Capítulo 4 – Sistemas de Control Realimentado

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

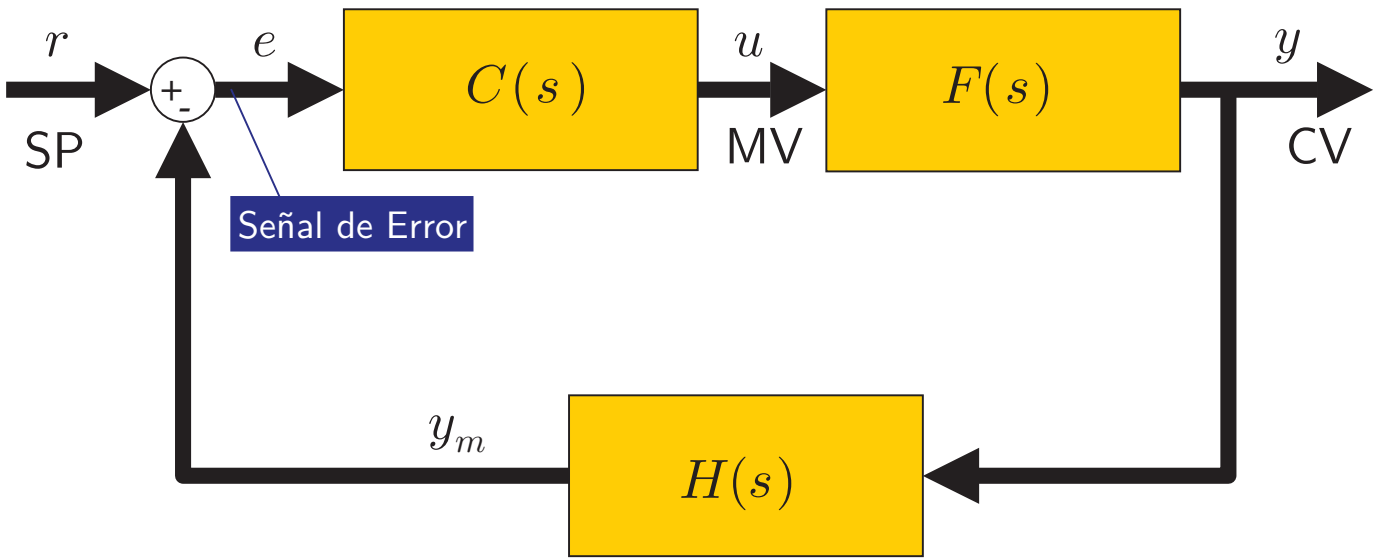
Sistemas de control realimentado

- Diferencia entre lazo abierto y sistema realimentado (lazo cerrado).
- Beneficios de la realimentación se resumen en que esta permite:
  - Estabilizar sistemas que en lazo abierto son inestables.
  - Ajustar la velocidad de respuesta y características transitorias (sea inestable o no el sistema en lazo abierto).
  - Reducir el error en regimen perpamente (sea inestable o no el sistema en lazo abierto).
  - Mejorar la tolerancia (y/o rechazo) a perturbaciones externas.
  - Reducir la sensibilidad del sistema ante variaciones de los parámetros del proceso.
- Lo anterior implica caracterizar el sistema en términos de:
  - Respuesta dinámica (calcular respuesta con y sin realimentación) en el dominio del tiempo. El control altera la ubicación de polos y ceros, y la ubicación de polos y cero determina las características de la respuesta. . . potencialmente incluso dañando la estabilidad.
  - Analizar la estabilidad (RH, LGR, Nyquist, Bode). . . para asegurar que el control estabiliza el sistema y no lo desestabiliza.
  - Calcular métricas de desempeño. . . para evaluar e identificar el controlador que logra un mejor comportamiento del sistema.
  - Controlabilidad y observabilidad. . . después de modelar el sistema, verificar este punto es algo que debiese hacerse antes que los puntos anteriores. Se estudiará al final porque los criterios fueron descubiertos posteriormente al desarrollo de las herramienas de análisis para estudiar la respuesta dinámica en el tiempo, en frecuencia y la estabilidad del sistema.

Respuesta dinámica de sistemas lineales

- Existen tres perspectivas desde las cuales se puede estudiar la respuesta dinámica:
  - Análisis en el plano complejo $\mathbb{C}$ o plano s.
  - Análisis de la respuesta de frecuencia.
  - Espacio de Estado
- El ingeniero de control bien preparado necesita tener un dominio fluido de cada una de ellas, las cuales se estudiarán en la próximas clases.
- En esta clase se verán algunos fundamentos básicos que es necesario conocer antes de estudiar las técnicas de análisis en el plano s o en el dominio de la frecuencia.

Sistema realimentado (lazo cerrado)



Suponga que la planta F satisface:

$$\Sigma_{OL} \equiv F: \quad \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + b_1 \dot{y} + b_0 y = a_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + a_1 \dot{u} + a_0 u$$

y que el controlador $C(s) = K$ y el sensor ideal $H(s) = 1$, luego:

$$u = Ke = K(r - y), \quad y_m = y$$

Sistema realimentado (lazo cerrado)

De esta forma el sistema en lazo cerrado queda:

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_m K \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + a_1 K \frac{dr}{dt} + a_0 K r$$
$$- a_m K \frac{d^m y}{dt^m} - \cdots - a_1 K \frac{dy}{dt} - a_0 K y$$

Reordenando Σ_{CL}:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + (a_m K + b_m) \frac{d^m y}{dt^m} + \cdots + (a_1 K + b_1) \frac{dy}{dt} + (a_0 K + b_0) y =$$
$$a_m K \frac{d^m r}{dt^m} + \cdots + a_1 K \frac{dr}{dt} + a_0 K r$$

Aplicando $\mathcal{L}$ (asumiendo condiciones iniciales cero):

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i + K \sum_{i=0}^{m} a_i s^i \right) Y(s) = \left(K \sum_{i=0}^{m} a_i s^i \right) R(s)$$

Sistema en lazo abierto

Por otro lado, Σ_{OL}:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u$$

Aplicando $\mathcal{L}$ (asumiendo condiciones iniciales cero):

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i \right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i s^i \right) U(s)$$

Función de transferencia del lazo abierto

Por lo anterior:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

donde el numerador se define como:

$$p(s) = \sum_{i=0}^{m} a_i s^i$$

mientras que el denominador o *ecuación característica* del lazo abierto se define como:

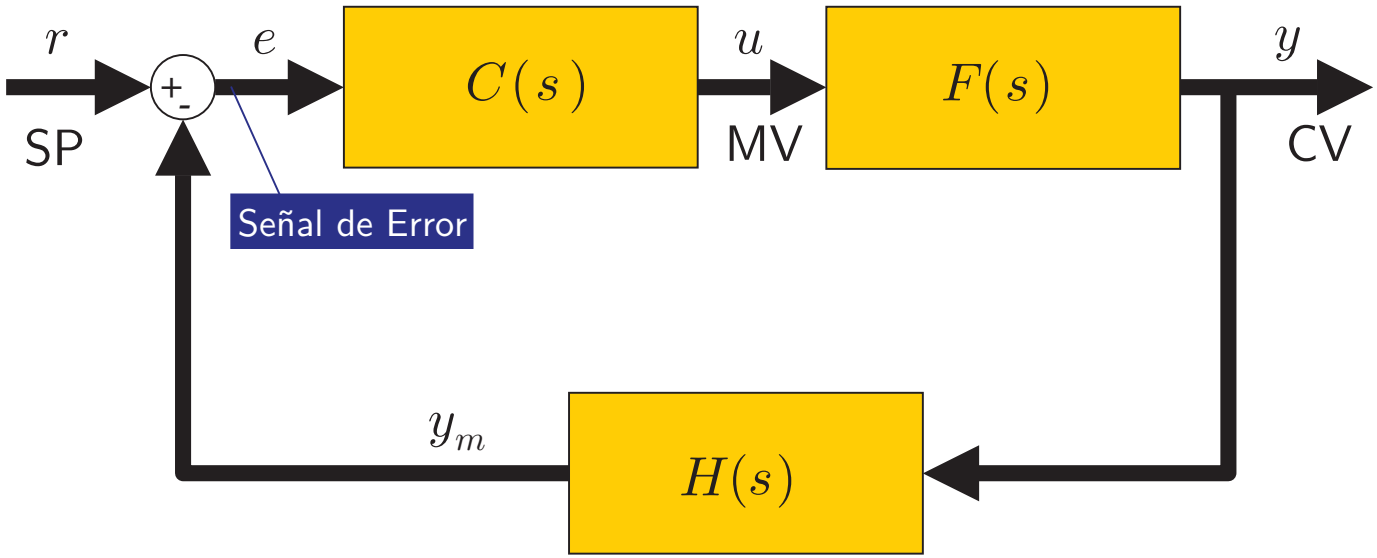
$$q(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i$$

Función de Transferencia del sistema realimentado

Empleando las definiciones anteriores es fácil ver que la función de transferencia del lazo cerrado estará dada por:

$$
\begin{aligned}
G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{K\sum_{i=0}^{m} a_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i + K\sum_{i=0}^{m} a_i s^i} \\
&= \frac{Kp(s)}{q(s) + Kp(s)} \\
&= \frac{Kp(s)/q(s)}{1 + Kp(s)/q(s)} = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)}
\end{aligned}
$$

Función de transferencia del sistema realimentado



La función de transferencia se podía obtener directamente del diagrama de bloques notando que:

$$Y(s) = F(s)U(s)$$
$$U(s) = C(s)E(s) = C(s)(R(s) - Y_m(s)) = C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Función de Transferencia del sistema realimentado

Luego,

$$
\begin{aligned}
& Y(s) = F(s)C(s)[R(s) - H(s)Y(s)] \\
\Rightarrow\ & Y(s)[1 + C(s)H(s)F(s)] = F(s)C(s)R(s) \\
\Rightarrow\ & G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)C(s)}{1 + C(s)H(s)F(s)}
\end{aligned}
$$

Si asumimos nuevamente que $C(s) = K$ y $H(s) = 1$ se obtiene el mismo resultado. ¡Como era de esperarse!

$$
G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)}
$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

$$\Sigma_{OL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ q(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ \bullet\ n \text{ raices } \lambda_i(b_n, \ldots, b_1, b_0),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{no} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\Sigma_{CL} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \bar{q}(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_{m+1}s^{m+1} \\ \qquad +(a_m K + b_m)s^m + (a_{m-1}K + b_{m-1})s^{m-1} + \cdots \\ \qquad +(a_1 K + b_1)s + (a0K + b_0) \\ \bullet\ n \text{ raices } \bar{\lambda}_i(b_n, \ldots, b_1, b_0; a_m, \ldots, a_1, a_0; K),\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{que } \textbf{si} \text{ dependen de } K! \\ \bullet\ \bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} \\ \qquad + \int_0^t \sum_{i=1}^n W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

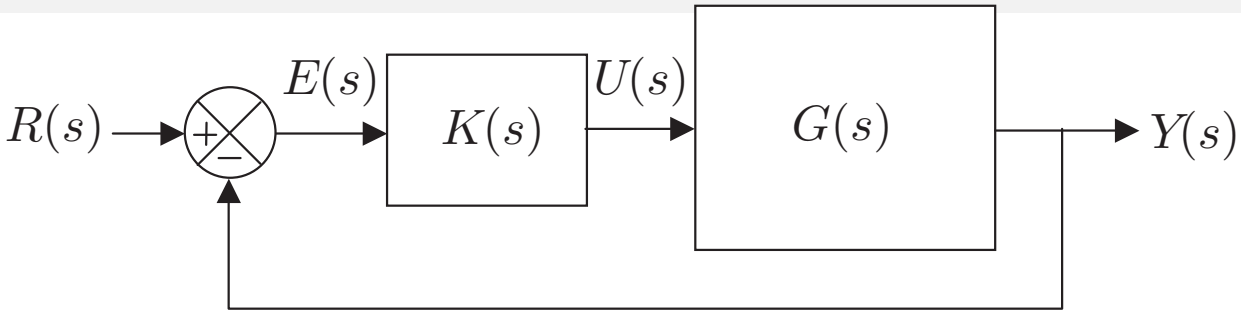
- En Σ_{CL}, $\bar{q}(s), \bar{y}(t), \bar{\lambda}_i(K)$ dependen de K.
- Conocer las raices $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en función de K es clave para conocer la respuesta en el tiempo $\bar{y}(t)$ y en frecuencia (afectada por $\bar{q}(s)$).
- El control K permite alterar, e idealmente controlar, la respuesta en el tiempo y en frecuencia del sistema.
- En Σ_{OL} no es posible alterar la respuesta natural (no forzada, $u = 0$) del sistema, mientras que en Σ_{CL} si es posible alterar la respuesta natural a través de K.
- Si $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_i) < 0 \Rightarrow$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la respuesta natural es estable porque no diverge (en particular tiende a cero). ¡Una respuesta natural estable es ideal para hacer que la respuesta general del sistema en lazo cerrado sea estable, simplemente colocando $u = 0$!

Atención! – Σ_{OL} versus Σ_{CL}

Σ_{OL} versus Σ_{CL}

- Los λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ definen tiempos de respuesta o modos de vibración del sistema. En esencia definen el comportamiento del sistema. . . son como el ADN o una huella digital. . . *son el alma del sistema*. . .
- *Si el alma es la raíz del ser*, es razonable que λ_i o $\bar{\lambda}_i(K)$ se llamen **raíces** de la ecuación *característica*. Por todos lados nos están diciendo: "Ojo!!! raíces – ecuación característica – comportamiento – alma" .
- ¡¡¡Dos sistemas son equivalentes si las raíces del numerador y denominador son las mismas. . . *tienen la misma alma, el mismo espíritu, aunque el cuerpo que los contiene se vea distinto*!!!.

Error de control en régimen permanente



El error de control está dado por:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \qquad \wedge \qquad Y(s) = G(s)K(s)E(s)$$

$$\therefore E(s) = R(s) - G(s)K(s)E(s) \;\Rightarrow\; E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

El error en régimen permanente vendrá dado por:

$$\underbrace{e_{ss}}_{steady\ state} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

Recordar: Válido sólo para sistemas estables.

Ejemplo: Velocidad crucero del automóvil

$$\Sigma_{OL}: \qquad Y(s) = V(s) = \frac{10}{10s+1}U(s)$$

Suponiendo un controlador puramente proporcional $C(s) = K$ y un sensor ideal $H(s) = 1$ se tiene:

$$\Sigma_{CL}: \; G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1+KF(s)}$$
$$= \frac{K\frac{10}{10s+1}}{1+K\frac{10}{10s+1}} = \frac{10K}{10s+1+10K}$$

Ejemplo 2.1: Vehículo con Perturbación - Lazo abierto

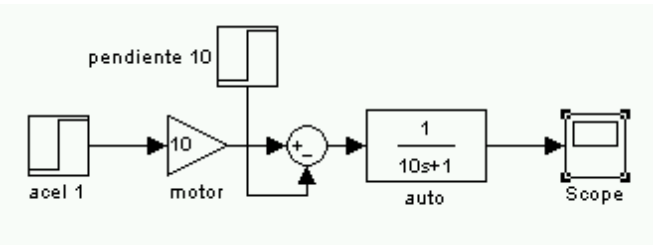
$$m\ddot{x} = ku - c\dot{x} - f_g$$

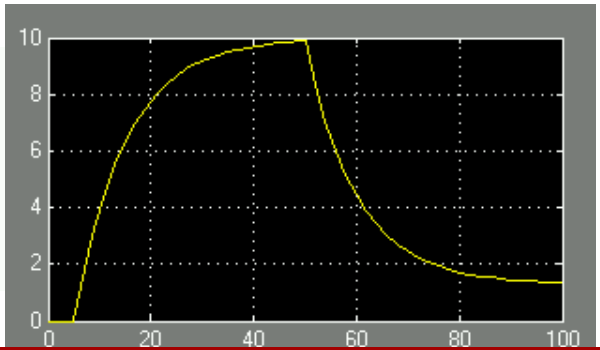
donde f_g corresponde a la perturbación debido a la pendiente del camino, con:

$$f_g = mg\sin\theta$$

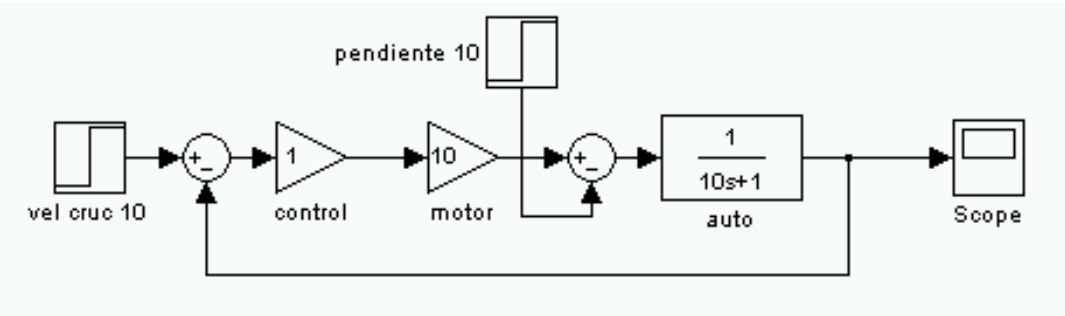
Asumiendo condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$:

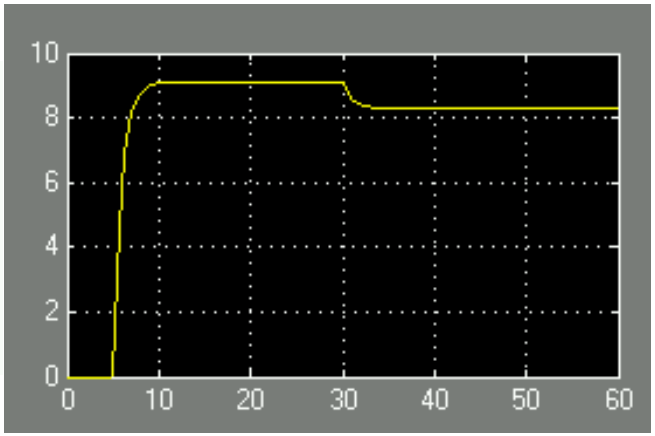
$$\begin{aligned}\dot{X}(s) = sX(s) &= \frac{k}{ms+c}U(s) - \frac{1}{ms+c}\frac{mg\sin\theta}{s} \\ &= \frac{1}{ms+c}\left(kU(s) - \frac{mg\sin\theta}{s}\right)\end{aligned}$$

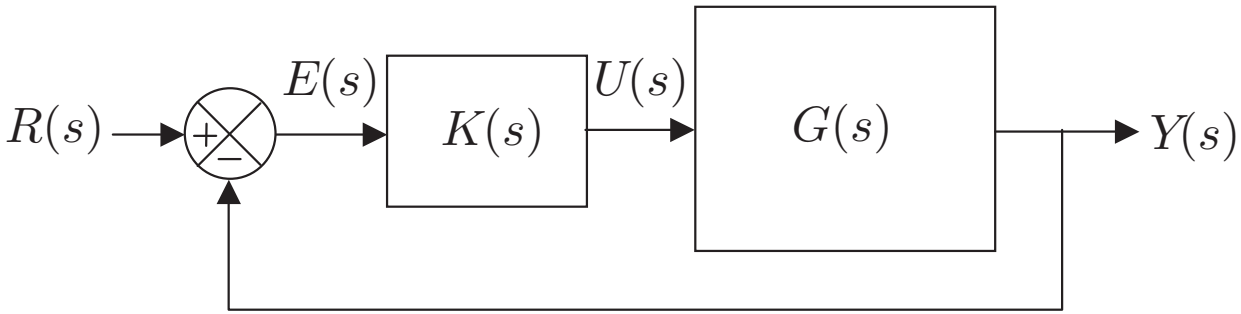




Ejemplo 2.1: Vehículo con Perturbación - Lazo cerrado







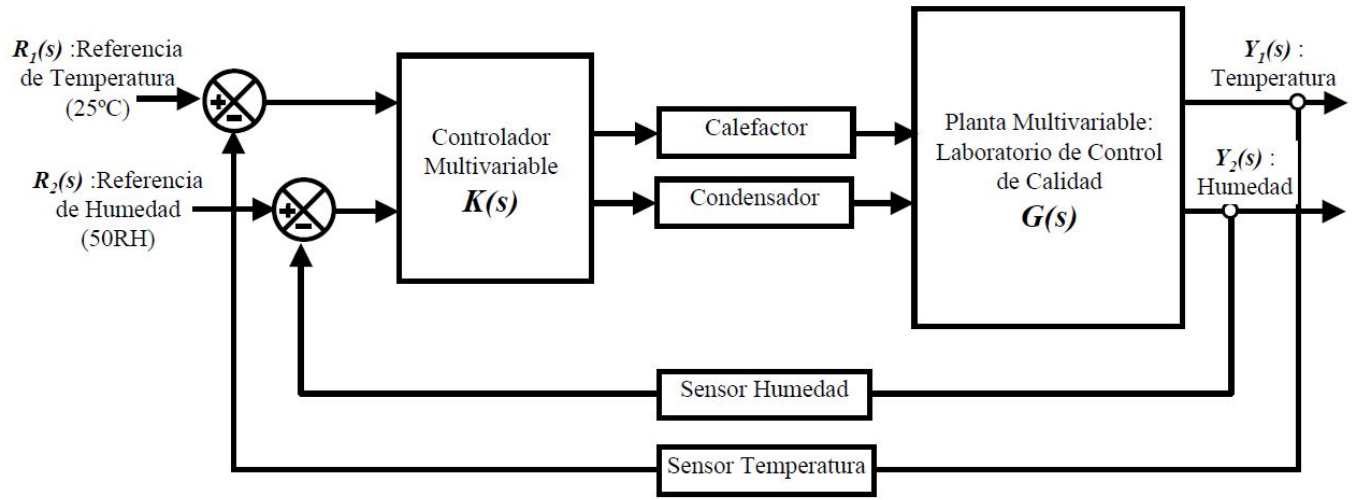
En sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), $Y(s)$ y $R(s)$ son vectores y $G(s)$ y $K(s)$ son matrices.

Luego la función de transferencia es:

$$G(s)K(s)[R(s) - Y(s)] = Y(s)$$
$$[I + G(s)K(s)]Y(s) = G(s)K(s)R(s) \qquad I \text{ es la matriz identidad}$$

$$Y(s) = \underbrace{[I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)}_{\text{función de transferencia matricial}} \cdot R(s)$$

Ejemplo Laboratorio de control de calidad



La planta

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ H(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{0.1}{10s+1} & \frac{-0.05}{18s+1} & \frac{0.02}{12s+1} \\ \frac{-0.3}{15s+1} & \frac{-0.2}{12s+1} & \frac{0.15}{10s+1} \end{bmatrix}}_{G(s)} \cdot \begin{bmatrix} U_{cal}(s) \\ U_{con}(s) \\ U_{hum}(s) \end{bmatrix}$$

El controlador

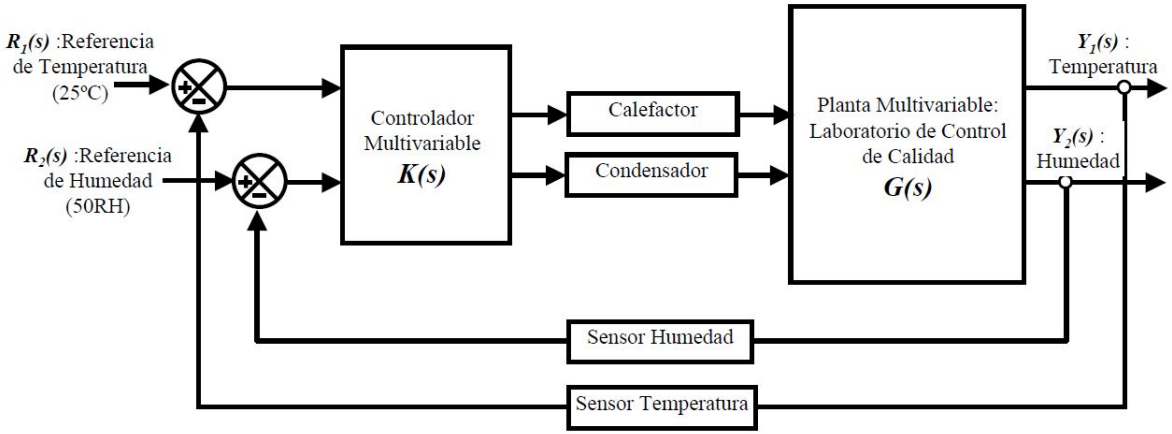
$$\begin{bmatrix} U_{cal}(s) \\ U_{con}(s) \\ U_{hum}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) \\ K_{31}(s) & K_{32}(s) \end{bmatrix}}_{K(s)} \cdot \begin{bmatrix} T_{ref}(s) - T(s) \\ H_{ref}(s) - H(s) \end{bmatrix}$$

Función de Transferencia en lazo cerrado:

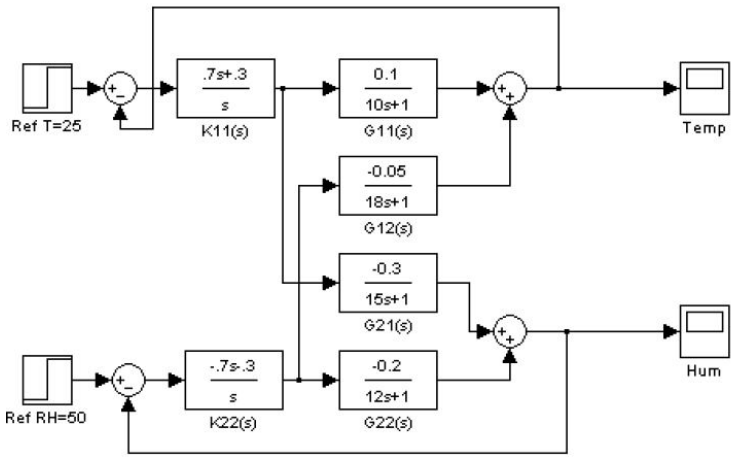
$$\begin{bmatrix} T(s) \\ H(s) \end{bmatrix} = \underbrace{[I_{2\times 2} + [G(s)_{2\times 3}] \cdot [K(s)_{3\times 2}]]^{-1} \cdot [[G(s)_{2\times 3}] \cdot [K(s)_{3\times 2}]]}_{\text{Func. transf. lazo cerrado}} \cdot \begin{bmatrix} T_{ref}(s) \\ H_{ref}(s) \end{bmatrix}$$

Ejemplo Laboratorio de control de calidad

Tomando solo las componentes del sistema asociadas al calefactor y condensador,

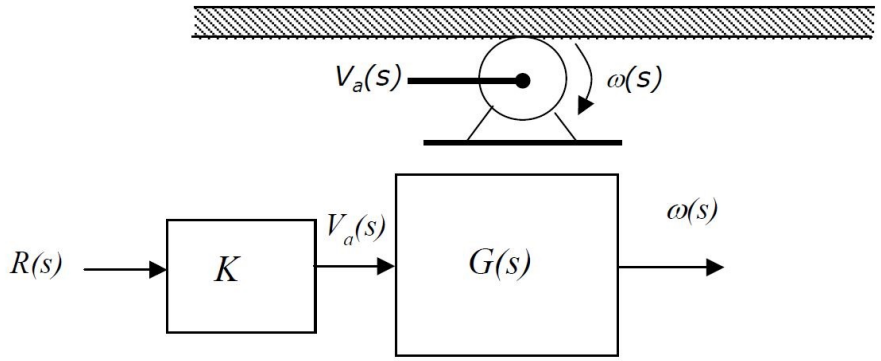


Usando controlador solo diagonal:



Ejemplo fabricación acero:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_0}{T_0 s + 1}$$



Lazo abierto: escalón

$$R(s) = \frac{R_0}{s}$$

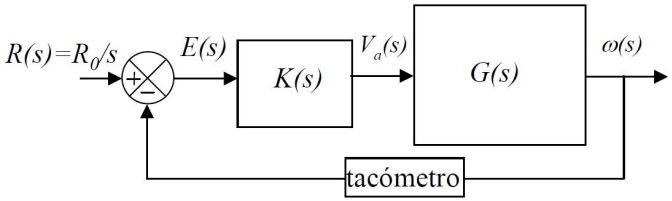
$$V_a(s) = \frac{K}{s} R_0 \quad \text{(Tabla de valores estáticos que entrega } R_0 \text{ para un determinado } \omega_0)$$

$$\omega(s) = G(s) \cdot V_a(s) = \frac{K \cdot K_0}{s(T_0 s + 1)} R_0 \text{ y } \omega(t) = K_0 \cdot K \cdot R_0 \cdot (1 - e^{-t/T_0})$$

Por lo que se requiere hacer $K = \frac{1}{K_0}$, y con ello $\omega(t) = R_0 \cdot (1 - e^{-t/T_0})$

La técnica anterior sin embargo, puede resultar extremadamente lenta e inexacta. ¿Por qué?
Solución: Lazo cerrado

Respuesta Transitoria de Sistemas Realimentados de 1^{er} Orden



$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{K \cdot G(s) + 1} = \frac{K \cdot K_0}{T_0 \cdot s + K \cdot K_0 + 1} = \frac{\frac{K \cdot K_0}{K \cdot K_0 + 1}}{\frac{T_0}{K \cdot K_0 + 1} \cdot s + 1}$$

Si $R(s) = \frac{R_0}{s}$ (escalón de monto R_0 en $t = 0$), entonces:

$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K \cdot K_0 \cdot R_0}{K \cdot K_0 + 1}}{s \cdot (\frac{T_0}{K \cdot K_0 + 1} \cdot s + 1)}$$

En el tiempo: $\omega(t) = \frac{K \cdot K_0 \cdot R}{K \cdot K_0 + 1}(1 - e^{\frac{K \cdot K_0 + 1}{T_0} t})$

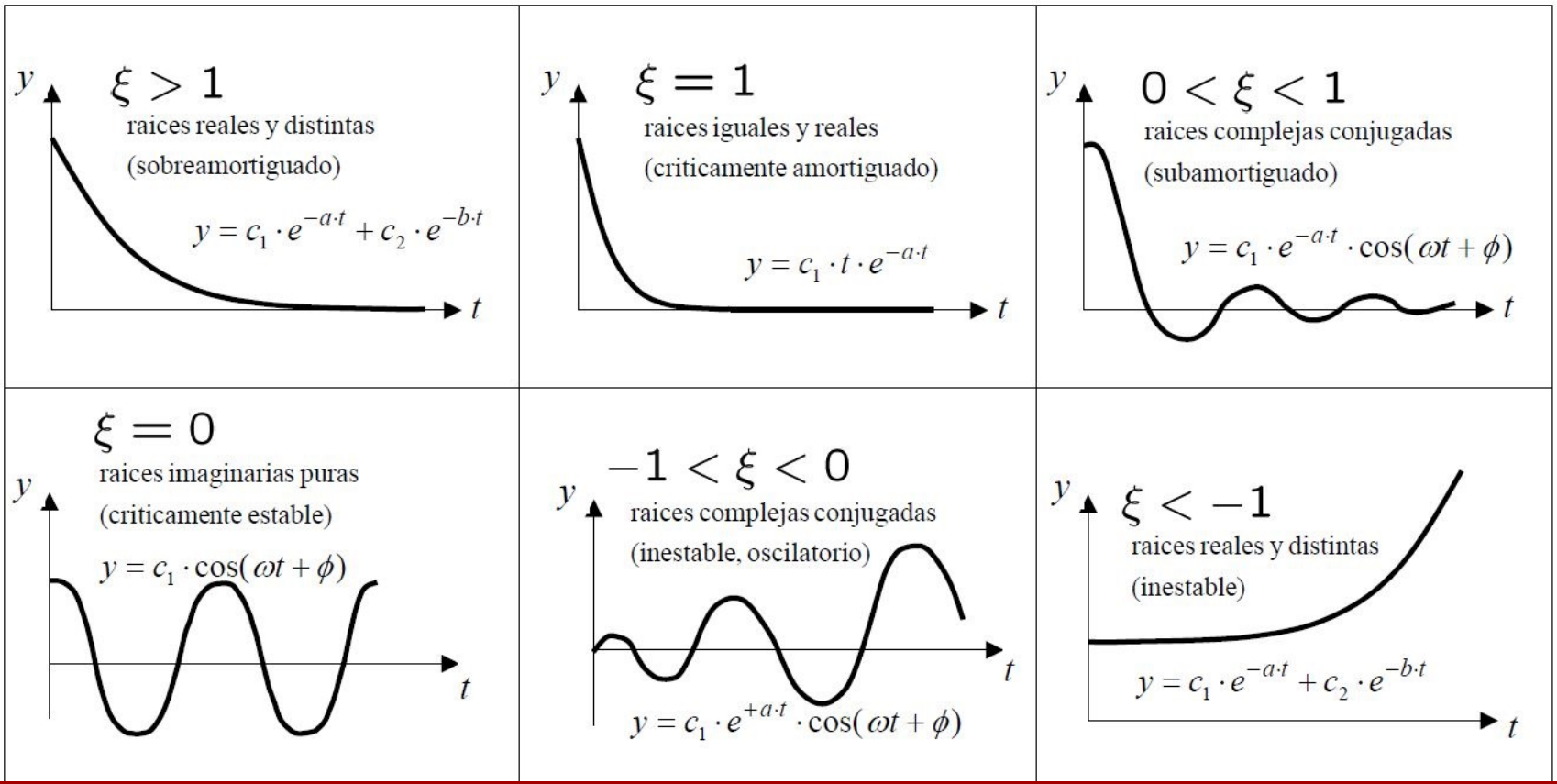
- Si K es grande, la constante de la exponencial disminuye y el proceso es más rápido.
- Si K es grande, el valor final de $\omega(s)$ tenderá a R_0.

¿Cuánto es el error permanente para escalón de monto R_0?

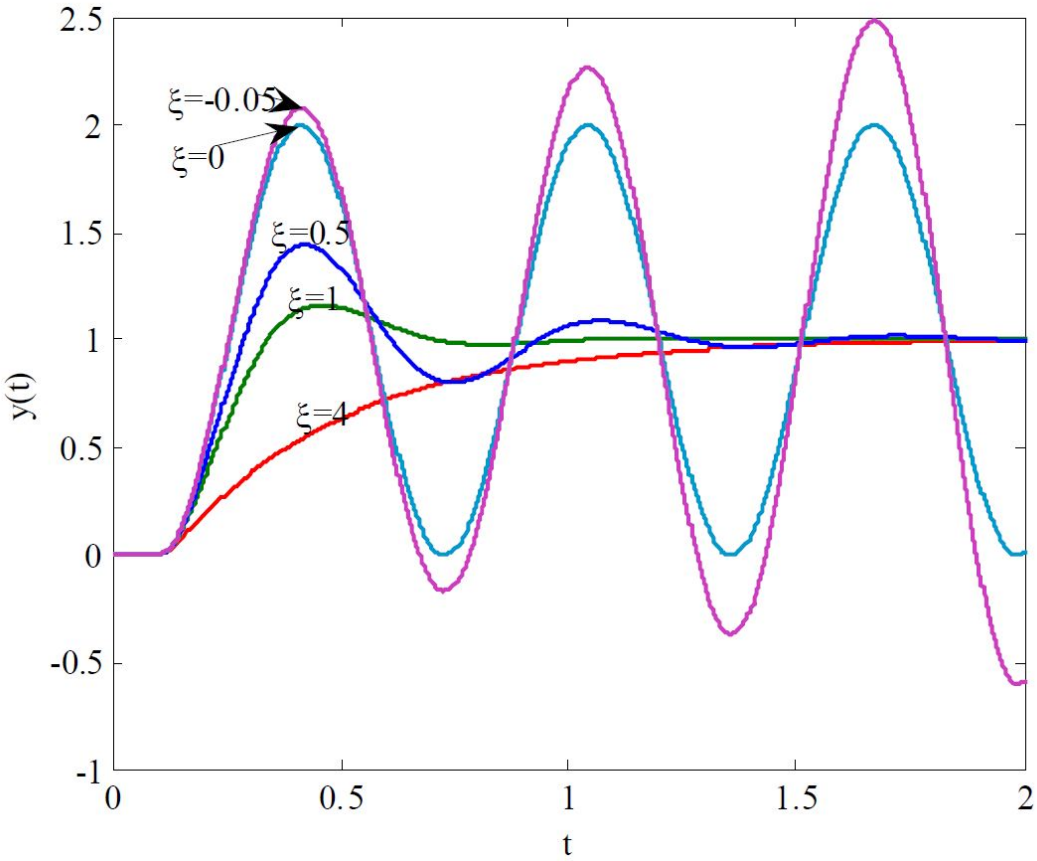
Comportamiento de Sistemas de 2^o orden

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s)$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\omega_n^2(\xi^2 - 1)} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

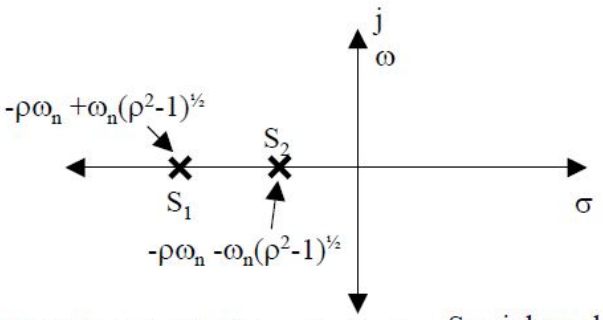


Comportamiento de Sistemas de 2^o orden



Raíces en el plano complejo s

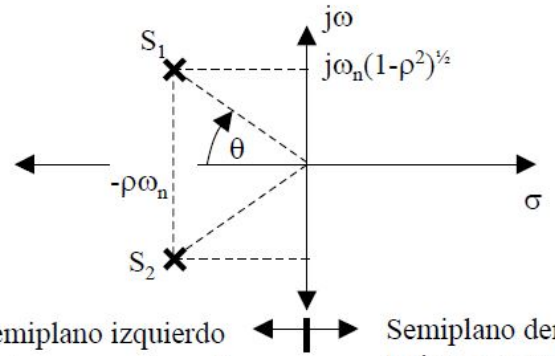
Sistema sobreamortiguado



Semiplano izquierdo
Raíces con parte real
<0, estable

Semiplano derecho
Raíces con parte
real >0, inestable

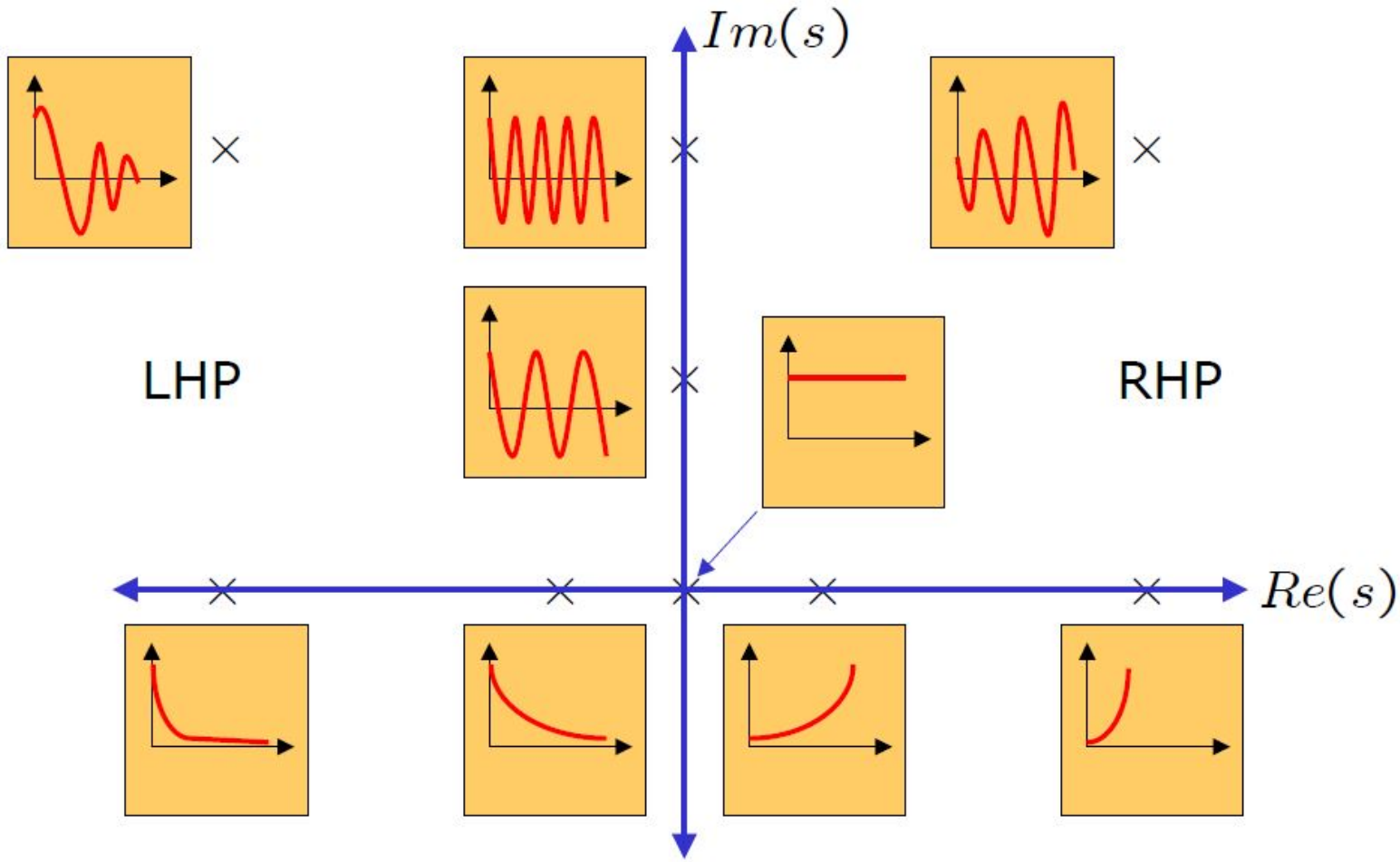
Sistema subamortiguado (|θ|>0)



Semiplano izquierdo
Raices con parte real
<0, estable

Semiplano derecho
Raices con parte real
>0, inestable

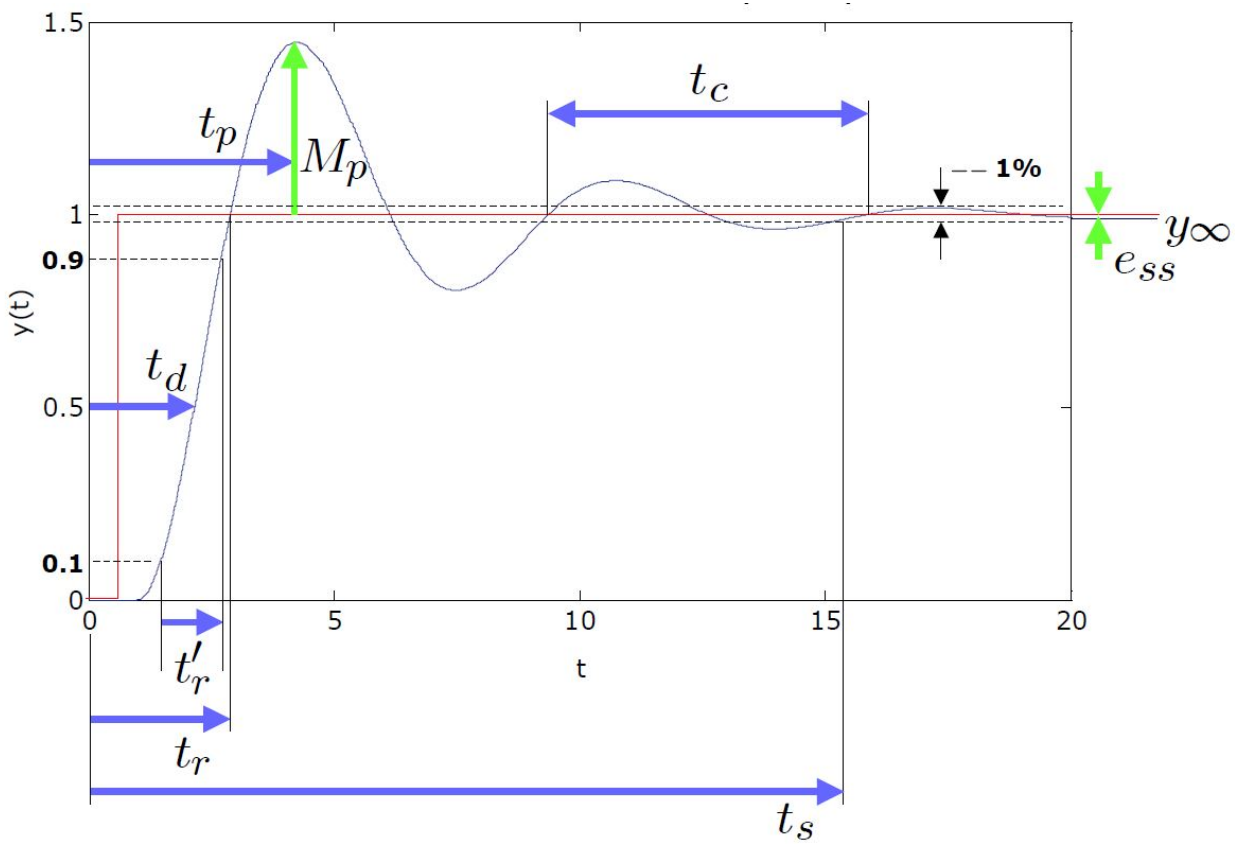
Respuestas naturales asociadas a Polos en $\mathbb{C}$



Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Parámetros de comportamiento de sistemas de 2^o orden:

- Respuesta Estática (permanente): t_s, e_{ss}
- Respuesta Dinámica (transitoria): t_d, t_r, t_p, M_p



Si

$$Y(s) = \frac{a}{s^2 + bs + a} U(s) \qquad a > 0, 0 \leq b^2 < 4a$$

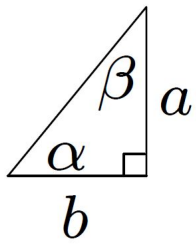
la respuesta al escalón unitario cuando $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ y $b^2 < 4a$ estará dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b} \frac{\mathrm{Re}(s)}{\mathrm{Im}(s)} e^{\mathrm{Re}(s)t} \sin\left[\mathrm{Im}(s)t - \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(s)}{\mathrm{Re}(s)}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b} \frac{\mathrm{Re}(s)}{\mathrm{Im}(s)} e^{\mathrm{Re}(s)t} \sin\left[\mathrm{Im}(s)t + \arctan\left(-\frac{\mathrm{Im}(s)}{\mathrm{Re}(s)}\right)\right] \end{aligned}$$

Porque $\arctan(-\alpha) = \arctan(\alpha)$

Recordando algunas cosas básicas de trigonometría...

- $\cos\alpha = \sin\alpha + 90^o$, $\sin\alpha = \cos\alpha - 90^o$
- $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$, $\alpha = 90 - \beta$
- $\arctan\dfrac{a}{b} = 90 - \arctan\dfrac{b}{a}$



Por lo tanto,

$$y(t) = 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b}\frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)}e^{\mathsf{Re}(s)t}\cos\left[\mathsf{Im}(s)t - \arctan\left(-\frac{\mathsf{Im}(s)}{\mathsf{Re}(s)} - 90^o\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{a}}{b}\frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)}e^{\mathsf{Re}(s)t}\cos\left[\mathsf{Im}(s)t + \arctan\left(-\frac{\mathsf{Re}(s)}{\mathsf{Im}(s)}\right)\right]$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Si

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s) \qquad \omega_n > 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

la respuesta al escalón unitario cuando $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ y $\xi < 1$ estará dada por:

$$y(t) = 1 - \frac{a}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left[\omega_n\sqrt{1-\xi^2} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

porque las raíces de la ecuación característica son:

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

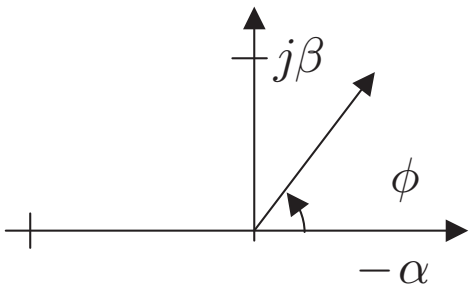
Definiendo:

$$\alpha = -\xi\omega_n \qquad \beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad \gamma = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\phi = \arctan(\gamma) \;\rightarrow\; \tan(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Es posible re-escribir la respuesta del sistema al escalón como:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta}e^{\alpha t}\sin(\beta t + \phi)$$



o por las relaciones trigonométricas:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta}e^{\alpha t}\cos\left(\beta t - \arctan(\gamma^{-1})\right)$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

A partir de la respuesta del sistema al escalón expresada como:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_m}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)$$

es posible obtener expresiones para las especificaciones de la respuesta dinámica según se muestra a continuación.

Tiempo de Respuesta (Rise Time):

$$y(t_r) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha t_r} \sin(\beta t_r + \phi) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(\beta t_r + \phi) = 0$$

$$\Rightarrow \beta t_r + \phi = \pi$$

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \phi}{\beta}}$$

Tiempo de Peak (Overshoot Time):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{\omega_m}{\beta}e^{\alpha t}\sin(\beta t + \phi)\right) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\omega_n}{\beta}e^{\alpha t}[\alpha\sin(\beta t + \phi) + \beta\cos(\beta t + \phi)] &= 0 \\
\Rightarrow \tan(\beta t + \phi) = -\frac{\beta}{\alpha} &= \gamma \\
\Rightarrow \tan(\pi + \beta t + \phi) &= \tan(\phi) \\
\Rightarrow \pi + \beta t + \phi &= \phi
\end{aligned}$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\beta}}$$

Peak máximo o sobreoscilación (Maximum peak or Overshoot):

$$M_p = y(t_p) - 1 = \frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha \frac{\pi}{\beta}} \sin(\phi)$$

pero:

$$\sin(\phi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 (1-\xi^2)}} = \sqrt{1-\xi^2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{M_p = e^{\alpha \frac{\pi}{\beta}} = e^{-\pi/\gamma}}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Tiempo de estabilización (Settling Time):

$$||y(t) - 1|| \leq 0.01 \Rightarrow ||\frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)|| \leq 0.01$$

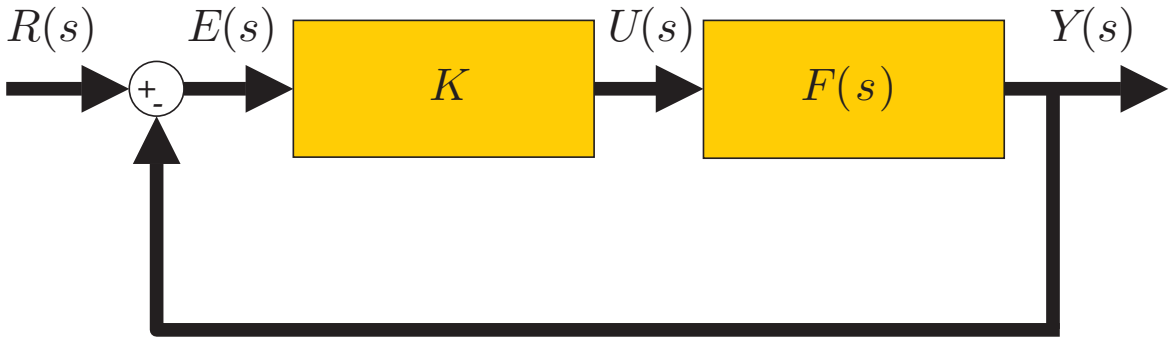
$$\Rightarrow e^{\alpha t} < 0.01 \frac{\beta}{\omega_n}$$

$$t_{ss} > \frac{4.61 - \log\left(\sqrt{1 - \xi^2}\right)}{\xi \omega_n}$$

Periodo de Cycling (Cycling Period):

$$\beta t_c = 2\pi \Rightarrow \boxed{t_c = \frac{2\pi}{\beta}}$$

Ejemplo Planta de 2do orden realimentada



$$F(s) = \frac{1}{s(s+p)} \Rightarrow Y(s) = \frac{KF(s)}{1+KF(s)}R(s) = \frac{K}{s^2+ps+K}R(s)$$

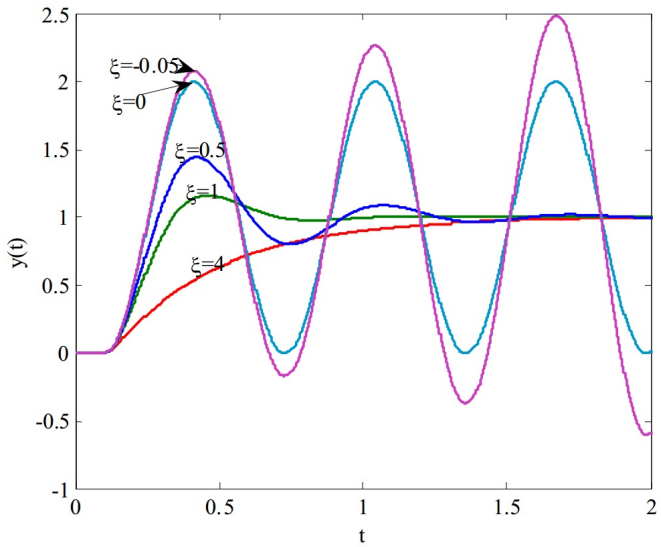
Cambiando la notación:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}R(s)$$

con:

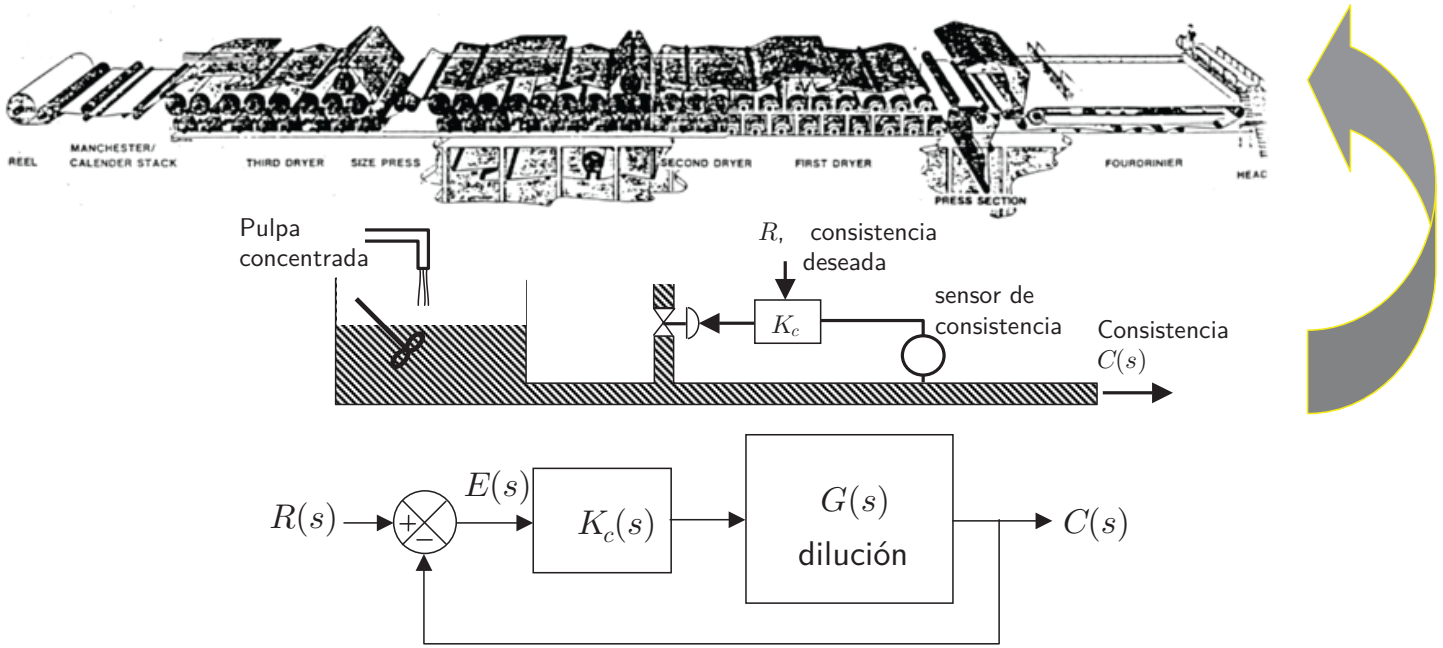
$$\omega_n^2 = K \qquad \xi = \frac{p}{2\omega_n} = \frac{p}{2\sqrt{K}}$$

¿Qué ocurre con ω_n y ξ cuando varía K?



Respuesta al Escalón Unitario

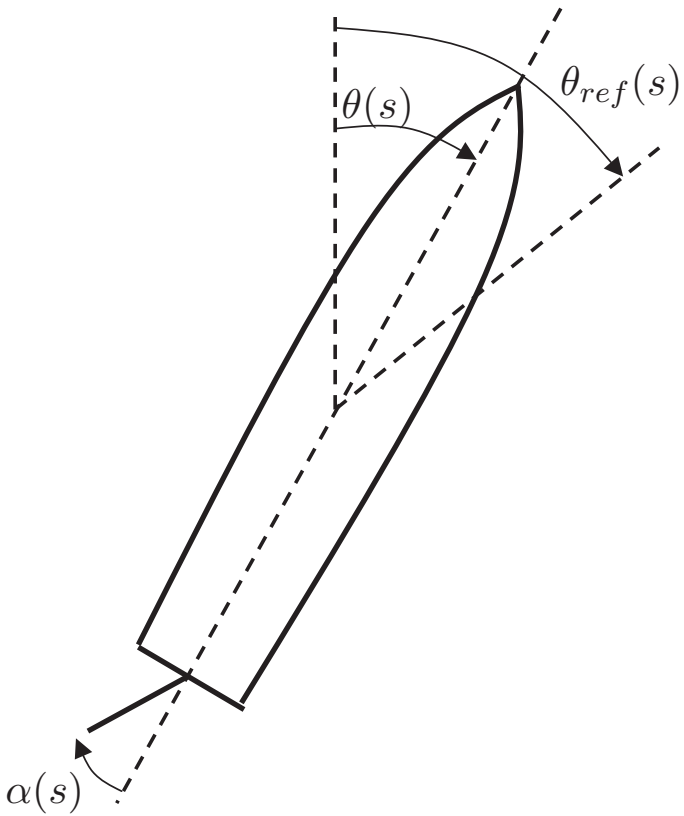
Ejemplo: Control de Concentración de Pulpa en Fabricación de Papel

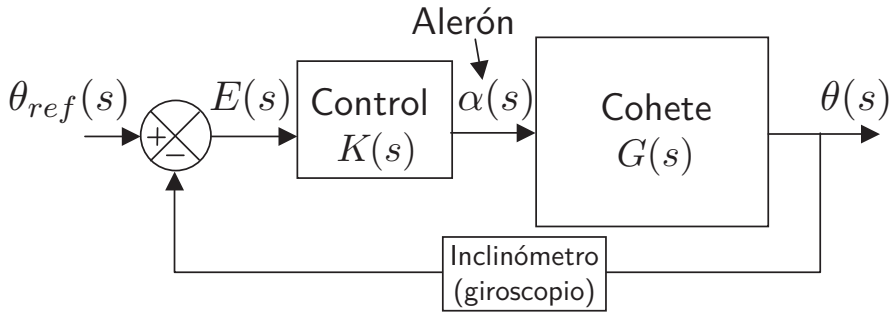


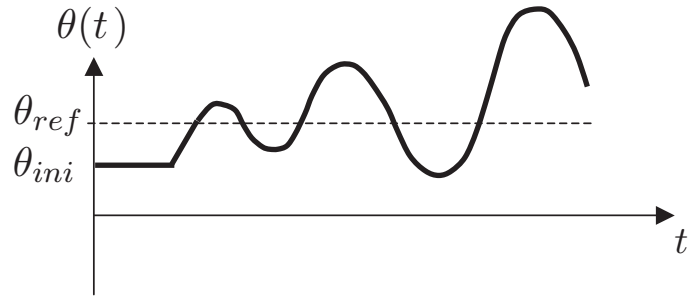
Suponiendo $K_c(s) = \frac{-K}{10s+1}$ y $G(s) = \frac{-1}{2s+1}$ determine:

1. La función $C(s)/R(s)$.
2. El error estacionario para un cambio escalón en la consistencia deseada $R(s) = A/s$.
3. El valor de K requerido para un error permisible en estado estacionario menor que 1%.

Comportamiento de sistemas de 3er orden: Ejemplo Cohete espacial







Dinámica y Estática:

- Régimen transitorio: $s \neq 0$ (estabilidad, respuestas rápidas, dinámica, etc.)
- Régimen permanente: $s = 0$ (valores estacionarios, error permanente, etc.)

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{s(s+0.6)(s+0.13)}$$

Si realimentamos a través de un controlador proporcional $K(s) = K$, tenemos:

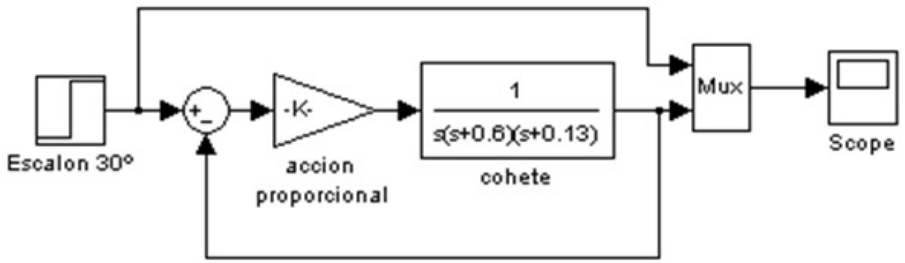
$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + 0.73s^2 + 0.078s + K}$$

Por lo que se tiene la siguiente ecuación característica:

$$q(s) = s^3 + 0.73s^2 + 0.078s + K$$

Comportamiento de sistemas de 3er orden: Ejemplo Cohete espacial

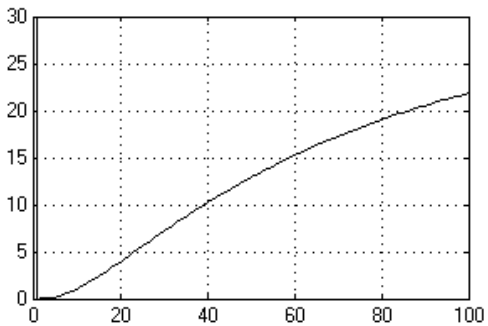
Supónga que el cohete inicialmente asciende en forma vertical ($\theta_{ref} = 0°$) y luego se cambia la referencia a 30° de manera que el cohete adopte un ángulo adecuado para salir de la atmósfera terrestre. El modelo llevado a Simulink es:



i) Para $K = 0.001$, las raíces del sistema realimentado son:

$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.6035,\ -0.1117,\ -0.0148)$$

y la respuesta en el tiempo:

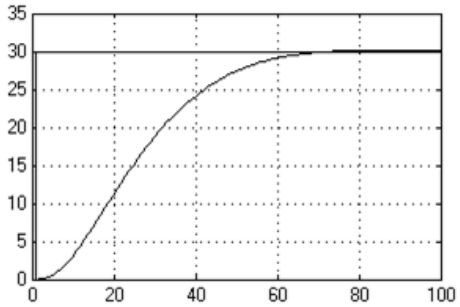


Se aprecia un comportamiento extremadamente lento. Se aumentará la ganancia para "apurar" la respuesta (nótese que a los 100 segundos aun no se logra alcanzar la nueva referencia de 30°).

ii) Para $K = 0.003$, las raíces del sistema realimentado son:

$(s_1, s_2, s_3) = (-0.6102,\ -0.0599 - 0.365j,\ -0.0599 + 0.0365j$ Raíces complejas

La respuesta en el tiempo:

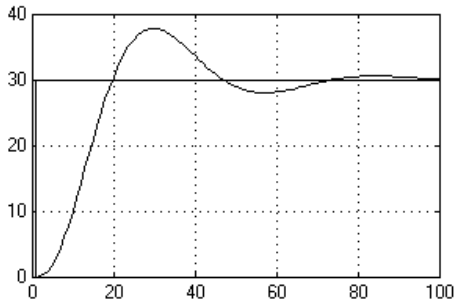


Con esta ganancia, se logra alcanzar el valor deseado dentro de los 100 segundos, sin embargo, ello aún es excesivamente lento, por lo que se sigue aumentando la ganancia.

iii) Para $K = 0.01$, las raíces del sistema realimentado son:

$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.6316,\ -0.0492 - 0.1158j,\ -0.0492 + 0.1158j)$$

y la respuesta en el tiempo:

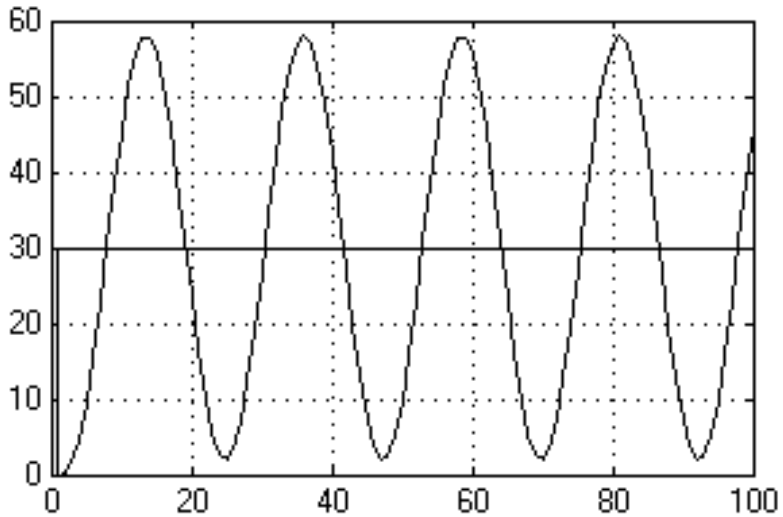


La respuesta efectivamente es mas rápida, sin embargo es también oscilatoria. Sigamos aumentando la ganancia...

iv) Para $K = 0.057$, las raíces del sistema realimentado son:

$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.7301,\ -0.2794j,\ 0.2794j)$$

¡Nótese que existen dos raíces imaginarias puras! Su respuesta en el tiempo es:

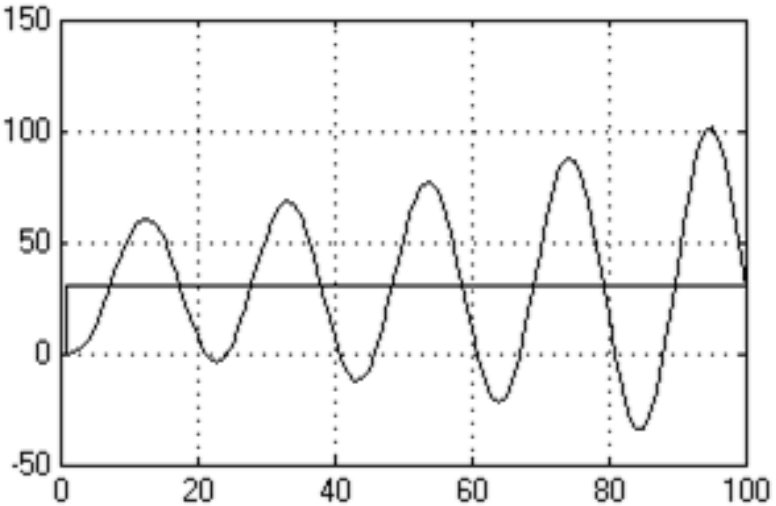


v) Para $K = 0.07$, las raíces del sistema realimentado son:

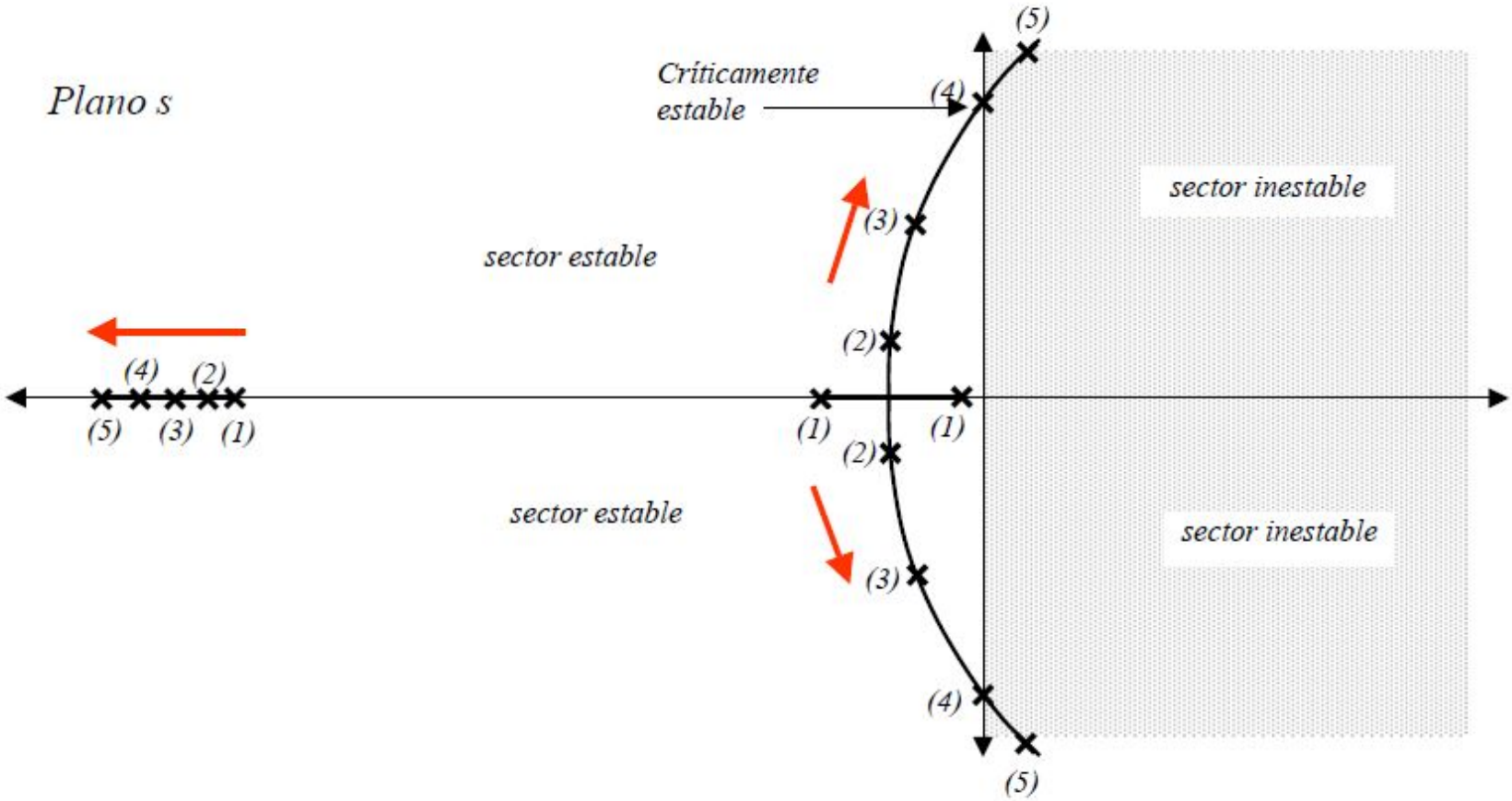
$$(s_1, s_2, s_3) = (-0.7504,\ 0.0102 - 0.3053j,\ 0.0102 + 0.3053j)$$

¡Nótese que existen dos raíces con parte real positiva!

Su respuesta temporal es:



Comportamiento de Sistemas de 3^{er} Orden: Ejemplo Cohete Espacial



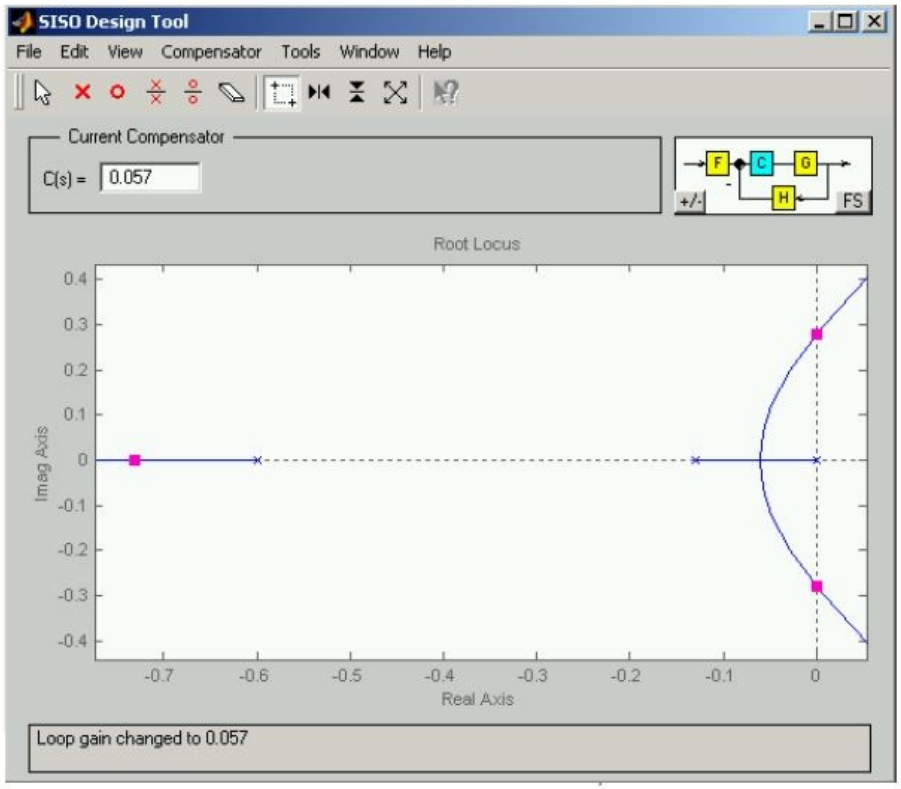
Comportamiento de Sistemas de 3^{er} Orden: Ejemplo Cohete Espacial

¿Qué herramientas existen para saber si las raíces de un sistema son inestables?

- Computador: función Python `r, k = rlocus(sys)`
- Computador: función Matlab `rtool(sys)`
- Criterio de Routh-Hurwitz

-Función Matlab ***rltool***

```
>> num=[0 0 0 1];
>> den=conv([1 0.6 0],[1 0.13]);
>> rltool(tf(num,den))
```



Indices de Desempeño o Cifras de Mérito

Son medidas cuantitativas del funcionamiento del sistema y en base a ellos puede desarrollarse el control óptimo de un sistema, es decir, minimizar el índice dado.

Por ejemplo, si el índice es *Integral of Quadratic Error*:

$$IQE = \int_0^T e^2(t)dt$$

Entonces para el diseño de controladores se persigue:

$$J = \min_{K(s)} IQE$$

Dada la planta a controlar y sujeto a que el lazo cerrado sea estable.

Indices de Desempeño o Cifras de Mérito

Otros índices usados:

- Integral of Absolute Error: $IAE = \int_0^T |e(t)|dt$
- Integral of Time and Absolute Error: $ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)|dt$
- Frecuencia, normas H_2 y $H_\infty = \int_\infty^\infty ||E(\omega)||d\omega$. Integral del espectro de frecuencia del error, n es norma (2 o ∞)
- Caso general: $\int_0^T f(e(t), y(t), u(t), t)dt$

Generalmente se incorpora la variable manipulada $u(t)$, para considerar saturación de estas variables:

Por ejemplo: $I = \int_0^T (|e(t)| + \rho|u(t)|)dt$, donde $\rho = \begin{cases} k : \text{cte} & \text{si} |u| > u_{max} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Caso cuadrático: $I = \int_0^T (e^2(t) + \rho \cdot u^2(t))dt$

(Tiene solución analítica vía Ecuación de Ricatti)

Referencias Adicionales

- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Enami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 4^a ed. (1^a ed. 1986), Prentice Hall, 2002.
- G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2001.