Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 2

Diagrama de Nyquist y Bode

19 de Mayo 2025

Francisco Aguilera - francisco.aguilera@uc.cl

Marco teórico

En el curso IEE2103 (Señales y Sistemas) aprendimos que toda señal puede ser descompuesta como una suma de señales sinusoidales. Estas señales se caracterizan por su amplitud y, en especial, por su **frecuencia**. Al poder expresar cualquier señal como una suma de sinusoides, podemos analizar el comportamiento de las frecuencias que componen dicha señal. Es por esto que las técnicas de análisis en frecuencia son útiles para estudiar la respuesta de los sistemas. A continuación, veremos dos de estas técnicas.

Diagrama de Nyquist

Para construir los bosquejos de Nyquist, lo que se hace es mapear el contorno "D" del plano s mediante la función de transferencia $H(s)$. Es decir, cada punto del contorno de Nyquist se evalúa en la función $H(s)$, y el valor resultante se grafica en otro plano complejo. Este último se conoce como el diagrama de Nyquist de $H(s)$.

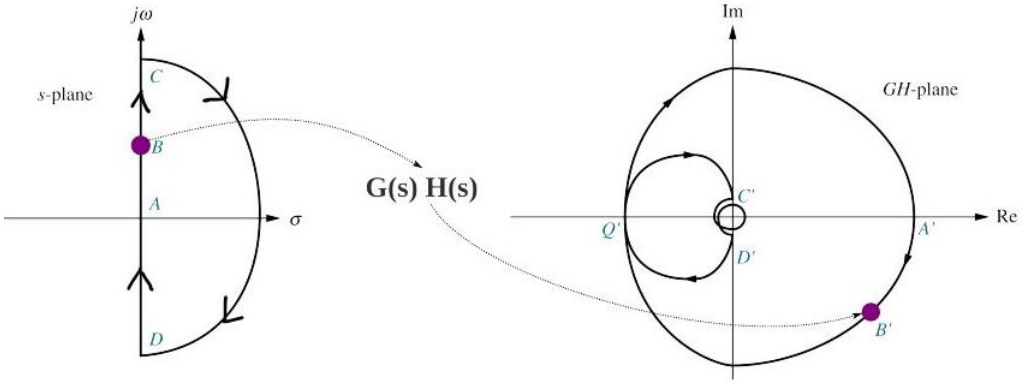


Figura 1: Contorno D de Nyquist y diagrama de Nyquist de ejemplo, respectivamente.

El contorno D se forma a partir del eje imaginario (desde $-j\infty$ hasta $j\infty$), conectado mediante

un semicírculo de radio infinito en el semiplano derecho. En estricto rigor, para obtener el diagrama de Nyquist se debería evaluar todos los puntos del contorno D, lo cual no es factible, por lo que en la práctica se seleccionan algunos puntos representativos y se estima la curva resultante.

Una forma sencilla de trazar el diagrama de Nyquist es reemplazar s por $j\omega$ y separar la expresión en su parte real e imaginaria, para obtener puntos explícitos. Otra alternativa igualmente válida es usar la representación polar (magnitud y fase). Luego, se evalúa ω desde 0 hasta ∞ para obtener la primera mitad del diagrama, y por simetría se completa la otra mitad (correspondiente a ω desde $-\infty$ hasta 0). Si con esto se obtiene una curva cerrada, el diagrama está completo; de lo contrario, se cierra con una semicircunferencia correspondiente al tramo del contorno desde C hasta D de la figura 1.

En caso de que existan polos sobre el eje imaginario, es necesario "rodearlos" en el contorno D. Lo más habitual es hacerlo por la derecha. Una vez ajustado el contorno, se continúa con la construcción del diagrama de Nyquist usando este nuevo contorno.

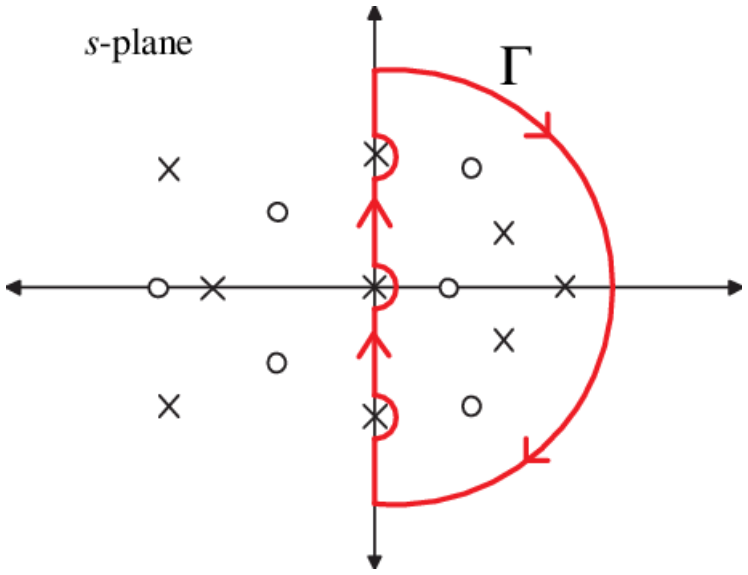


Figura 2: Contorno D con polos sobre el eje imaginario.

Al construir el diagrama del sistema en **lazo abierto** (incluyendo el controlador pero no el lazo), ¡Se puede estudiar la **estabilidad del lazo cerrado**! Esto se hace con la relación:

$$Z = N + P$$

Donde

- Z es la cantidad de ceros (raíces) inestables de la ecuación característica del lazo cerrado. Como queremos que sea estable, vamos a forzar $\mathbf{Z = 0}$.
- N es la cantidad de veces que el contorno resultante rodea al punto $(-1, 0)$ en sentido horario menos la cantidad que se rodeó en sentido antihorario.

- P es la cantidad de polos inestables del lazo abierto.

Margen de Ganancia

El margen de ganancia (MG) representa el factor máximo por el cual se puede incrementar la ganancia del sistema sin que el diagrama de Nyquist encierre al -1. Gráficamente, el margen de ganancia se determina localizando el punto en el diagrama de Nyquist donde la parte imaginaria es cero y la parte real es $-a$. En este caso, el margen de ganancia correspondería a $1/|a|$.

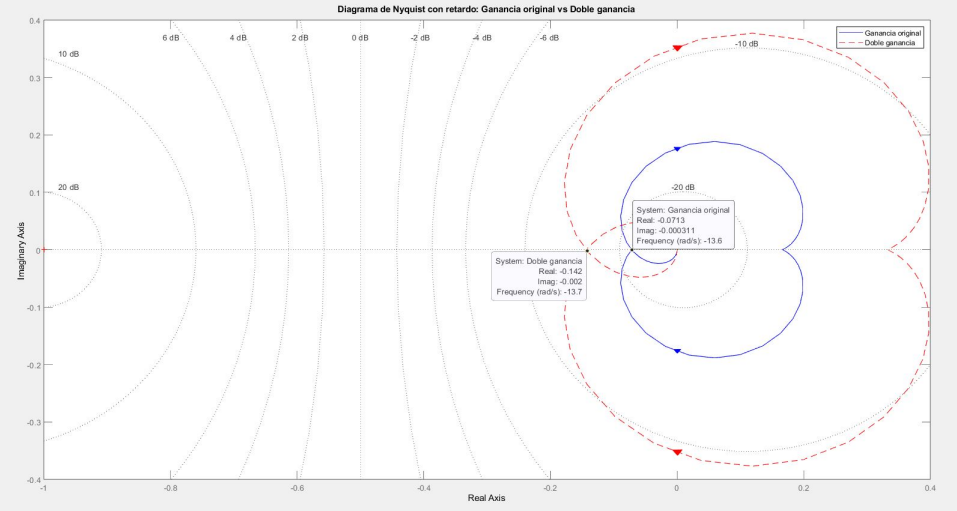


Figura 3: Efecto de la ganancia en diagrama de Nyquist

Para obtener el MG mediante el lazo abierto, si la función de transferencia en lazo abierto es $H(s)$, se obtiene el ω_1 tal que $Im[H(j\omega_1)] = 0$, para luego obtener el MG como:

$$MG = -\frac{1}{|H(j\omega_1)|}$$

Margen de Fase

El margen de fase (MF) representa el ángulo adicional de desfase que puede soportar el sistema antes de que el diagrama de Nyquist del lazo abierto encierre al -1. Gráficamente, es cuántos grados se debiese torcer el diagrama hasta que el -1 se encierre, como la figura 4 ilustra:

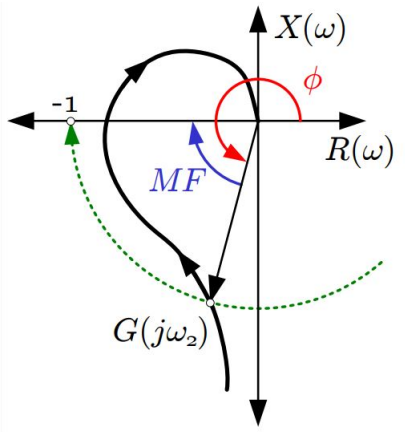


Figura 4: Efecto del desfase en el diagrama de Nyquist

Para obtener el margen de fase mediante la función de transferencia en lazo abierto $H(s)$, primero se encuentra la frecuencia ω_2 tal que $|H(j\omega_2)| = 1$, y luego se calcula el margen de fase como:

$$MF = -\arctan\left(\frac{|Im(H(j\omega_2))|}{|Re(H(j\omega_2))|}\right)$$

Diagramas de Bode

Además del diagrama de Nyquist, otra herramienta fundamental para el análisis de sistemas en el dominio de la frecuencia es el diagrama de Bode. Los diagramas de Bode consisten en dos gráficos separados que muestran la respuesta en frecuencia de un sistema $H(s)$ al sustituir s por $j\omega$:

1. Un gráfico de la **magnitud** de $H(j\omega)$ (generalmente en decibelios, dB) en función de la frecuencia ω (en una escala logarítmica).
2. Un gráfico de la **fase** de $H(j\omega)$ (generalmente en grados) en función de la frecuencia ω (también en una escala logarítmica).

La magnitud en decibelios se calcula como:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

La fase se calcula como:

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}}\right)$$

Una de las grandes ventajas de los diagramas de Bode es que, para funciones de transferencia que son productos de términos más simples (constantes, polos/ceros en el origen, polos/ceros reales, pares de polos/ceros complejos conjugados), la magnitud total en dB es la suma de las magnitudes en dB de cada término, y la fase total es la suma de las fases de cada término. Esto permite construir los diagramas mediante aproximaciones asintóticas (rectas).

Construcción del Diagrama de Magnitud (Asintótico)

Para trazar el diagrama de magnitud, se analizan los diferentes tipos de factores en $H(s)$:

- **Ganancia K**: Aporta una línea horizontal constante de $20 \log_{10} |K|$ dB.
- **Polos/ceros en el origen (s^N)**:
  - Un integrador ($1/s$) introduce una recta con pendiente de -20 dB/década que cruza el eje de 0 dB en $\omega = 1$.
  - Un derivador (s) introduce una recta con pendiente de $+20$ dB/década que cruza el eje de 0 dB en $\omega = 1$.
  - Múltiples polos/ceros en el origen ($1/s^N$ o s^N) tienen pendientes de $-20N$ dB/década o $+20N$ dB/década, respectivamente.
- **Polos/ceros reales simples ($(1 + s\tau)$ o $1/(1 + s\tau)$)**:
  - Introducen una "frecuencia de quiebr" (break frequency) en $\omega_c = 1/\tau$.
  - Para un cero $(1 + j\omega\tau)$: la asíntota es 0 dB hasta ω_c, y luego una recta con pendiente de $+20$ dB/década.
  - Para un polo $1/(1 + j\omega\tau)$: la asíntota es 0 dB hasta ω_c, y luego una recta con pendiente de -20 dB/década.
- **Polos/ceros cuadráticos ($1 + 2\zeta(s/\omega_n) + (s/\omega_n)^2$ o su inverso)**:
  - Introducen una frecuencia de quiebre en ω_n (frecuencia natural no amortiguada).
  - Para un par de ceros cuadráticos: la asíntota es 0 dB hasta ω_n, y luego una recta con pendiente de $+40$ dB/década.
  - Para un par de polos cuadráticos: la asíntota es 0 dB hasta ω_n, y luego una recta con pendiente de -40 dB/década.
  - El factor de amortiguamiento ζ determina la desviación de la asíntota cerca de ω_n (picos para $\zeta < 0.707$).

El diagrama de magnitud total se obtiene sumando gráficamente las contribuciones de cada factor.

Construcción del Diagrama de Fase (Asintótico)

De manera similar, el diagrama de fase se construye sumando las contribuciones de fase de cada factor:

- **Ganancia K**: Aporta $0°$ si $K > 0$ y $-180°$ (o $+180°$) si $K < 0$.
- **Polos/ceros en el origen (s^N)**:
  - Un integrador ($1/j\omega$) aporta una fase constante de $-90°$.
  - Un derivador ($j\omega$) aporta una fase constante de $+90°$.

- Múltiples polos/ceros en el origen ($1/(j\omega)^N$ o $(j\omega)^N$) aportan fases constantes de $-90N°$ o $+90N°$.

- **Polos/ceros reales simples ($(1 + j\omega\tau)$ o $1/(1 + j\omega\tau)$)**:
  - Un cero $(1 + j\omega\tau)$: aporta $0°$ para $\omega \ll 1/\tau$, $+90°$ para $\omega \gg 1/\tau$, y $+45°$ en $\omega = 1/\tau$. La transición ocurre aproximadamente entre $0.1/\tau$ y $10/\tau$.
  - Un polo $1/(1 + j\omega\tau)$: aporta $0°$ para $\omega \ll 1/\tau$, $-90°$ para $\omega \gg 1/\tau$, y $-45°$ en $\omega = 1/\tau$.

- **Polos/ceros cuadráticos**:
  - Un par de ceros cuadráticos: la fase varía de $0°$ a $+180°$.
  - Un par de polos cuadráticos: la fase varía de $0°$ a $-180°$.
  - La transición es más aguda para valores pequeños de ζ y ocurre alrededor de ω_n.

El diagrama de fase total se obtiene sumando las contribuciones de fase de cada factor.

Márgenes de Ganancia y Fase en Diagramas de Bode

Al igual que con Nyquist, los diagramas de Bode de la función de transferencia de **lazo abierto** se utilizan para determinar la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado.

Margen de Ganancia (MG)

En los diagramas de bode se determina de la siguiente manera:

1. Encuentre la frecuencia en la que la fase de $H(j\omega)$ es igual a $-180°$.
2. En esta frecuencia, lea la magnitud $|H(j\omega)|$ en dB del diagrama de magnitud.
3. El margen de ganancia (MG) es el negativo de esta magnitud

Margen de Fase (MF)

De forma muy parecida a la anterior, se determina de la siguiente manera:

1. Encuentre la frecuencia en la que la magnitud de $H(j\omega)$ es igual a 0 dB.
2. En esta frecuencia ω, lea el ángulo de fase $\angle H(j\omega)$ del diagrama de fase.
3. El margen de fase (MF) se calcula como la diferencia entre esta fase y $-180°$.

La siguiente figura ilustra estos margenes dentro del diagrama de Bode:

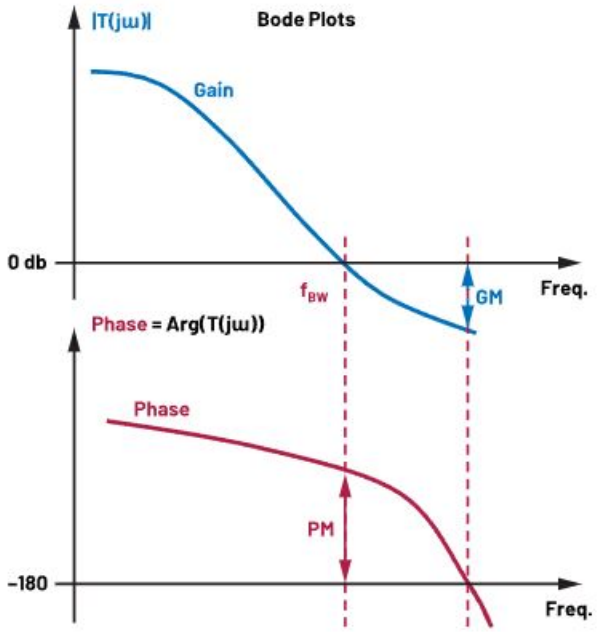


Figura 5: Margenes en diagrama de Bode

Problema 1

Suponga que tiene el siguiente sistema:

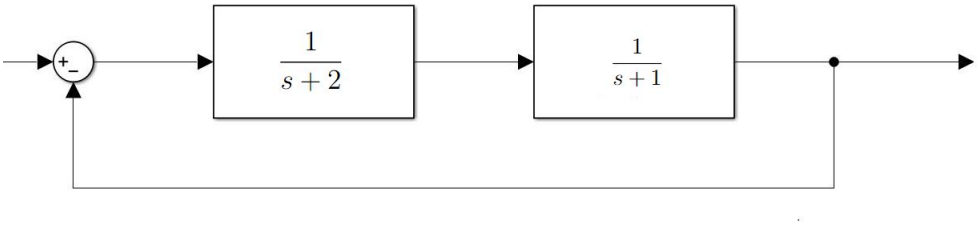


Figura 6: Sistema en lazo cerrado

Bosqueje el diagrama de Nyquist del sistema, ¿Es estable?.

Solución:

Al hacer el diagrama de Nyquist, de debe llegar algo como lo siguiente:

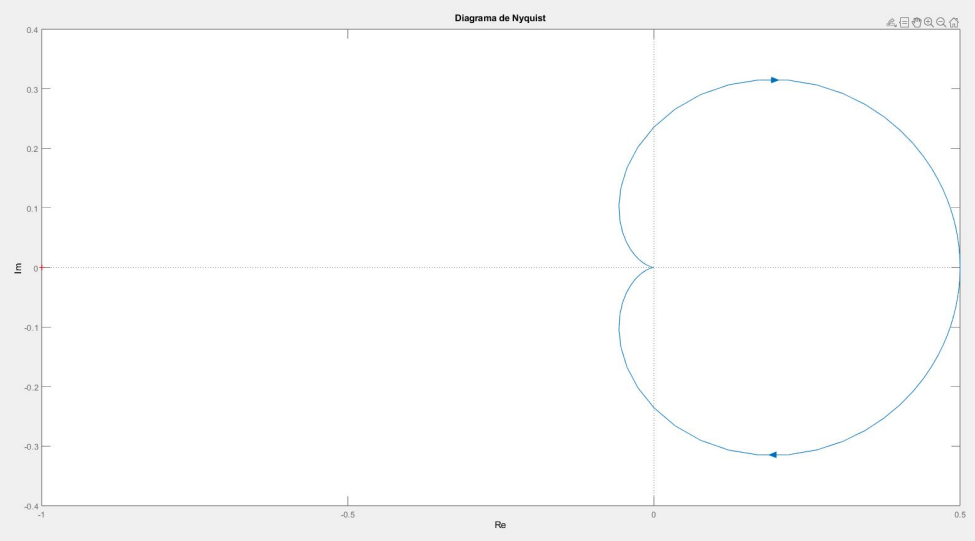
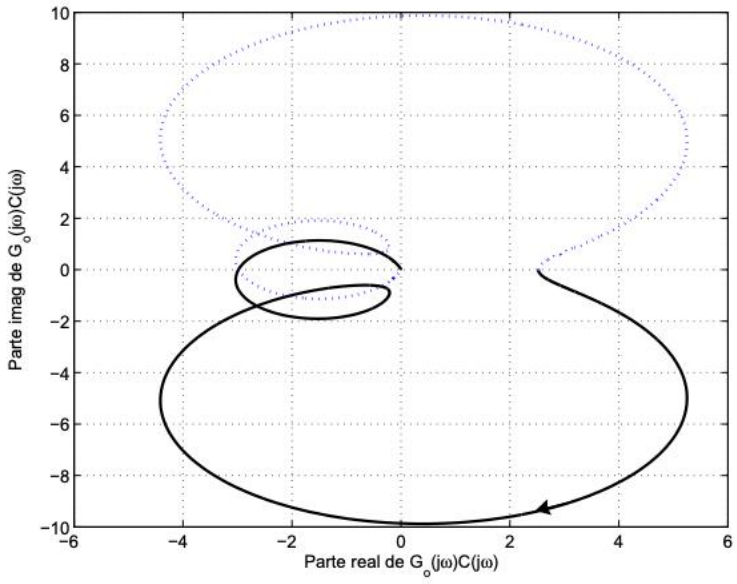


Figura 7: Diagrama de Nyquist resultante pregunta 1

Como el -1 no se encierra ninguna vez, y la cantidad de polos en el semiplano derecho es 0, $N = 0$, por lo que el sistema es estable.

Problema 2

Considere el siguiente diagrama de Nyquist de $G_o(s)C(s)$ (Asuma que no tiene polos en el semiplano derecho):



1. ¿Es el lazo cerrado estable?

> **Solución:**
>
> Del diagrama se observa que el punto $(-1, 0)$ se encierra dos veces en santido horario, por lo que $N = 2$. Luego, como se nos dice que el lazo abierto no tiene polos en el semipolano derecho, $P = 0$. Así, por el teorema de Nyquist:
>
> $$N = Z - P \tag{1}$$
> $$2 = Z - 0 \tag{2}$$
> $$Z = 2 \tag{3}$$
>
> Como $Z = 2$, el lazo cerrado no es estable.

2. Estime, a partir del gráfico, la ganancia que haría que los polos dominantes del lazo cerrado estuviesen en el eje imaginario

> **Solución:**
>
> Lo pedido es equivalente a que el diagrama de Nyquist pase justo por encima de $(-1, 0)$. Esto se obtiene cuando la ganancia es multiplicada por $\frac{1}{3}$ aproximadamente.

Pregunta 3

Los motores de las articulaciones de un brazo robótico son descritos de acuerdo con la siguiente función de transferencia:

$$F(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{2}{s(s+4)}$$

Al graficar con Matlab el diagrama de Nyquit, se obtiene lo siguiente:

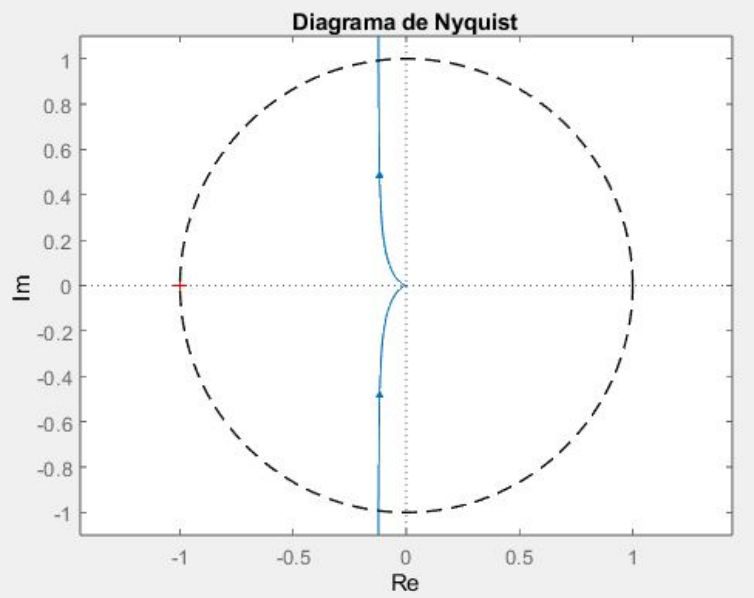


Figura 8: Diagrama nyquist brazo robótico

A partir de este, ¿Cuál es el margen de ganancia y de fase?

Solución:

Del gráfico es directo llegar a que el MG $= \infty$, ya que no existe un K tal que el -1 se vea encerrado. Por otra parte, para obtener el MF, primero se obtiene la frecuencia en la que la magnitud de $F(j\omega)$ sea 1:

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{|-\omega^2 + 4\omega j|} = 1 \tag{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\omega^4 + 16\omega^2}} = 1 \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Lo que viene ser equivalente a resolver:

$$\omega^4 + 16\omega^2 - 4 = 0$$

Llegando a que $\omega = 0.4962$

Luego, si se separa en parte real e imaginaria $F(j\omega)$ se llega a:

$$F(j\omega) = \frac{2}{-\omega^2 + 4\omega j} = \frac{-2(\omega + 4j)}{\omega^3 + 16\omega} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Por lo que el MF será:

$$MF = -\arctan\left(\frac{|Im(F(j\omega))|}{|Re(F(j\omega))|}\right) = -\arctan(\frac{4}{\omega}) = -82,9°$$

Pregunta 4

Bosqueje el diagrama de bode de la planta modelada por:

$$H(s) = 1000\frac{(s+1)}{s(s+10)(s+100)}$$

Solución:

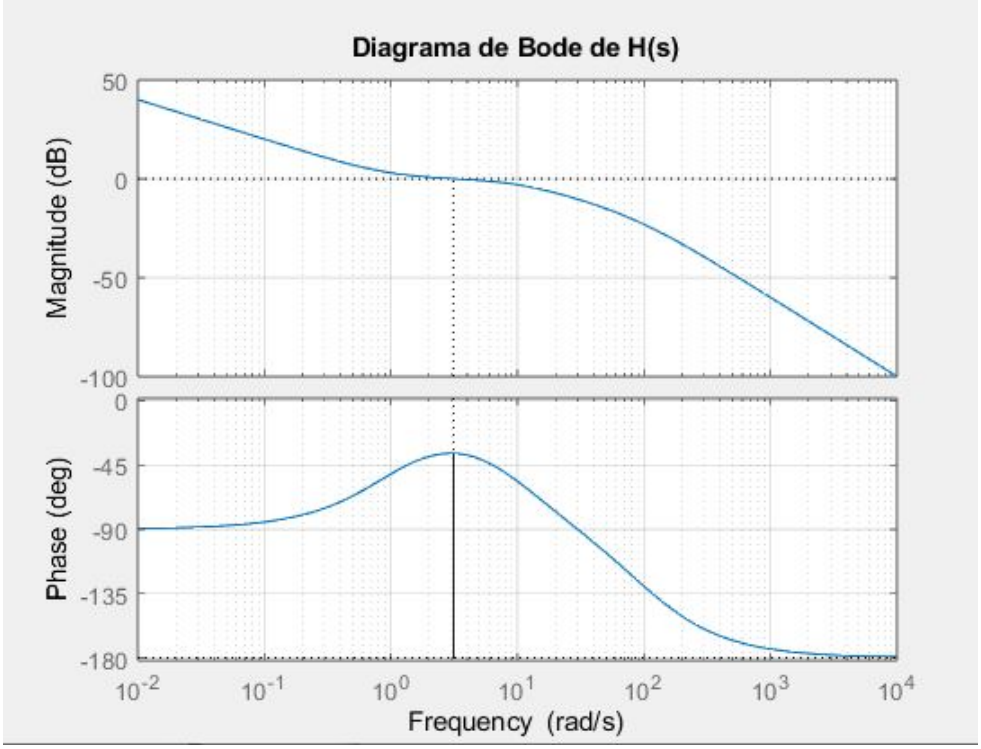


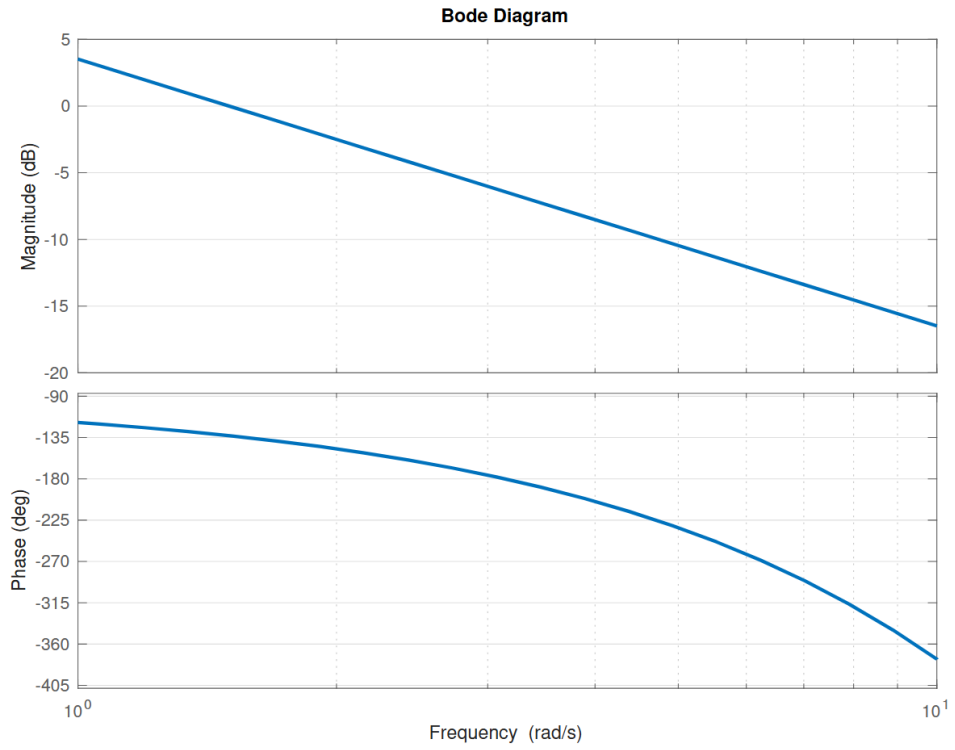
Figura 9: Diagrama resultante de la planta

Pregunta 5

En un lazo de control estándar de un grado de libertad, sin cancelaciones inestables, la transferencia de lazo abierto es

$$G_o(s)C(s) = K\frac{e^{-0.5s}}{s}$$

y cuyo diagrama de Bode está dado por:

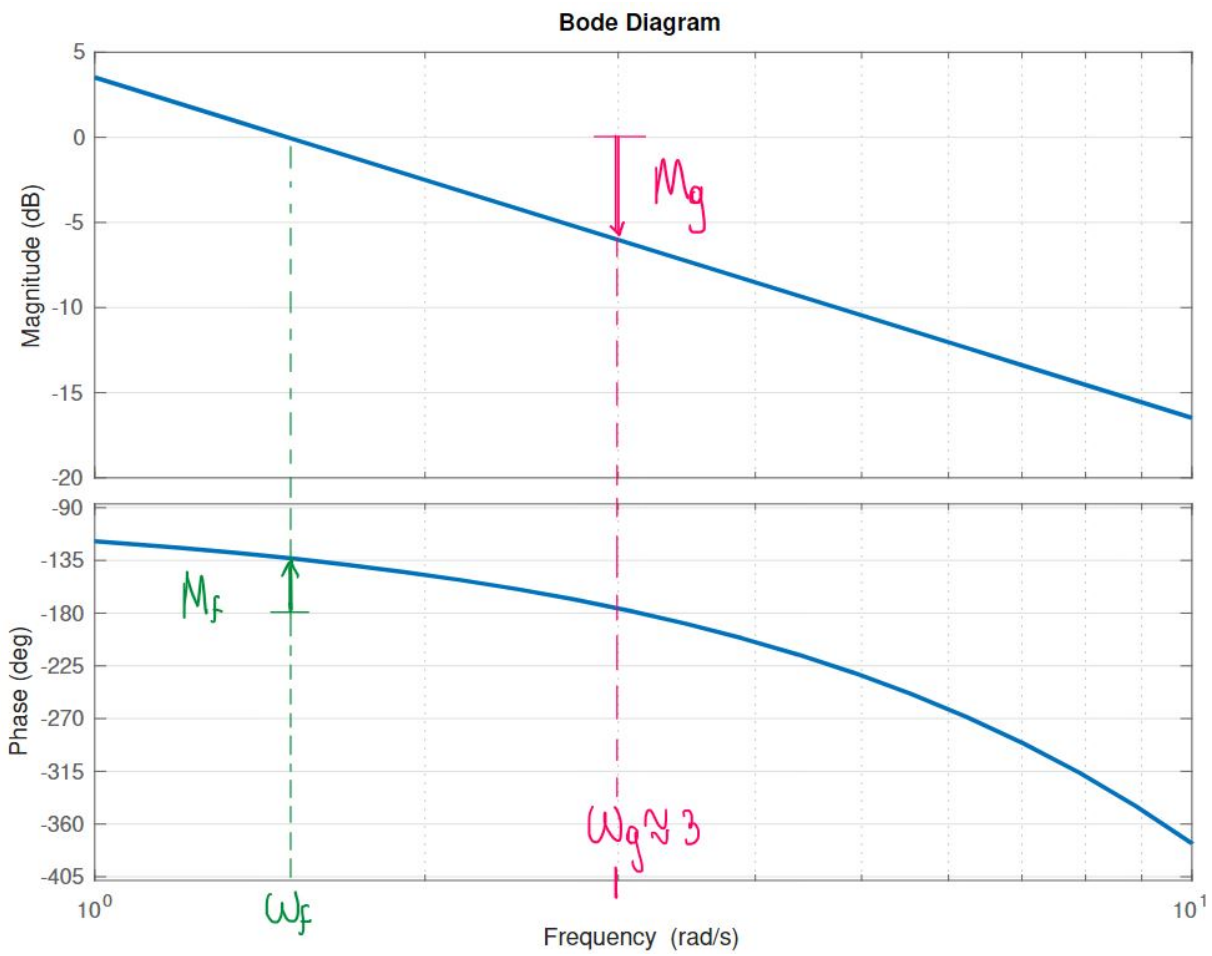


¿Hasta cuánto puede aumentar la ganancia K antes de que el sistema se vuelva inestable?¿Cuál es el margen de fase?

Solución:

Para obtener la mayor ganancia posible, utilizamos el margen de ganancia. Del gráfico, El MG es 6 dB aproximadamente, por lo que la mayor ganancia está dada por:

$$K_{max} = 10^{(6/20)} \approx 2$$



Luego, el margen de fase se obtiene a partir del Bode al mirar la frecuencia en que la ganancia es unitaria (0 dB). Del gráfico se puede llegar a que $M_f \approx 45°$.