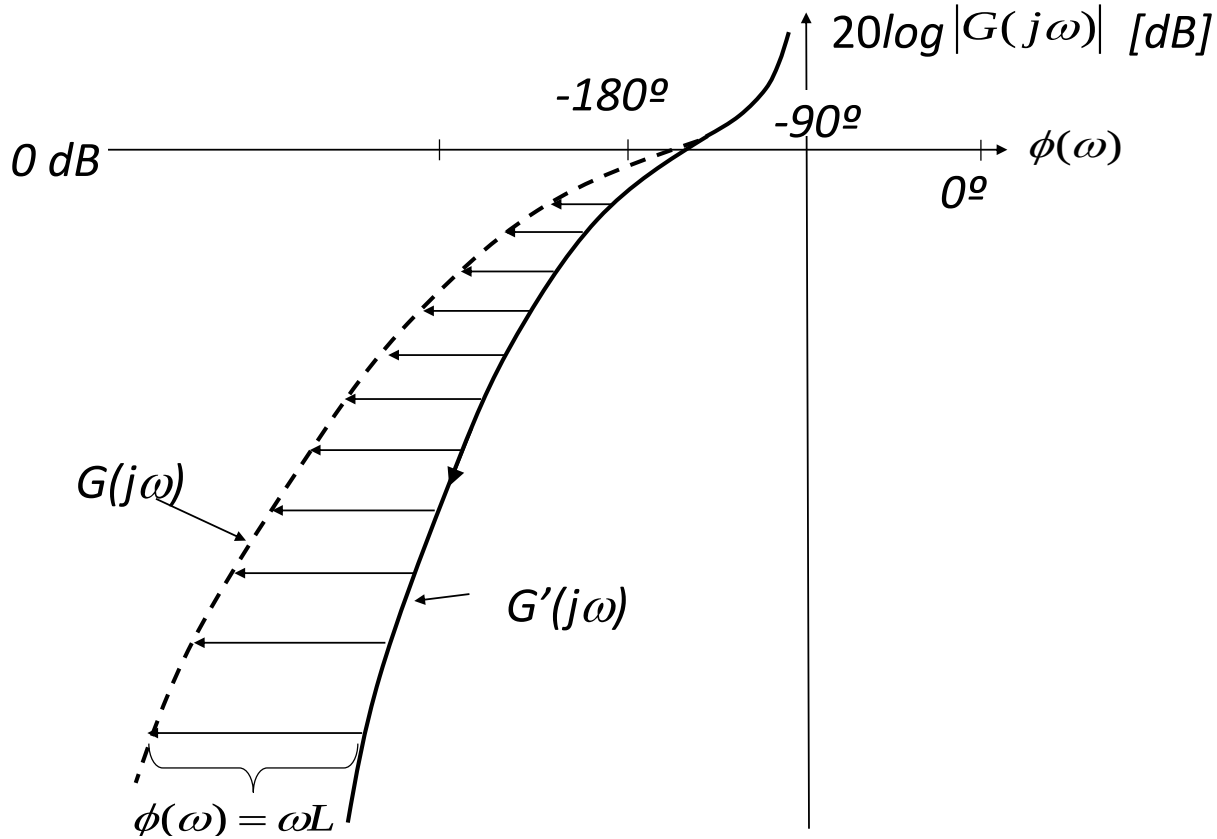


El diagrama de Bode de magnitud de $G(j\omega)$ no sufre variación respecto al de $G'(j\omega)$, pero la fase tiene la forma:



Estabilidad de Sistemas con Retardo

Al analizar la misma planta $G(s) = G'(s) \cdot e^{-Ls} = \dfrac{K \cdot e^{-Ls}}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ en el diagrama de Nichols, se puede ver que el retardo tiene el siguiente efecto:



Simulación de Sistemas con Retardo

$$G(s) = \frac{100 \cdot e^{-Ls}}{(0.01s+1)(s+1)(100s+1)}$$

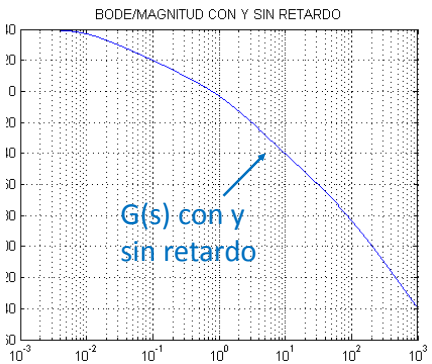
Fase:

$$\phi(j\omega) = -\arctan|0.01\omega| - \arctan|\omega| - \arctan|100\omega| - L\omega$$

Magnitud:

$$G(s) = G'(s) \cdot e^{-Ls} \Rightarrow |G(j\omega)| = |G'(j\omega)|$$

Ejemplo: $L = 2$ seg

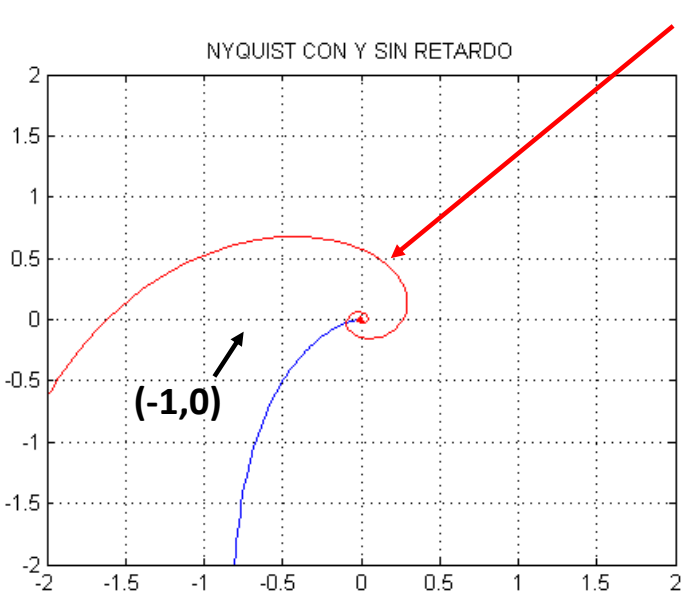


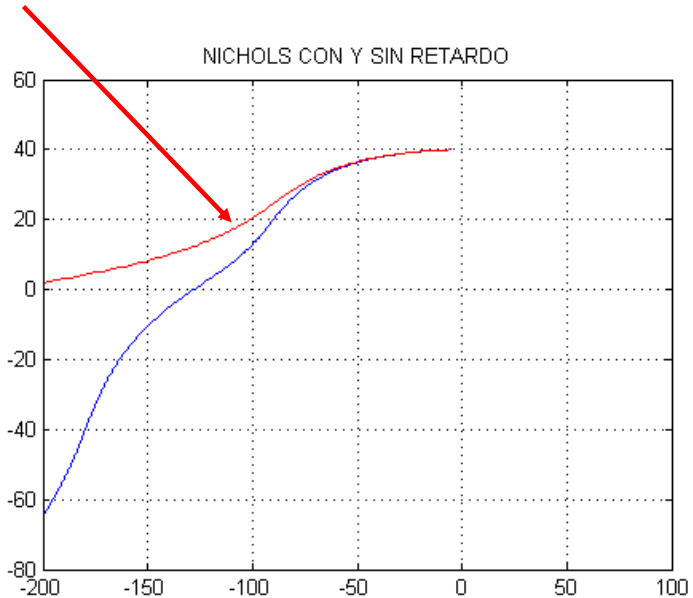


Simulación de Sistemas con Retardo

$$G(s) = \frac{100 \cdot e^{-2s}}{(0.01s+1)(s+1)(100s+1)}$$

G(s) con retardo





Repaso de Diagrama de Bode

Son el par de curvas de magnitud y la fase versus frecuencia de la respuesta de una cierta función de transferencia:

$$\begin{aligned} M_{Bode} &= 20\log_{10}\left(\|G(j\omega)\|\right) \\ \phi_{Bode} &= \angle G(j\omega) \end{aligned}$$

Si

$$G(j\omega) = K_0\frac{\vec{s}_{z_1}\vec{s}_{z_2}\cdots\vec{s}_{z_m}}{\vec{s}_{p_1}\vec{s}_{p_2}\cdots\vec{s}_{p_n}} = K_0\frac{r_{z_1}e^{j\psi_1}r_{z_2}e^{j\psi_2}\cdots r_{z_m}e^{j\psi_m}}{r_{p_1}e^{j\phi_1}r_{p_2}e^{j\phi_2}\cdots r_{p_n}e^{j\phi_n}}$$

luego

$$\begin{aligned} M_{Bode} &= 20\left(\log(K_0)+\sum_{i=1}^{m}\log(r_{z_i})+\sum_{j=1}^{n}\log(r_{p_j})\right) \\ \phi_{Bode} &= \sum_{i=1}^{m}\psi_i+\sum_{j=1}^{n}\phi_j \end{aligned}$$

Ventajas – Diagramas de Bode

- Los diagramas de Bode permiten diseñar *compensadores dinámicos*, es decir compensadores cuyo comportamiento puede ajustarse a distintas frecuencias, especificando su respuesta en términos de ganancia y ancho de banda/frecuencias de corte.
- Los diagramas pueden determinarse experimentalmente.
- Los diagramas de sistemas en serie simplemente se suman (fácil manipulación).
- El uso de la escala logarítmica permite analizar un rango de frecuencias más amplio en un solo gráfico que lo que sería posible usando una escala lineal.

1. Escribir la función de transferencia del lazo abierto:

$$G(s) = KF(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

en la *forma de Bode* reemplazando $s = j\omega$:

$$G(s) = KF(s) = K_0\frac{(j\omega\tau_1+1)(j\omega\tau_2+1)\cdots(j\omega\tau_m+1)}{(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)\cdots(j\omega T_n+1)}$$

2. Separar los términos de la forma de Bode en términos de las clases primitivas:

Clase 1: $K_0(j\omega)^{\pm n}$

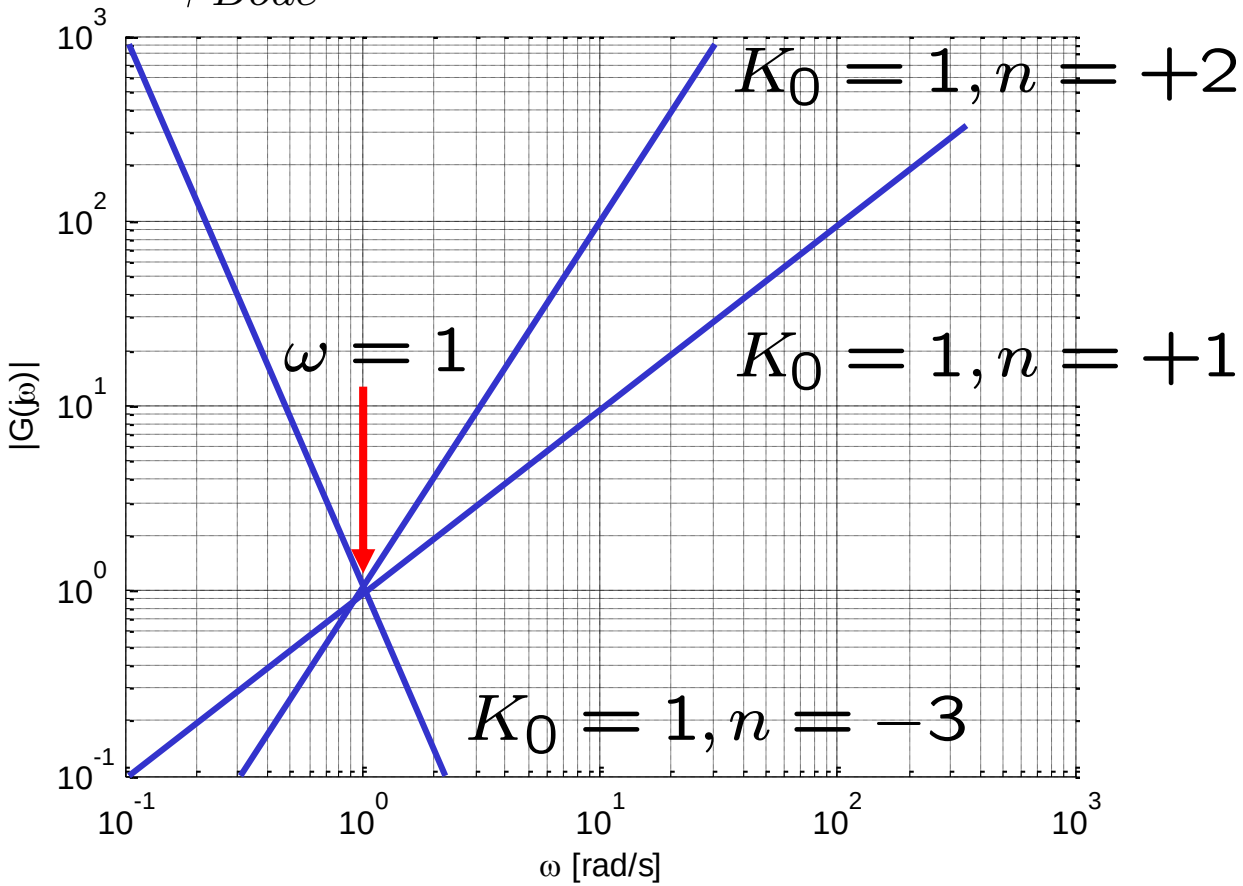
Clase 2: $(j\omega\tau+1)^{\pm 1}$

Clase 3: $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]^{\pm 1}$

3. Graficar las asíntotas en forma independiente.
4. Sumar gráficamente las asíntotas.

Clase 1: *Singularidades en el origen* $K_0(j\omega)^{\pm n}$

$$M_{Bode} = 20\log(K_0) \pm 20n\log(\omega)$$
$$\phi_{Bode} = \pm n \cdot 90^\circ$$



Clase 1: *Singularidades en el origen* $K_0(j\omega)^{\pm n}$

$$\begin{aligned} M_{Bode} &= 20\log(K_0) \pm 20n\log(\omega) \\ \phi_{Bode} &= \pm n \cdot 90^\circ \end{aligned}$$

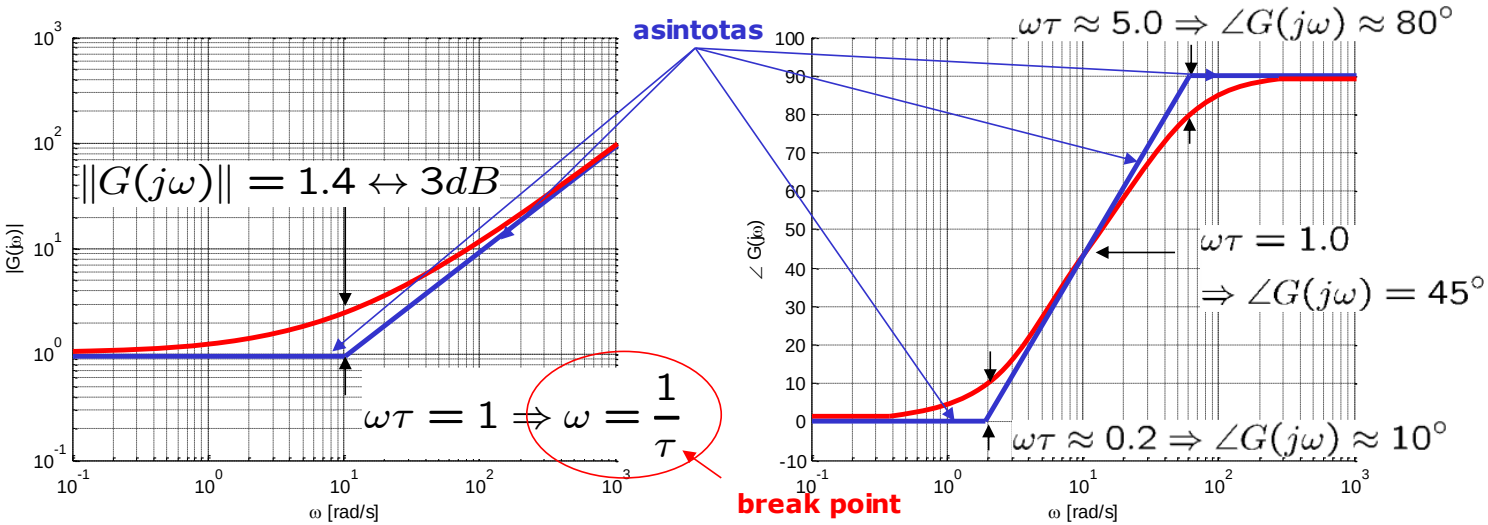
Nota:
La asíntota debe graficarse pasando por $\omega = 1$ con magnitud $20\log(K_0)$ porque:

$$\begin{aligned} M_{Bode}(\omega = 1) &= 20\log(K_0) \pm 20n\log(1) \\ &= 20\log(K_0) \end{aligned}$$

Clase 2: *Términos de primer orden estables* $(j\omega\tau+1)^{\pm 1}$

$$M_{Bode} = \begin{cases} 0 & \omega\tau \ll 1 \ (\|G(j\omega)\| \approx 1) \\ \log(\omega\tau) & \omega\tau \gg 1 \ (\|G(j\omega)\| \approx \omega\tau) \end{cases}$$

$$\phi_{Bode} = \begin{cases} \approx \pm 10^\circ & \omega\tau \approx 0.2 \ (G(j\omega) \approx (j\omega\tau \xrightarrow{0.2} +1)^{\pm 1}) \\ \pm 45^\circ & \omega\tau = 1 \ (G(j\omega) = (j\omega\tau \xrightarrow{1} +1)^{\pm 1}) \\ \approx \pm 80^\circ & \omega\tau \approx 5 \ (G(j\omega) \approx (j\omega\tau \xrightarrow{5} +1)^{\pm 1}) \\ \approx \pm 90^\circ & \omega\tau \gg 1 \ (G(j\omega) \approx (j\omega\tau)^{\pm 1}) \end{cases}$$



Clase 3: *Términos de segundo orden subamortiguados*

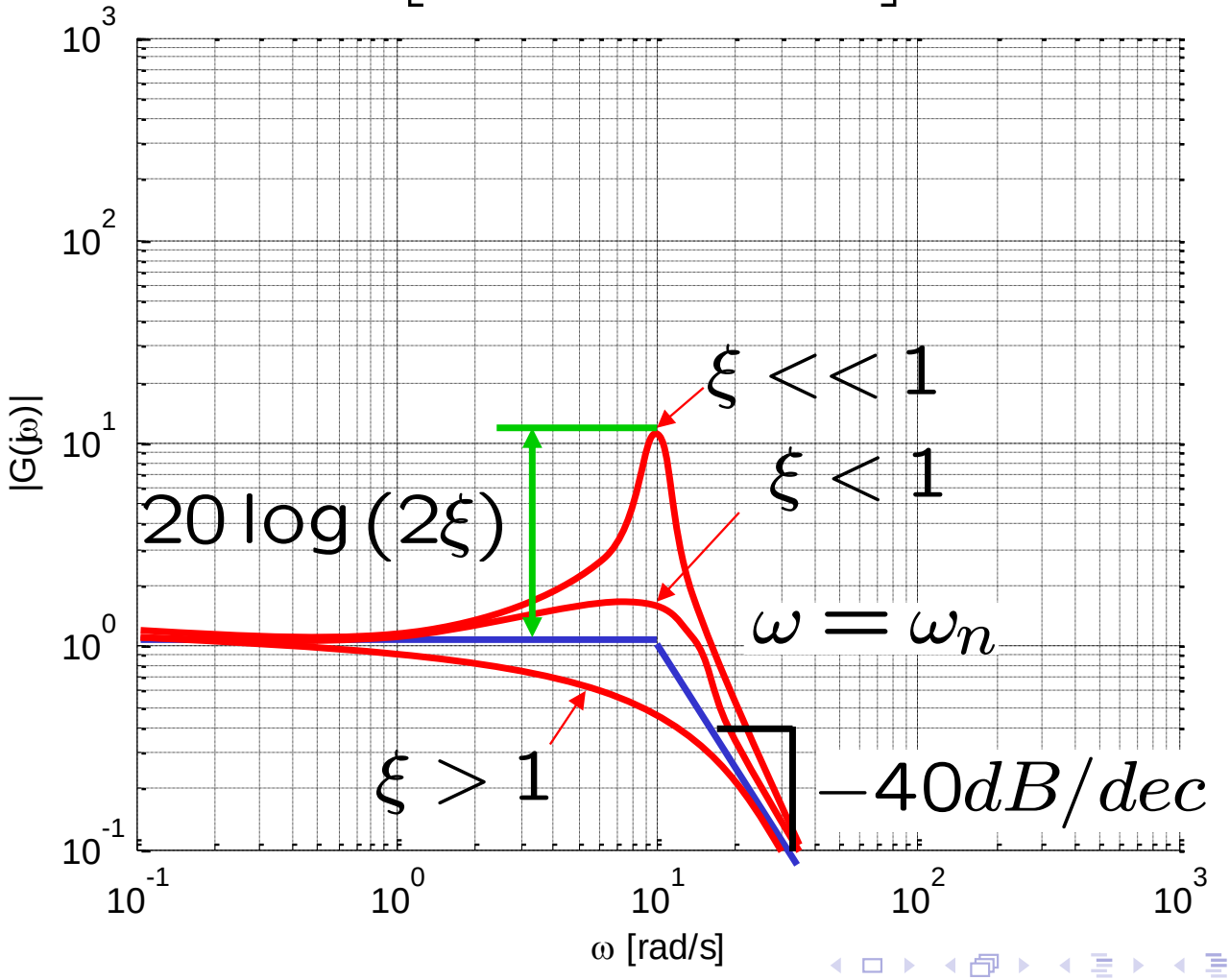
$$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]^{\pm 1}$$

$$M_{Bode} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \ \left(\|G(j\omega)\| \approx 1\right) \\ \pm 20\log(2\xi) & \omega = \omega_n \ \left(\|G(j\omega)\| = (2\xi)^{\pm 1}\right) \\ \pm 40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) & \omega \gg \omega_n \ \left(\|G(j\omega)\| \approx \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}\right) \end{cases}$$

$$\phi_{Bode} = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \omega_n \ \left(G(j\omega) \approx 1\right) \\ \pm 90^\circ & \omega = \omega_n \ \left(G(j\omega) = (j2\xi)^{\pm 1}\right) \\ \pm 180^\circ & \omega \gg \omega_n \ \left(G(j\omega) \approx -\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) \end{cases}$$

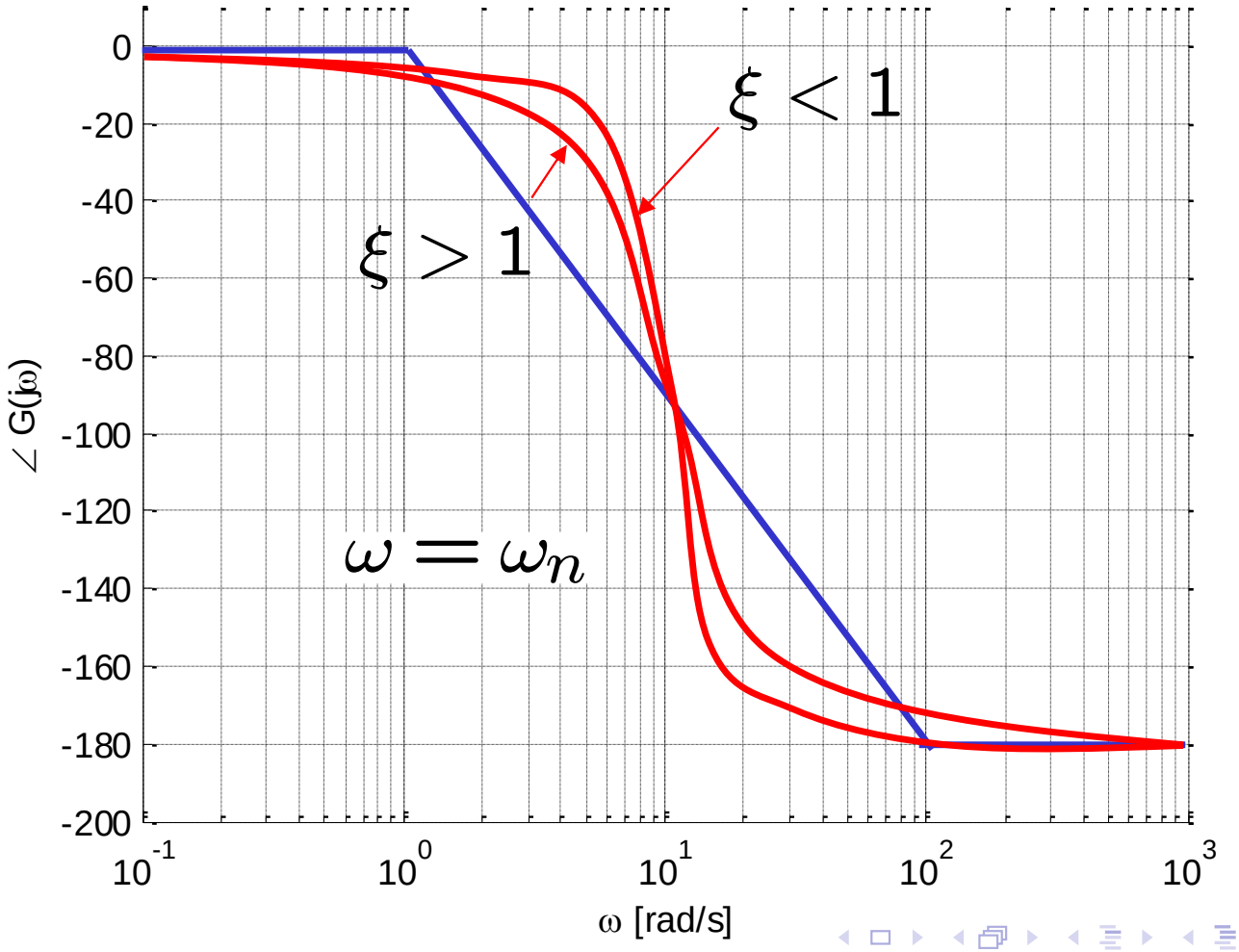
Clase 3: *Términos de segundo orden subamortiguados*

$$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]^{\pm 1}$$



Clase 3: *Términos de segundo orden subamortiguados*

$$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]^{\pm 1}$$



1. Terminos que no cumplen el patrón como $(Ts-1)$ o $(1-Ts)$ tienen la misma magnitud que los componente de clase 2 $(Ts+1)$, pero la fase es distinta. Para graficar la fase, analice primero el ángulo del vector $-1+jT\omega$ o $1-jT\omega$, para $\omega \in [0,\infty]$.
2. Los términos en el numerador se trabajan con signo de fase '+', mientras que los términos en el denominador se trabajan con signo '-'.
3. Los ángulos deben llevarse a su mínimo múltiplo positivo o negativo según el punto anterior. Por ejemplo, $\phi + n360^\circ$ debe llevarse a $\phi \in [-180^\circ, 180^\circ]$, considerando los dos puntos anteriores.

Compensador o Red de Adelanto

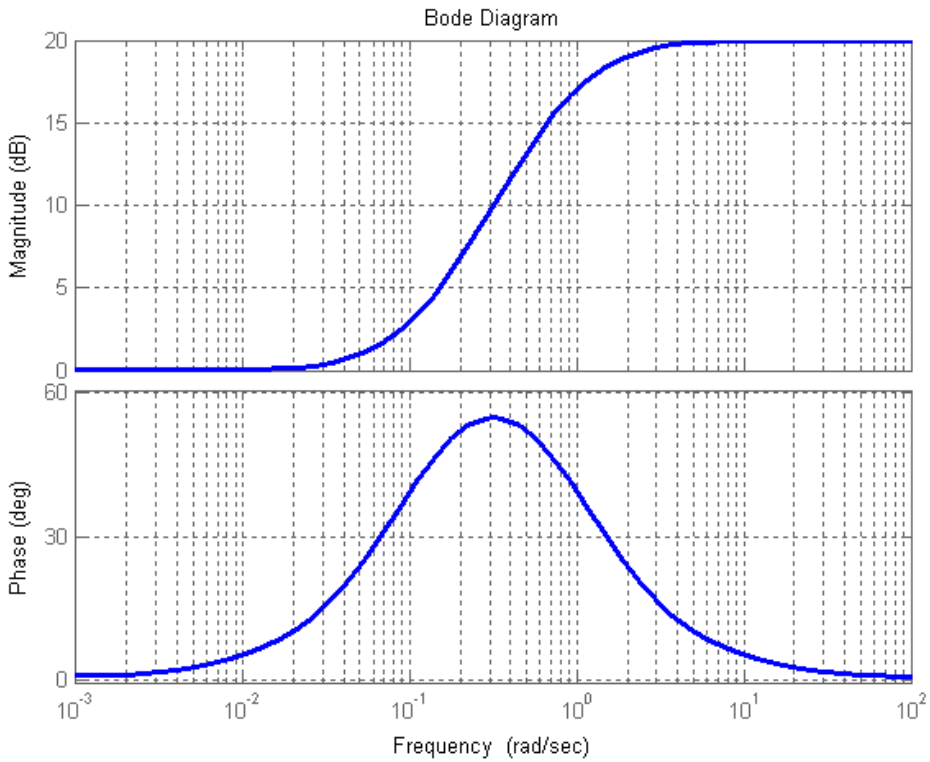
Phase Lead

$$F(s) = K_f \cdot \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

Cuando $T_1 > T_2$, la red es de *adelanto*. Por ejemplo, si $K_f = 1$ y $T_1 = 10$ s, $T_2 = 1$ s:

$$F(s) = \frac{10s + 1}{s + 1}$$

El avance de fase persigue mejorar los márgenes de estabilidad del sistema. A la vez no produce una ganancia excesiva a frecuencias altas, de manera que no amplifica el ruido en forma importante... y a diferencia de un derivador puro, *¡es causal!*



Compensador o Red de Atraso

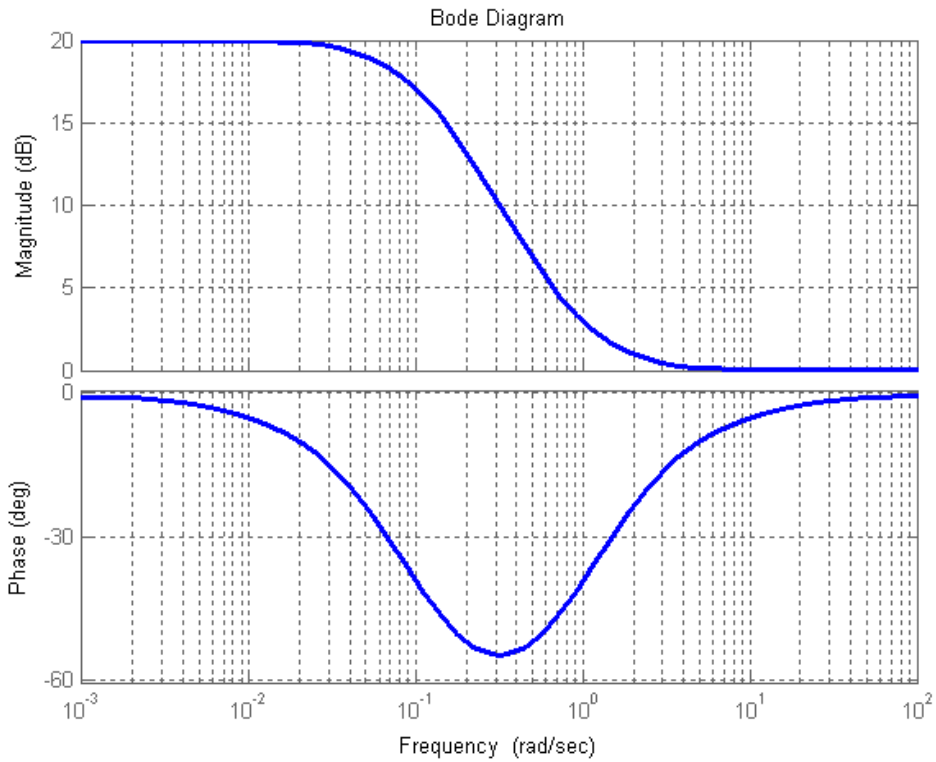
Phase Lag

$$F(s) = K_f \cdot \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

Cuando $T_1 < T_2$, la red es de *atraso*. Por ejemplo, si $K_f = 1$ y $T_1 = 1$ s, $T_2 = 10$ s:

$$F(s) = \frac{s + 1}{10s + 1}$$

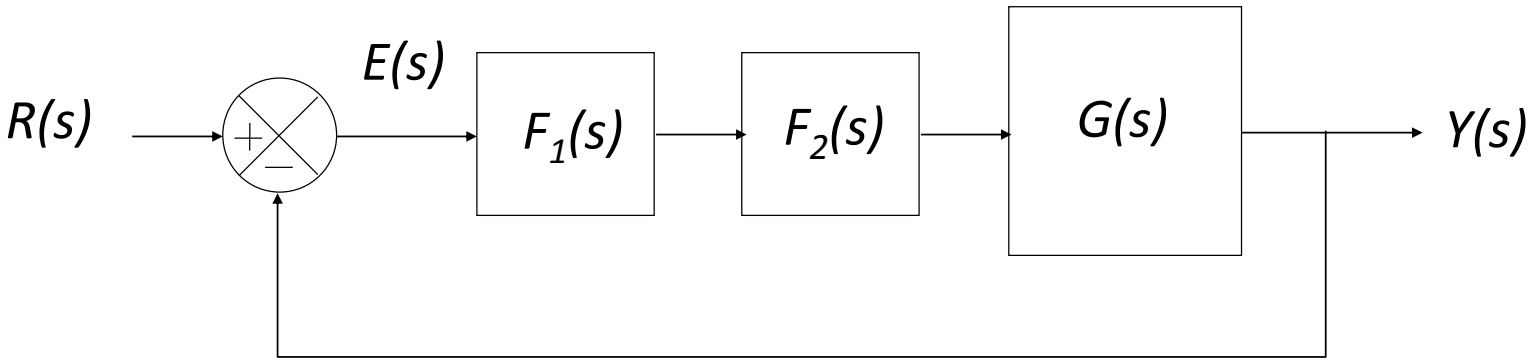
El retardo de fase reduce el error permanente a frecuencias bajas, sin alterar aquellas de frecuencias altas que pueden alterar la estabilidad del sistema. *¡Además, no genera wind-up (enrollado)!*



Ejemplo usando diagrama de Nichols y redes 1/4

Planta: $$G(s) = \frac{3}{(s+1)^4}$$

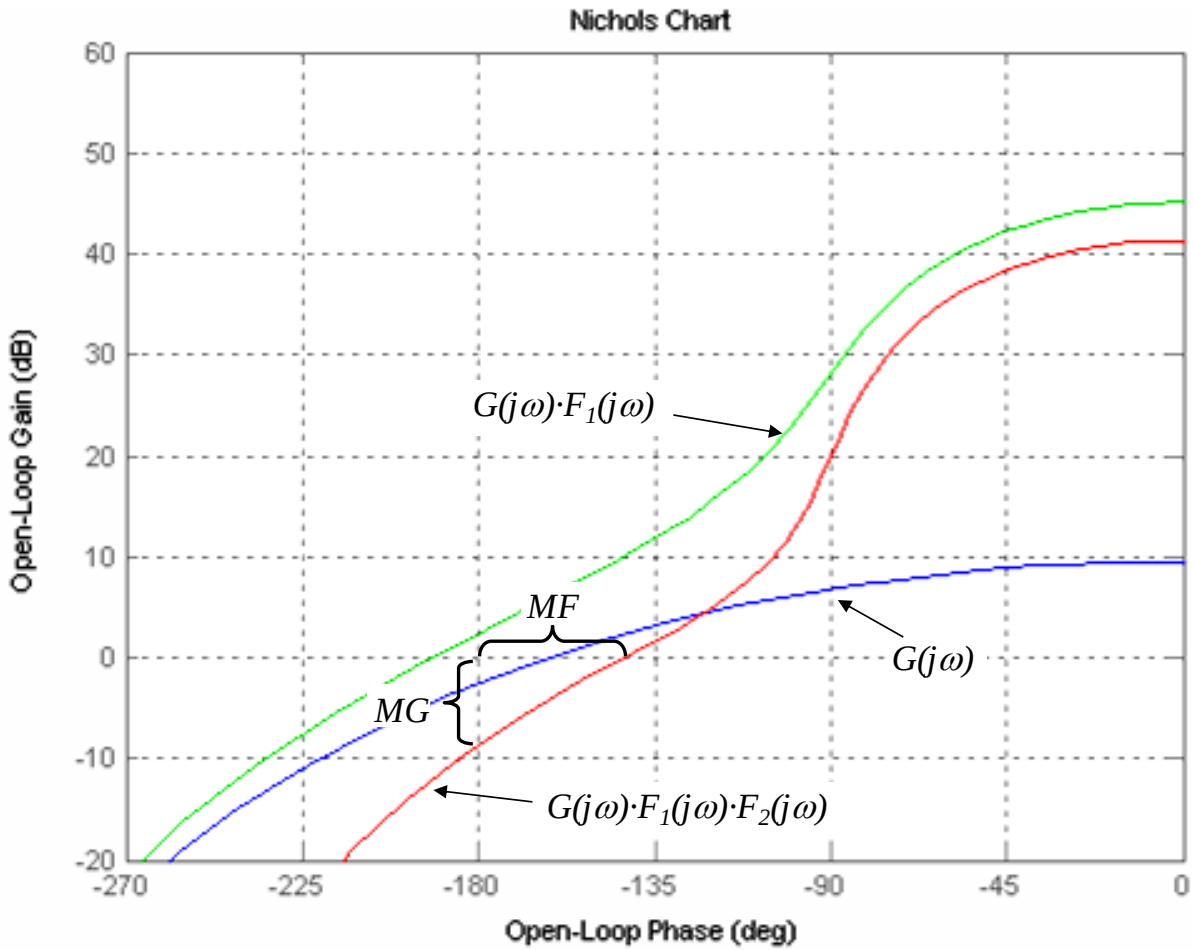
Requerimientos: Error permanente ante escalón menor que 1% y márgenes de ganancia y fase de 6 dB y 30^o, respectivamente.



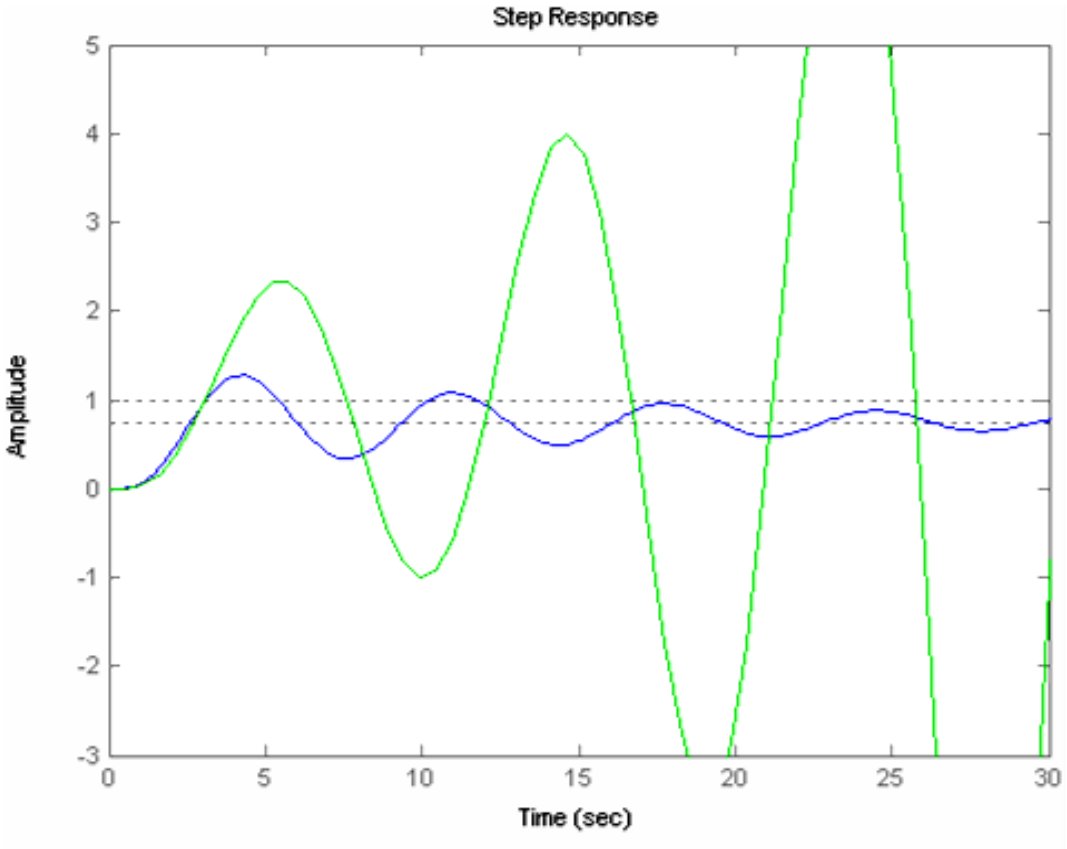
Red de atraso: $$F_1(s) = 60\frac{s+1}{150s+1}$$

Red de adelanto: $$F_2(s) = 0.65\frac{2s+1}{0.02s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{3}{(j\omega+1)^4} \quad F_1(j\omega) = 60\frac{j\omega+1}{j150\omega+1} \quad F_2(j\omega) = 0.65\frac{j2\omega+1}{j0.02\omega+1}$$

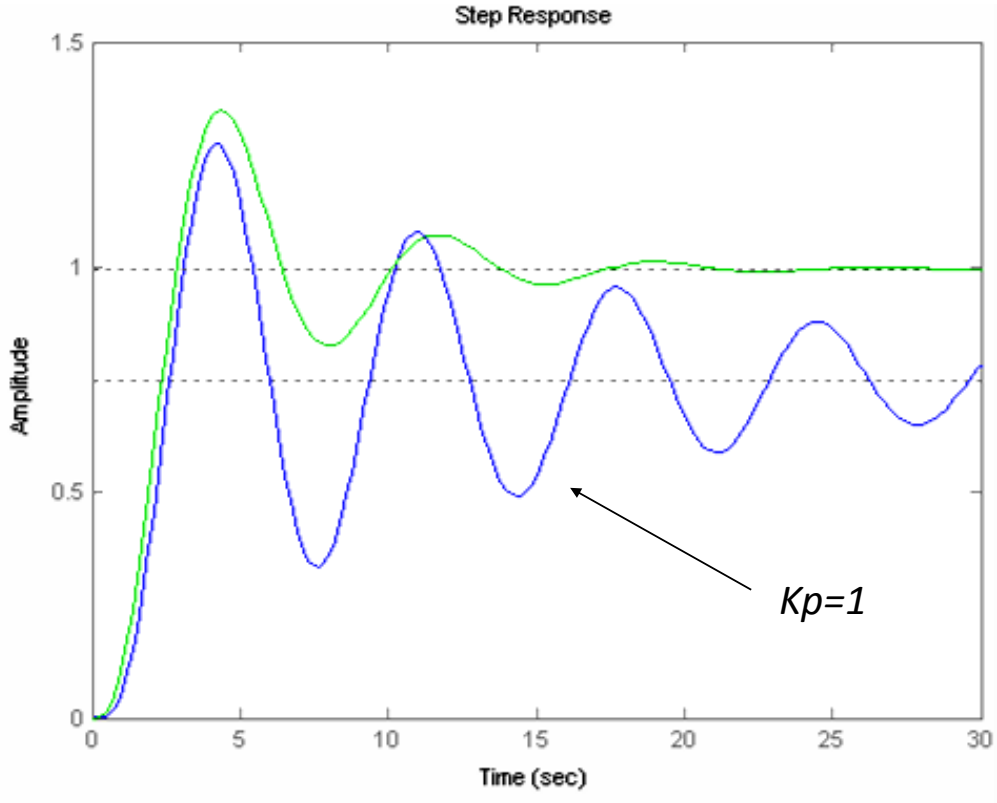


Ejemplo usando diagrama de Nichols y redes 3/4



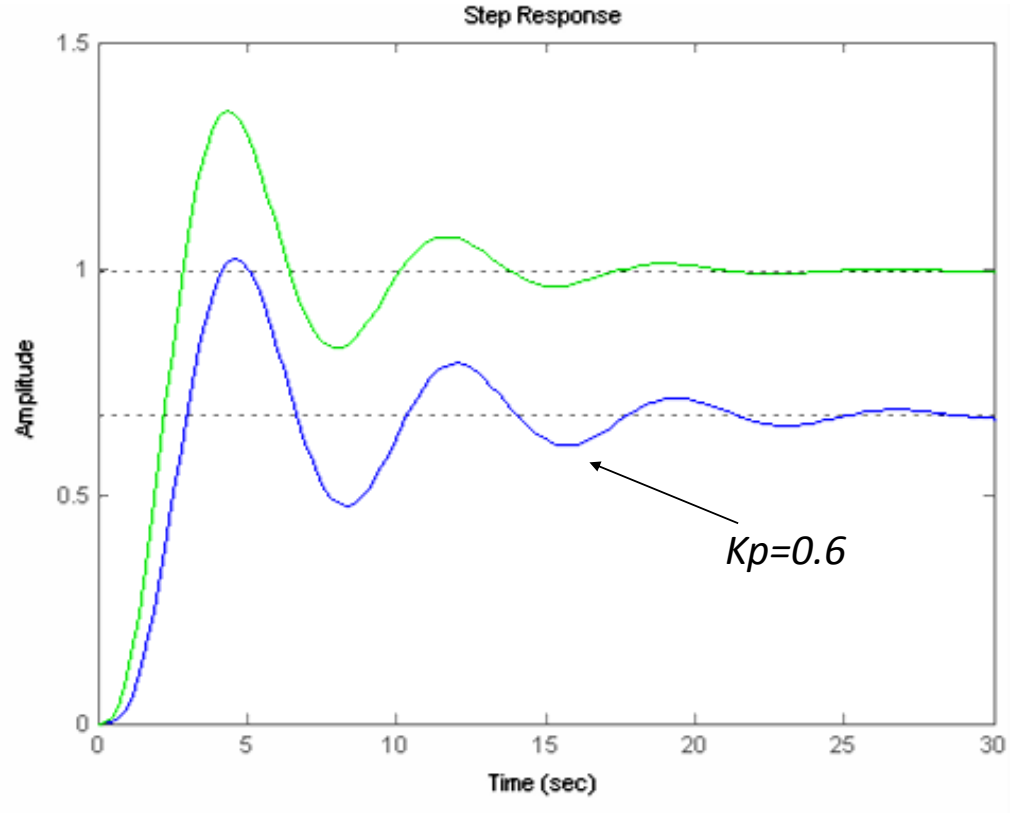
Planta sola (azul) y con red de atraso (inestable)

Ejemplo usando diagrama de Nichols y redes 4/4



Planta sola (azul) y con redes de atraso y adelanto

Ejemplo usando diagrama de Nichols y redes



Planta sola (azul) pero menor ganancia proporcional y con redes de atraso y adelanto

Referencias Adicionales

- H. Nyquist. Regeneration Theory. Bell Systems and Technology Journal, v. 11, pp. 126-147, 1932.
- H. W. Bode. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand, New York, 1945.
- H. W. Bode. Feedback: The history of an idea. Proceedings of the Conference on Circuits and Systems, New York, 1960. Re-impreso en R. Bellman, R. Kalaba, eds. Mathematical Trends in Control Theory. Dover, New York, 1964.
- J. G. Ziegler, N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. Trans. ASME, v. 64, pp. 759-768, 1942.
- J. G. Ziegler, N. B. Nichols. Process lags in automatic control circuits. Trans. ASME, v. 65, n. 5, pp. 433-444, Julio 1943.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. Feedback Control of Dynamic Systems. 4ª ed. (1ª ed. 1986), Prentice Hall, 2002.
- G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado. Control System Design. Prentice Hall, 2001.