Información Importante

Tiempo

Respuesta Transitoria

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad M_p = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \qquad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad \omega_n t_r = 1.76\zeta^3 - 0.417\zeta^2 + 1.039\zeta + 1$$

Lugar geométrico de las raíces

1. Preparar la ecuación característica: $1 + KF(s)$
2. Determinar los segmentos del eje real donde existe el LGR.
3. Determinar los ceros en el infinito, si existe, mediante las asíntotas centradas en σ_A con ángulo ϕ_A, e

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} \qquad \phi_k = \frac{2k-1}{n-m}180°, k = 1, 2, \ldots, n-m$$

4. Determinar los puntos donde el LGR cruza el eje imaginario (si lo hace)
5. Determinar el punto de quiebre, en caso de existir: $K = p(s) \Rightarrow \frac{dp(s)}{ds}$
6. Determine los ángulos de partida y llegada: $\lambda\phi_k^{sal} = \sum_{j=1}^{m}\psi_j - \sum_{i=1,i\neq k}^{n}\phi_i - 180° - 360°(k-1)$

Frecuencia

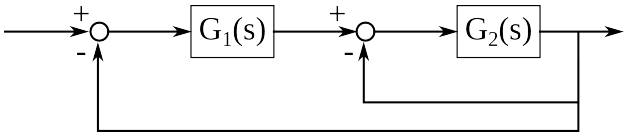
Ancho de Banda

$$\omega_{BW} = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

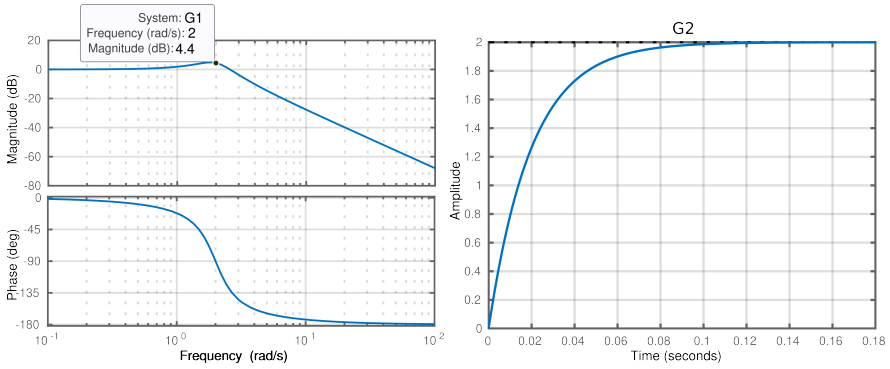
Respuesta Transitoria

$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s\zeta}\sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad \omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad \mathcal{M}_p = \frac{1}{2\zeta} \quad \omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

1: La respuesta de las funciones de transferencia ($G_1(s), G_2(s)$) del sistema descrito a continuación:



Son las siguientes:



Determine: Máximo sobrepaso M_p, Tiempo de subida t_r, Tiempo de establecimiento t_s, Error en estado estable e_{ss}
(25%)

Para caracterizar el sistema completo, debemos encontrar las funciones de transferencia para $G_1(s)$ y $G_2(s)$. La información que disponemos son la respuesta de magnitud y fase en frecuencia para el sistema $G_1(s)$ y la respuesta a una entrada paso para el sistema $G_1(s)$.

La gráfica de $G_2(s)$ nos indica que se trata de un sistema de primer orden. Hay que notar que esta respuesta tiene una ganancia mayor a 1, entonces la función de transferencia se puede expresar como

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

En base a esto, su respuesta, en tiempo, a una entrada paso estará dada por

$$c(t) = \frac{K}{a} - \frac{K}{a}e^{-at}$$

Por lo tanto, el valor de a se puede determinar usando el concepto de constante de tiempo, $\tau = 1/a$. Específicamente, la constante de tiempo se considera al tiempo que le toma a la respuesta del sistema en alcanzar el 63% de su valor final. En este caso, dado que el valor final del sistema es 2, el 63% de la respuesta será: 1.26. Si buscamos este valor en la gráfica, podemos encontrar el valor de τ y así el valor de a. Para este caso tenemos que $\tau = 0.02 \Rightarrow a = 50$. Note que estos valore son aproximados. Ahora el valor que nos resta identificar es la ganancia K, esta ganacia es diferente de a debido a que el valor final de la respuesta del sistema es 2. Entonces, $\frac{K}{a} = 2 \Rightarrow K = 2 \cdot a = 100$. Por lo tanto la función de transferencia esta dada por

$$G_2(s) = \frac{100}{s+50}$$

Con respecto al sistema $G_1(s)$, notamos que se trata del diagrama de bode para un sistema de segundo orden. La ecuación general de un sistema de segundo orden se expresa como:

$$G_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Entonces, necesitamos conocer ζ y ω_n (coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural). Para encontrar ω_n se necesita encontrar la frecuencia de corte en el diatrama de bode. Por otra parte, se debe recordar que la respuesta en frecuencia de un sistema sub-amortiguado sufre deformaciónes deacuerdo al valor de ζ en la frecuencia de corte.

En base a lo anterior, se observa que la respuesta en magnitud sufre una deformación en $\omega = 2$. Por ende la frecuencia de corte será 2 y consecuentemente $\omega_n = 2$. Asímismo, la deformación que sufre el diagrama de bode se puede calcular mediante $-20\log_{10}(2\zeta)$. La gráfica muestra que el máximo valor de ganancia en frecuencia es 4.4; entonces, $-20\log(2\zeta) = 4.4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{10^{-4.4/20}}{2} \\ &= 0.3\end{aligned}$$

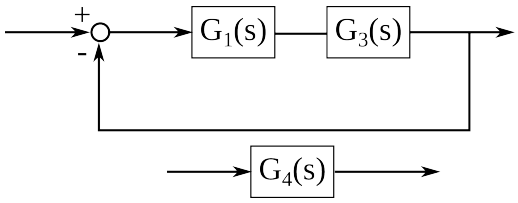
Con esta información, se tiene que

$$\begin{aligned}G_1(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{4}{s^2 + 1.2s + 4}\end{aligned}$$

Una vez obtenidos $G_1(s)$ y $G_2(s)$, podemos encontrar el sistema equivalente para caracterizarlo, lo primero que se debe realizar es eliminar los lazos de realimentación internos:

Específicamente, tenemos:

$$\begin{aligned}G_3(s) &= \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)} \\ &= \frac{100}{s+150}\end{aligned}$$



$$G_4(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_3(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_3(s)} = \frac{400}{s^3 + 151.2s^2 + 184s + 1000}$$

Las ecuaciones que conocemos para caracteriar sistemas son ecuaciones válidas para sistemas de segundo orden. El sistema que acabamos de encontrar es un sistema de tercer orden; por lo tanto necesitamos encontrar los polos dominantes caracterizar el sistema en base a estos polos.

El sistema $G_4(s)$ tiene los siguientes polos

- $p_1 = -150.02$
- $p_2 = -0.59 - 2.5j$
- $p_3 = -0.59 + 2.5j$

Debido a que el primer polo se encuentra muy alejado de los polos complejos, las característica de su respuesta transitoria se pueden aproximar mediante los polos dominantes del sistema, específicamente:

- $p_2 = -0.59 - 2.5j$
- $p_3 = -0.59 + 2.5j$

Con esta aproximación se determina:

- $\%OS = 47.8$
- $t_r = 0.482$ s
- $t_s = 6.52$ s

Por otra parte el error en estado estable, se determina con el sistema completo

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_P} \qquad K_P = \lim_{s \to 0} G_1(s) * G_3(s)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + 400/600} = 0.6$$

- Determina función Transferencia 10%
  - $G_1(s)$ 5%
  - $G_2(s)$ 5%
- Cierra el lazo de control correctamente 5%
- Aproxima a un sistema de 2do orden 5%
- Calcula correctamente las características solicitadas 5%

2: Suponga que un sistema con lazo de realimentación unitario tiene como planta:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Determine el compensador en adelanto, $D(s) = K\frac{s+z}{s+p}$, que permita ubicar los polos dominantes del sistema en lazo cerrado en $s_{1,2} = -2 \pm 2j$. Además, dibuje el LGR del sistema compensado. ***(30%)***

Debido a que se desea que en lazo cerrado el sistema tenga como polos dominantes $s_{1,2} = -2 \pm 2j$, el sistema debería cumplir con:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad \omega_n = 2\sqrt{2}$$

En base a esto se escoge el cero y el polo del compensador como:

$$z = \frac{\omega_n}{4} = 0.7071 \qquad\qquad p = 100z = 70.71$$

No obstante, estos valores no garantizan que los polos dominantes del sistema pasen paro los polos $s_{1,2} = -2 \pm 2j$. Específicamente, al evaluar el polo deseado en el sistema compensado se obtiene el siguiente ángulo de fase:

$$\begin{aligned} G_1(s)|_{s=-2+2j} &= \frac{s+0.7071}{s+70.71} \cdot \frac{1}{s^2}|_{s=-2+2j} \\ &= -148.78 \end{aligned}$$

Por ende si se dibujase el LGR del sistema compensado, el LGR no pasaría por el polo deseado. Debido a que no se cumple con esta condición, se debe ajustar el polo o el cero del compensador. En este caso se decide ajustar el cero del compensador tal que:

$$\begin{aligned} &\angle(s+z)|_{-2+2j} - \angle(s^2)|_{-2+2j} - \angle(s+70.71)|_{-2+2j} = 180 \\ &\angle(s+z)|_{-2+2j} = 180 + \angle(s^2)|_{-2+2j} + \angle(s+70.71)|_{-2+2j} \\ &\angle(s+z)|_{-2+2j} = 180 + -90 + 1.67 = 91.67 \\ &\frac{2}{-2+z} = \tan(91.67) \\ &\Rightarrow z = 1.9417 \end{aligned}$$

Entonces, el compensador será

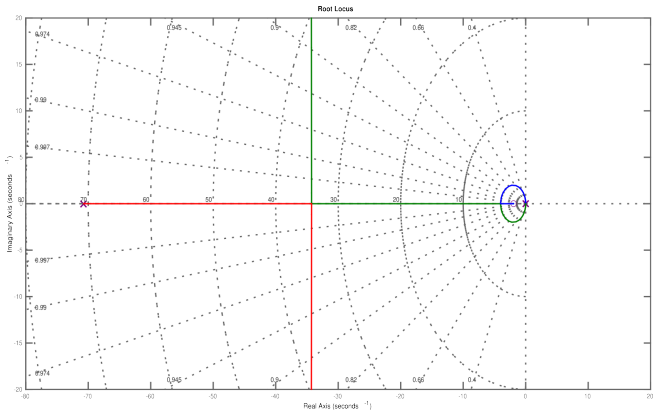
$$D(s) = K\frac{s+1.9417}{s+70.71}$$

Para seleccionar el valor de la ganancia K se puede utilizar la condición de Magnitud del LGR donde:

$$\begin{aligned} &K\left(\left|\frac{s+1.9417}{s+70.71} \cdot \frac{1}{s^2}\right|\right)\Big|_{s=-2+2j} = 1 \\ &\Rightarrow K = 274.8 \end{aligned}$$

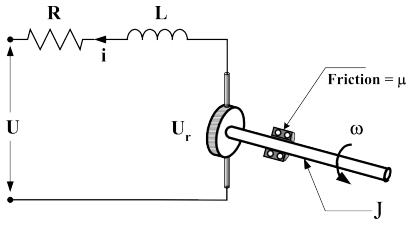
Con respecto al LGR del sistema compensado se tiene como resultado:

- Determina el cero y polo del compensador 5%



- Ajusta el cero o polo del compensador para la respuesta deseada 5%
- Calcula la ganancia 10%
- Dibuja el LGR del sistema 10%

3: Para el sistema mostrado en la figura, sintonice un controlador PD mediante el método de Ziegler-Nichols para controlar la velocidad angular ω. Los parámetros del motor son:



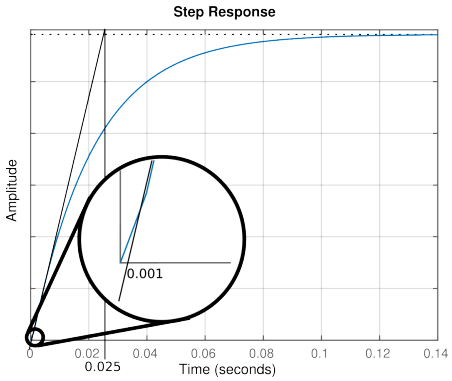
- *Constante de Torque,* $K_m = 4.1 \times 10^{-2}$*, Nm/A*
- *Constante de fuerza electromotriz,* $K_b = 4.1 \times 10^{-2}$*, V.s/rad*
- *Resistencia de Armadura,* $R_a = 1.9$*,* Ω
- *Inductancia de Armadura,* $I_a = 1.0^{-3}$*, H*
- *Momento de inercia del rotor,* $J = 3.87^{-3}$*, Kg/m*^{2}
- *Coeficiente de fricción viscosa,* $\mu = 0.16$*, N.m.s*

La respuesta del sistema a una entrada paso es:
(30 %)

En base a la respuesta del sistema se podría aplicar el método de sintonización de Ziegler-Nichols en lazo abierto. Sin embargo, el gráfico carece de toda la información necesaria para calcular las ganancias del PID. Específicamente, se requiere el valor final de la respuesta del sistema para determinar la pendiente de la curva de reacción $R = A/\tau$, donde $\tau = 0.025 - 0.001$, y A se refiere al valor final de la respuesta.

Para determinar el valor final de la respuesta se determina la función de transferencia del motor, en este caso estará dada por:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K_m}{(R_a + L_a * s)(J * s + u) + K_b * K_m}$$
$$= \frac{0.041}{3.87 \times 10^{-06} s^2 + 0.007513 s + 0.3057}$$



El valor final de la respuesta del sistema se puede encontrar cuando $t \to \infty$. Entonces aplicando el teorema del valor final tendríamos que

$$\begin{aligned}\omega_{final} &= \lim_{s\to 0} sG(s)V(s) = s \cdot \frac{0.041}{3.87 \times 10^{-06}s^2 + 0.007513s + 0.3057} \cdot \frac{1}{s} \\ &= 0.1341\end{aligned}$$

Con esta información, se obtiene

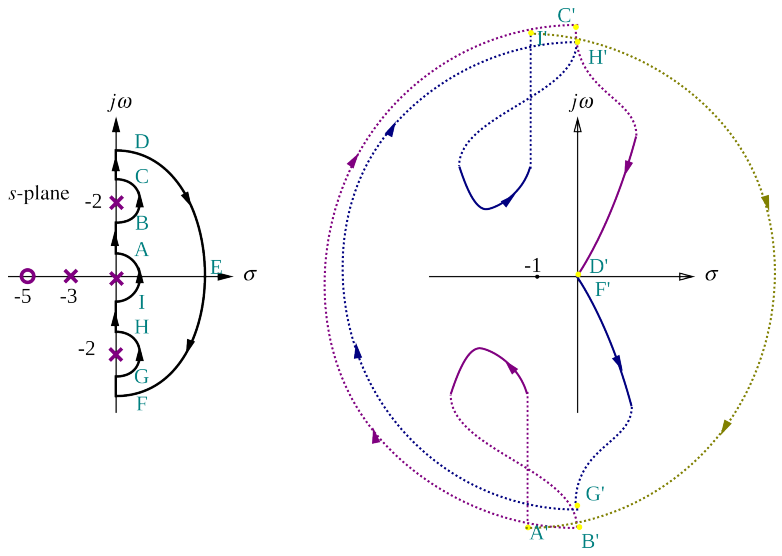
$$R = \frac{0.1341}{0.025 - 0.001} = 5.59 \qquad\qquad L = 0.001$$

Por ende el PID estará dado por

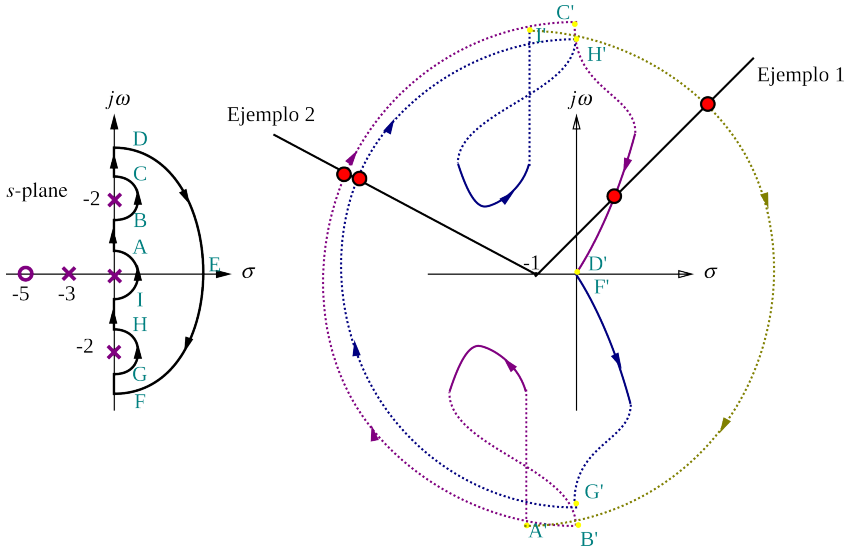
$$\begin{aligned}Kp &= 1.2/(R * L) = 214.765 \\ Ti &= 2 * L = 0.0020 \\ Td &= 0.5 * L = 5 \times 10^{-4} \\ PID &= Kp * (1 + 1/(Ti * s) + Td * s) = 214.765 + \frac{1.0738 \times 10^5}{s} + 0.1074s\end{aligned}$$

- Determina la función de transferencia 15%
- Calcula correctamente los valores de las ganancias del PID 15%

4: En base al diagrama de Nyquist (derecha), determine si el sistema es estable o inestable. ***(15 %)***



Para determinar el número de veces que se encierra al punto crítico -1 en contra de las manecillas del reloj (P) se traza un linea en dirección arbitraria y se cuenta el número de intersecciones. A continuación se muestran dos ejemplos.



En este caso cambiará la dirección de los semicírculos con radio infinito, en lugar de ser anti-horario deberá dibujarse de forma horario. Entonces, al determinar el número de veces que se encierra al punto crítico -1 se tiene $N = -2$.

Por lo tanto, la estabilidad del sistema estará dada por:

$$\begin{aligned} Z &= P - N \\ &= 0 - (-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

- Calcula correctamente la estabilidad del sistema 15%