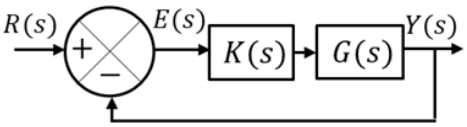
IEE-2613 - CONTROL AUTOMATICO – I_2 – 4 Noviembre 2020

Tiempo total: 120 min (Tiempo desarrollo: 115 min; Tiempo bajada enunciado y subida respuesta: 5 min)
Reglas: No puede recibir ni enviar información de o a otras personas.
Desarrollos: debe entregar los desarrollos que fundamenten sus resultados
Respuestas: enviar respuestas en sólo 1 archivo, idealmente formato PDF al correo **aguesala@ing.puc.cl**

1- Para la figura, se tiene que:



$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad \text{y} \quad K(s) = K\frac{10s+1}{0.25s+1} \quad \text{donde} \quad K > 0$$

Se sabe que $G(s)$ es inestable en lazo abierto. Para estabilizarla, se usa un controlador PD con filtro pasabajo ($K(s)$).

Para una ganancia $K = K_c = 0.042$, el sistema realimentado oscila con amplitud constante y a frecuencia $\omega_c = 0.65$ rad/s. Para ganancias superiores a ésta, el error de control en régimen ante una **rampa** es finito y proporcional a la pendiente de la rampa.

a) (4 ptos) Encuentre los valores de a_1, a_2 y b de la planta.
b) (2 ptos) Para los valores encontrados en a), determine el valor de K para el cual el sistema realimentado tiene comportamiento sobreamortiguado (todos los polos reales y estables)

Sol

a) Como el sistema es estable para $K > K_c$, podemos calcular el error permanente para esos casos:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+K(s)G(s)} \cdot \frac{A}{s^2} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{(0.25s+1)(s^2+a_1 s+a_2)}{(0.25s+1)(s^2+a_1 s+a_2)+Kb(10s+1)} \cdot \frac{A}{s^2} = cte$$ **1 pto**

Eliminado los términos de s que se hacen despreciables cuando $s \to 0$:

$$e_p = \lim_{s\to 0} \frac{a_2}{a_2 + Kb} \cdot \frac{A}{s}$$

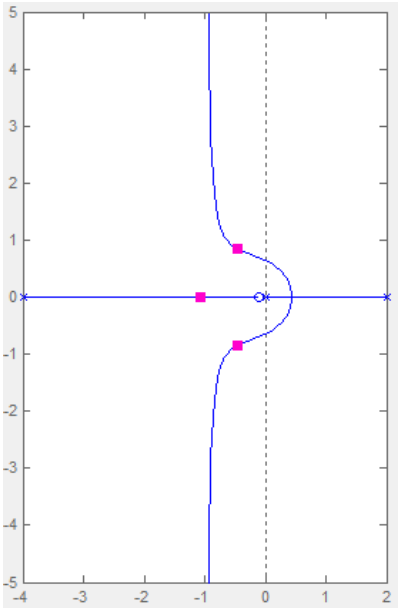
La única forma para que el error ante rampa sea finito, es que $a_2 = 0$. **0.25 ptos**
En ese caso, se verifica que: $e_p = \frac{Aa_1}{Kb}$: finito y proporcional a A.
Para $a_2 = 0$, la ecuación característica es:

$$q(s) = (0.25s+1)(s^2 + a_1 s) + Kb(10s+1) = 0.25s^3 + (0.25a_1 + 1)s^2 + (a_1 + 10Kb)s + Kb = 0$$ **1 pto**

Para $K = K_c$ y $s = j\omega_c = jx$ rad/s, tenemos:

$-(0.25a_1 + 1)\omega_c^2 + K_c b = 0 \implies b = (0.25a_1 + 1)\omega_c^2/K_c$ (parte real ec. característica)

$-0.25\omega_c^3 + (a_1 + 10K_c b)\omega_c = 0 \implies a_1 = 0.25\omega_c^2 - 10K_c b$ (parte imaginaria) **1 pto**



Luego $a_1 = \omega_c^2 - 10(a_1+1)\omega_c^2 \implies (1 + 10\omega_c^2)a_1 = -9\omega_c^2 \implies$

$$a_1 = -\frac{9\omega_c^2}{(1+10\omega_c^2)} = -2$$

$$b = (a_1 + 1)\omega_c^2/K_c = 5$$

$$a_2 = 0$$

0.75 ptos

b) observando el LGR de la función de transferencia dada por:

$$G(s) = \frac{5(10s+1)}{s(s-2)(0.25s+1)}$$

se ve que no existe un K que logre comportamiento estable y sobreamortiguado.
Para raíces en el semiplano izquierdo, existen siempre 2 de ellas que son complejas conjugadas (comportamiento subamortiguado).

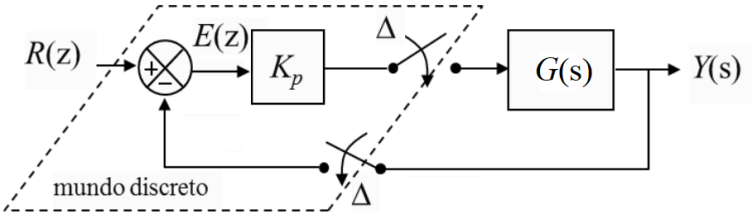
1.5 ptos metodo

0.5 ptos explicacion

2- El proceso industrial descrito por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{e^{-\Delta s}}{s},$$

se realimenta mediante el controlador digital $K(z) = K_p$, cuyo periodo de operación (muestreo) es Δ.



a) (4 ptos) Usando discretización tipo retención de orden 0, encuentre una relación para la ganancia crítica del controlador (K_{pc}) en función del período de muestreo Δ, es decir $K_{pc} = f(\Delta)$.

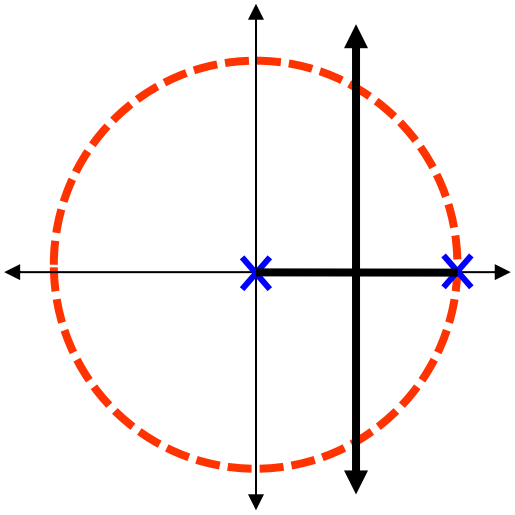
b) (2 ptos) Para $\Delta = 1\ s$, encuentre el error permanente ante escalón unitario en la referencia cuando la ganancia del controlador se fija en $K_p = 0.5K_{pc}$

Sol

a) Usando retención de orden 0:

$G_{zoh}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{e^{-\Delta s}}{s^2}\right\} = (1 - z^{-1})z^{-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{z-1}{z}z^{-1}\frac{\Delta \cdot z}{(z-1)^2} = \frac{\Delta}{z(z-1)}$ **1 pto.**

Lo que da una ecuación característica $q(z) = z^2 - z + K_p \cdot \Delta = 0$ **1 pto.**



y las raíces resultantes son:

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4K_{pc} \cdot \Delta}$$

Las raíces serán complejas conjugadas en punto de ganancia crítica:

$$z = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4K_{pc} \cdot \Delta}$$

y su módulo será 1: $|z| = \sqrt{0.5 - K_{pc} \cdot \Delta} = 1$ **1 pto.**

Es decir, $K_{pc} = 1.5/\Delta$ **1 pto.**

b) Por el LGR del la gráfica sabemos que el sistema será estable para $K_p = 0.5K_{pc}$ **(1 pto.)**, luego podemos ocupar el teorema del límite confiadamente:

$$\lim_{z\to 1}(z-1) \cdot \frac{z^2 - z}{z^2 - z + 0.5 \cdot Kp \cdot \Delta} \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z\to 1}\frac{(z^2 - z)z}{z^2 - z + 0.5 \cdot Kp \cdot \Delta} = \frac{0}{0.5 \cdot Kp \cdot \Delta} = 0$$

1 pto.

3- El siguiente código representa la simulación de un proceso realimentado a través de un controlador PID. Tanto el proceso como el controlador se representan en forma digital.

```
y=0;  e=0;  u=0;  u_old=0;  m1=0; dT=0.5; r=1; N=100  % inicio de variables
K1=3;  K2=0.5;  K3=1;  K4=1; K5=0.2;   % parámetros del sistema
for k=1:N      % loop de simulacion para lazo cerrado
      y=K4*y+K5*u_old;
      e_old=e;
      e=r-y;
      m1=m1+K1*dT*e;
      m2=K2*e;
      m3=K3*(e-e_old)/dT;
      u_old=u;
      u= m1+m2+m3;
end
```

Determine las funciones de transmitancia del proceso $G(z)$ y controlador $K(z)$. Explicite cuáles son las ganancias de la acción proporcional, integral y derivativa (K_p, K_i y K_d) y sus valores numéricos.

Sol

y=K4*y+K5*u_old:	la entrada al proceso es la var. manipulada en *k*-1
e_old=e:	error de control en *k*-1
e=r-y:	error de control en *k*
m1=m1+K1*dT*e:	acción integral en *k*
m2=K2*e:	acción proporcional en *k*
m3=K3*(e-e_old)/dT:	ación derivativa en *k*
u_old=u:	guarda variable manipulada anterior *k*-1
u= m1+m2+m3:	variable manipulada en *k*, suma los 3 modos de control

Función de transmitancia del proceso:

$y_k = K_4 y_{k-1} + K_5 u_{k-2} \implies Y(z) = K_4 z^{-1} Y(z) + K_5 z^{-2} U(z) \implies Y(z) = \underbrace{\frac{K_5}{z(z-K_4)}}_{G(z)} U(z) \implies G(z) = \frac{K_5}{z(z-K_4)}$ **1.25*pt*.**

Función de transmitancia del controlador:

$e_k = r_k - y_k \implies E(z) = R(z) - Y(z)$ **0.25*pto*.**

$m1_k = m1_{k-1} + K_1 \Delta T e_k \implies M_1(z) = z^{-1} M_1(z) + K_1 \Delta T \cdot E(z) \implies M_1(z) = K_1 \Delta T \frac{z}{z-1} E(z) \quad (integral)$ **1*pt*.**

$m2_k = K_2 e_k \implies M_2(z) = K_2 \cdot E(z) \quad (proporcional)$ **0.5*pt*.**

$m3_k = \frac{K_3}{\Delta T}(e_k - e_{k-1}) \implies M_3(z) = \frac{K_3}{\Delta T}\frac{z-1}{z} E(z) \quad (derivativa)$ **1pto.**

$$U(z) = M_1(z) + M_2(z) + M_3(z) = \underbrace{\left[K_2 + \frac{K_1 \Delta T z}{z-1} + \frac{K_3}{\Delta T}\frac{z-1}{z}\right]}_{K(z)} E(z)$$ **0.75*pt***

$$\implies K(z) = 0.5 + 1.5\frac{z}{z-1} + 2.0\frac{z-1}{z}$$ **0.75*pto***

$K_p = 0.5, \quad K_i = 1.5 \quad$ y $\quad K_d = 2.0$ **0.5pto.**