**IEE2613 CONTROL AUTOMATICO – Examen Final**

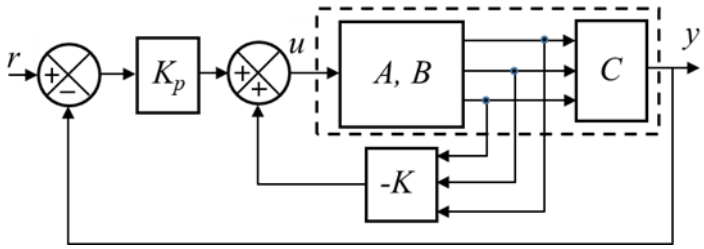
**Tiempo total: 120 mins** (115 minutos de desarrollo, 5 minutos bajada y subida de archivos)

Enviar respuesta **en sólo 1 archivo** (imagen, pdf o zip) a: **aguesala@ing.puc.cl**
Hora inicio: 8:35
Hora término: 10:35
Las preguntas del enunciado hacerlas por email al profesor (**aguesala@ing.puc.cl**)
Clave:

---

1- La planta discreta dentro del rectángulo de líneas discontinuas se representa en variables de estado por:

$$x_1(k+1) = -ax_1(k) - bx_2(k) - cx_3(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = x_1(k)$$
$$x_3(k+1) = x_2(k)$$
$$y = x_3(k)$$




El controlador digital $K$ recibe las mediciones de las tres variables de estado y las realimenta según la figura.

a) (5 ptos.) Para $K_p = 0.5$, encuentre el vector de control $K = [k_1, k_2, k_3]$ que posiciona las raíces del sistema realimentado completo en: $z_1 = -0.5$; $z_2 = 0.0$; y $z_3 = 0.5$.
b) (1 pto.) Determine el error permanente ($e_p = r - y$) para entrada escalón unitario en $r$.

**Sol**

$$A = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [0 \quad 0 \quad 1] \qquad D = 0$$ **(1 pto)**

Mediante una manipulación algebraica simple tenemos:

$$\underline{x}_{k+1} = A \cdot \underline{x}_k + B \cdot u = A \cdot \underline{x}_k + B \cdot \left(0.5r_k - (0.5C + K) \cdot \underline{x}_k\right) = \left(A - B \cdot (0.5C + K)\right) \cdot \underline{x}_k + 0.5B \cdot r_k$$

$$A - B \cdot (0.5C + K) = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - B \cdot [k_1 \quad k_2 \quad k_3 + 0.5] = \begin{bmatrix} -a - k_1 & -b - k_2 & -c - k_3 - 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ **(1 pto)**

Lo que nos da una ecuación característica: $q(z) = z^3 + (a + k_1)z^2 + (b + k_2)z + (c + k_3 + 0.5) = 0$ **(1 pto)**

Que debe ser igual a la ecuación característica objetivo dada por: $q(z) = z(z + 0.5)(z - 0.5) = z^3 - 0.25z$ **(1 pto)**

Luego igualando términos, $k_1 = -a$; $k_2 = -b - 0.25$ y $k_3 = -c - 0.5$ **(1 pto)**

Con lo que el sistema realimentado según $K$ es:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B' = 0.5B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C' = [0 \quad 0 \quad 1]$$ **(0.25 ptos)**

y la función de transmitancia para el lazo cerrado es:

$$H(z) = \frac{0.5}{z^3 - 0.25z}$$ **(0.25 ptos)**

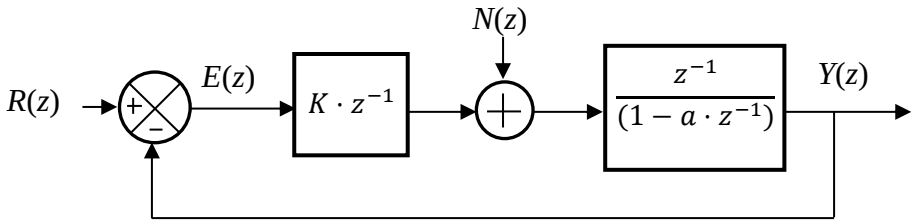
Con lo que el error permanente ante entrada escalón será:

$$e_p = 1 - \lim_{z \to 1}(z - 1)\frac{0.5}{z^3 - 0.25z} \times \frac{z}{z - 1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$ **(0.5 ptos)**

2- Para el sistema discreto de la figura con $\Delta T = 1$ y $K > 0$:

a) (4 ptos.) determine los valores de $a$ y $K > 0$ para los que se logra un error permanente finito ante una rampa unitaria en $R(z)$ y entrada $N(z)$ nula.

b) (2 ptos.) si se aplican escalones unitarios en $R(z)$ y $N(z)$ simultáneamente, determine el error permanente cuando la ganancia del controlador se fija como $K = 0.5 \cdot K_c$, donde $K_c$ corresponde a la ganancia crítica del sistema realimentado con el valor de ***a*** encontrado en el punto anterior.




**Sol**.

a) Cálculo de $a$ y $K$ Error permanente finito: **(1 pto)**

$$E(z) = \frac{1 - a \cdot z^{-1}}{1 - a \cdot z^{-1} + Kz^{-2}} R(z) = \frac{z(z-a)}{z^2 - a \cdot z + K} \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_p = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z(z-a)}{z^2 - a \cdot z + K} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \to 1} \frac{Tz^2}{z^2 - a \cdot z + K} \frac{(z-a)(z-1)}{(z-1)^2}$$

Claramente, el único valor de $a$ que permite error permanente finito ante rampa (si el sistema es estable) es $a = 1$. **(0.5 ptos)**

En este caso $e_p = \frac{T}{K}$ **(0.5 ptos)**

Se busca el valor de $K$ que garantice estabilidad: $q(z) = z^2 - 1z + K = 0 \quad \rightarrow \quad z_{1,2} = 0.5 \pm \sqrt{1 - 4K}$ **(0.5 ptos)**

Como los módulos de ambas raíces deben ser menores a 1 para todo $K > 0$ **(0.5 ptos)**

Esto se cumple si $K_1 < 0.1875$ y $K_2 < 0.3125$, luego el rango de valores que aseguran estabilidad es: **(1 pto)**

$$0 < K < 0.1875$$

b) La función de transmitancia para la salida $Y(z)$ en función de $R(z)$ y $N(z)$ es: **(0.5 ptos)**

$$Y(z) = \frac{K}{z^2 - z + K} R(z) + \frac{z^2 - z}{z^2 - z + K} N(z)$$

La ganancia crítica es $K_c = 0.1875$, luego asignando $K = 0.5K_c = 0.09375$ **(0.5 ptos)**

La salida para escalón en $R(z)$ y $N(z)$ es: **(0.5 ptos)**

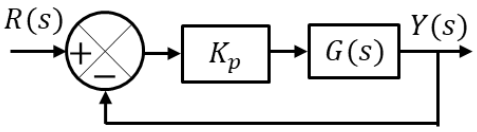
$$Y(z) = \frac{0.09375}{z^2 - z + 0.09375} \frac{z}{z-1} + \frac{z(z-1)}{z^2 - z + 0.09375} \frac{z}{z-1}$$

y en régimen permanente: **(0.25 ptos)**

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{0.09375}{z^2 - z + 0.09375} \frac{z}{z-1} + \frac{z(z-1)}{z^2 - z + 0.09375} \frac{z}{z-1} = \frac{0.09375}{z^2 - z + 0.09375} + 0 = \frac{0.09375}{0.09375} = 1$$

Es decir $e_p = 1 - y(\infty) = 0$ **(0.25 ptos)**

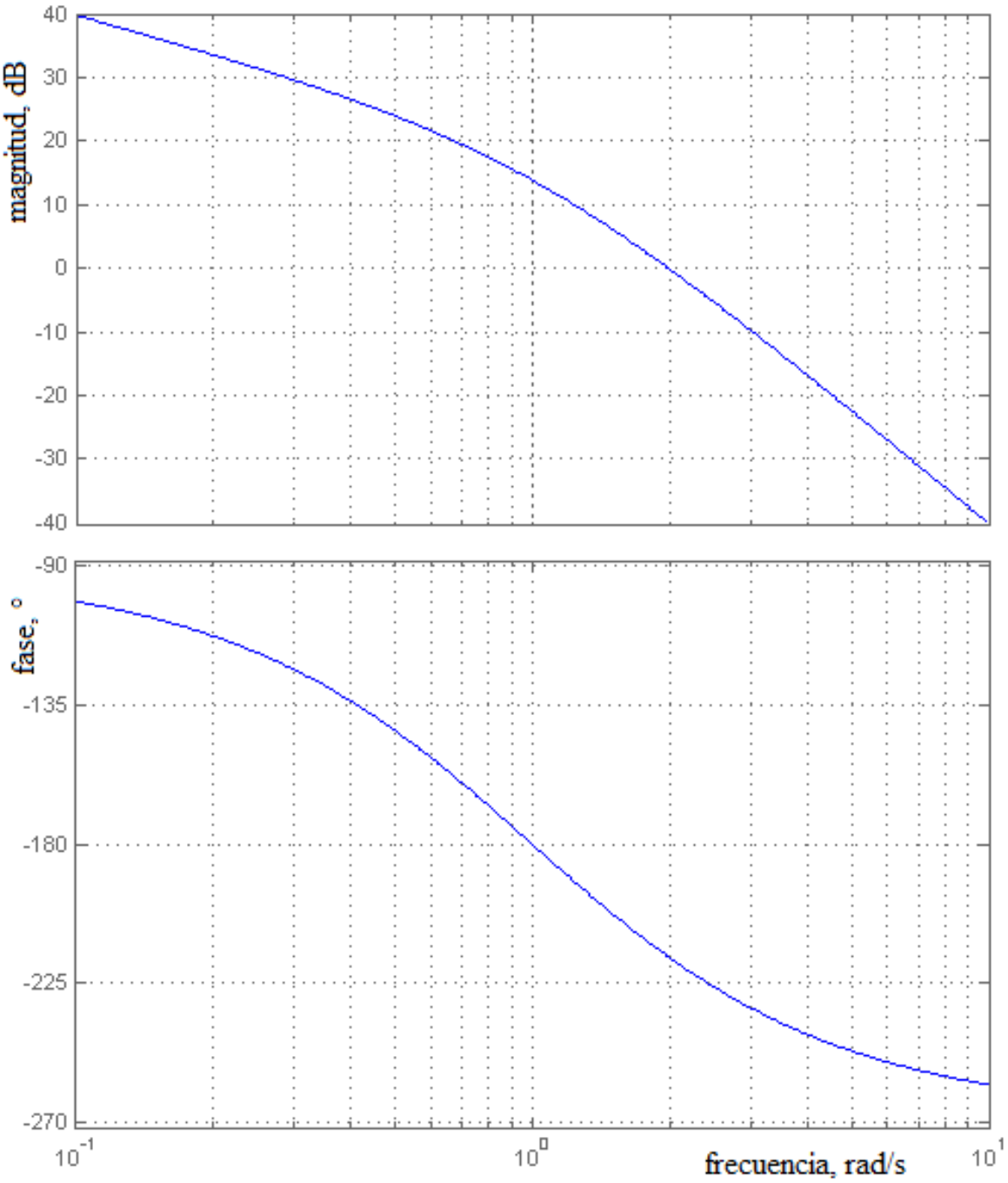
3- En el diagrama en bloques, la planta $G(s)$ es de alto orden, posee un retardo $L$ y es realimentada a través de un controlador proporcional. El diagrama de Bode de $G(s)$ que se muestra abajo, se ha obtenido experimentalmente y corresponde al caso $L = 0$.

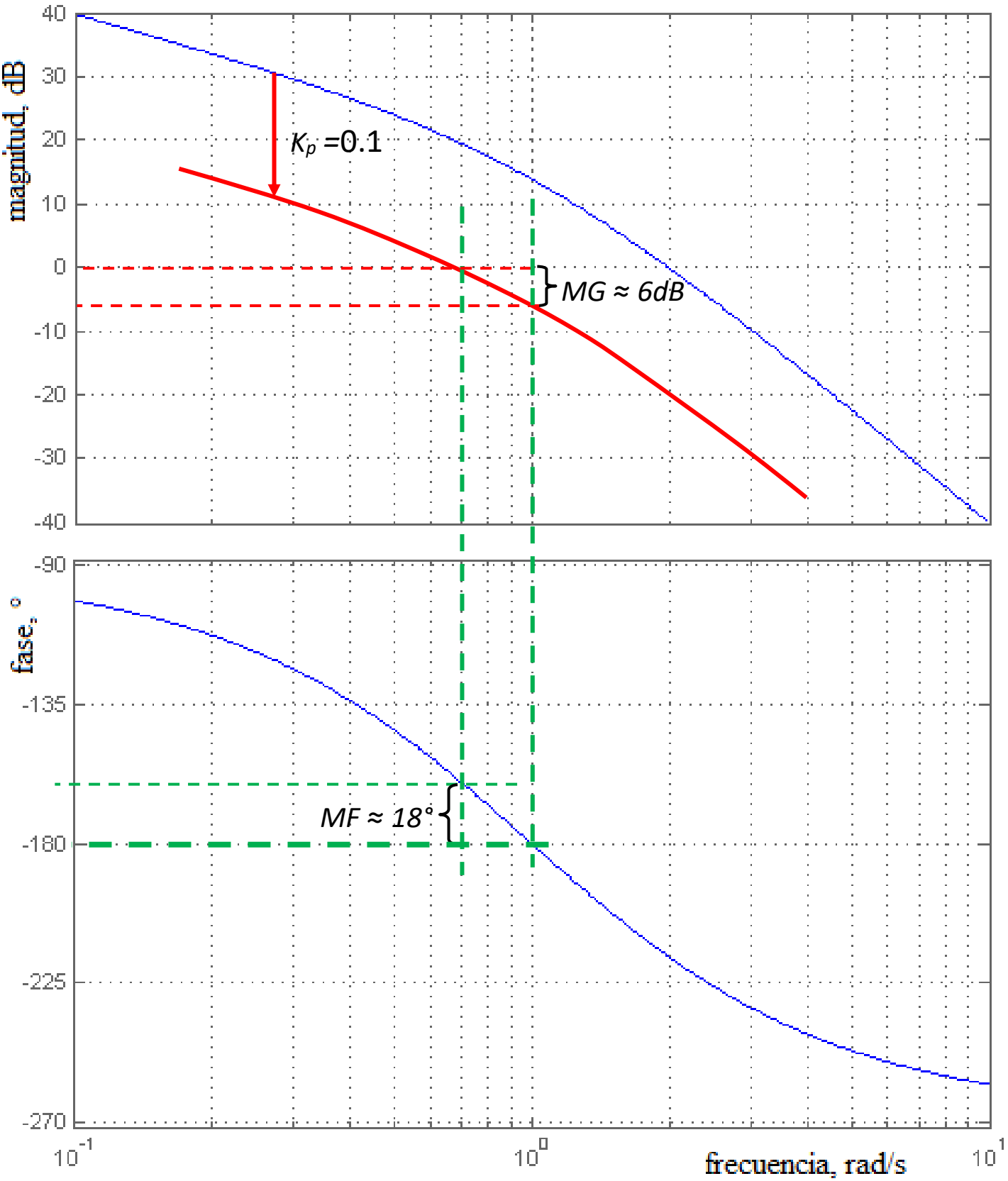



Usando valores extraídos del gráfico de Bode:

a) (4 ptos.) Encuentre la ganancia del controlador proporcional $K_p$ (con $L = 0$) que asegure márgenes de ganancia y fase de al menos 6 dB y 15° respectivamente.
b) (1 ptos.) Para la ganancia $K_p$ encontrada en a), con $L = 0$ y con la fase convergiendo a -90° para frecuencias muy bajas (subplot inferior), ¿podría estimar cuál es el error permanente ante entrada escalón? Fundamente.
c) (1 pto.) Para la ganancia $K_p$ encontrada en a), ¿cuál es el máximo retardo $L$ que soportaría la planta antes de que el sistema realimentado se vuelva inestable?

NOTA: debe entregar el gráfico de Bode con las anotaciones que apoyen sus resultados






a) Del gráfico, si $K_p = 0.1$ $(-20\ dB)$; los márgenes nos quedan $MG = 6\ dB$ y $MF = 18°$. CUALQUIER valor MENOR QUE 0.1 está correcto.

Diagrama de Bode de magnitud **(1 pto)**

Diagrama de Bode de fase **(1 pt)**

Explicación de criterio para obtener Kp **(1 pto)**

Determina valor de Kp que cumple los requerimientos **(1 pto)**

b) Si la fase converge a -90° por la izquierda, se trata de una planta con acción integral, por lo que el error permanente ante escalón será nulo. **(1 pto)**

c) $\omega L = 0.2L = 18° \frac{\pi}{180} \quad \rightarrow \quad L = \pi/2$ (DEPENDE DEL VALOR < 0.1 QUE HAYAN ELEGIDO EN a)) **(1 pto)**