Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 3

Bode segundo orden, Compensador y Ziegler Nichols

23 de Mayo 2025

Martín Valencia - martin.valencia@uc.cl

Análisis de magnitud y fase en sistemas de segundo orden

La función de transferencia estándar de un sistema de segundo orden es:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Al evaluar en frecuencia ($s = j\omega$):

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega\omega_n}$$

Magnitud

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}}$$

Fase

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Análisis por rangos de frecuencia

- **Para** $\omega \ll \omega_n$:

$$|G(j\omega)| \approx 1 \quad \Rightarrow \quad 20\log_{10}|G(j\omega)| \approx 0 \text{ dB}, \quad \angle G(j\omega) \approx 0^\circ$$

- **Para** $\omega = \omega_n$:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\xi} \quad \text{(solo si hay pico)}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

- **Para** $\omega \gg \omega_n$:

$$|G(j\omega)| \approx \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \text{pendiente de } -40 \text{ dB/década}, \quad \angle G(j\omega) \approx -180^\circ$$

Derivación de la frecuencia de resonancia ω_r

Buscamos la frecuencia $\omega = \omega_r$ tal que $|G(j\omega)|$ sea máxima.

Partimos de:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}}$$

El máximo se alcanza cuando el denominador es mínimo. Sea:

$$D(\omega) = \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}$$

Buscamos ω_r tal que $\frac{d}{d\omega} D(\omega)^2 = 0$:

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2\right] = 0$$

Calculamos:

$$-4\omega(\omega_n^2 - \omega^2) + 8\xi^2\omega_n^2\omega = 0$$

Factorizando $\omega \neq 0$:

$$-4(\omega_n^2 - \omega^2) + 8\xi^2\omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\omega_n^2 + 4\omega^2 + 8\xi^2\omega_n^2 = 0$$

$$4\omega^2 = 4\omega_n^2(1 - 2\xi^2) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_n^2(1 - 2\xi^2)$$

Este valor no representa el máximo de magnitud de la respuesta temporal, sino la frecuencia a la cual aparece el modo oscilatorio de mayor amplitud.

En cambio, para magnitud, se demuestra que el pico de resonancia ocurre en:

$$\boxed{\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{(válido solo si } \xi < 1)$$

Aunque para este curso será válida la aproximación

$$\boxed{\omega_r = \omega_n} \quad \text{(sólo si } 0 < \xi < 1\text{)}$$

De esta forma, el pico de resonancia se puede aproximar como.

$$M_r = |G(j\omega_r)| = K\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_r^2)^2 + (2\xi\omega_r\omega_n)^2}} \approx K\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_n^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_n)^2}} = K\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(2\xi\omega_n^2)}} = \frac{K}{2\xi}$$

$$\boxed{M_r = \frac{K}{2\xi}}$$

Si se usara el valor no aproximado.

$$\boxed{M_r = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Problema 1

Considere el siguiente sistema de segundo orden:

$$G(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde los parámetros son:

$$K = 2, \qquad \omega_n = 8 \text{ rad/s}, \qquad \xi = 0.3$$

1. Exprese la función de transferencia con los valores numéricos evaluados.
2. Calcule la magnitud y fase de $G(j\omega)$ para:
   a) $\omega = 0.8$ rad/s
   b) $\omega = \omega_n$
   c) $\omega = 80$ rad/s
3. Determine si el sistema presenta pico de resonancia:
   a) Justifique si existe o no un pico.
   b) En caso afirmativo, calcule la frecuencia de resonancia ω_r.
   c) Calcule el valor del pico de resonancia M_r en valor absoluto y en decibeles.
4. Comente cómo se vería el diagrama de Bode en magnitud a partir de sus respuestas.

Solución:

Se tiene la siguiente función:

$$G(s) = 2 \cdot \frac{64}{s^2 + 4.8s + 64}$$

Se sabe que:

$$G(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Al evaluar en frecuencia ($s = j\omega$):

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega\omega_n}$$

Y la magnitud y fase se calculan mediante:

$$|G(j\omega)| = K \cdot \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Se evalúa para tres frecuencias:

Para $\omega = 0.8$:

$$|G(j0.8)| \approx 2.02 = 6.1dB, \quad \angle G(j0.8) \approx -3.47^\circ$$

Para $\omega = 8$:

$$|G(j8)| = \frac{128}{38.4} \approx 3.33 = 10.45dB, \quad \angle G(j8) = -90^\circ$$

Para $\omega = 80$:

$$|G(j80)| \approx 0.0202 = -33.89dB, \quad \angle G(j80) \approx -176.53^\circ$$

Se verifica si el sistema presenta pico de resonancia.

Dado que $\xi = 0.3$, el sistema es subamortiguado y presenta un pico de resonancia.

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 8 \cdot \sqrt{1 - 0.09} \approx 7.63 \text{ rad/s}$$

$$M_r = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{0.91}} \approx \frac{2}{0.5723} \approx 3.50$$

$$M_{r_{\text{dB}}} = 20\log_{10}(3.50) \approx 10.88 \text{ dB}$$

Se calcula utilizando la aproximación.

$$\omega_r \approx \omega_n = 8 \text{ rad/s}$$

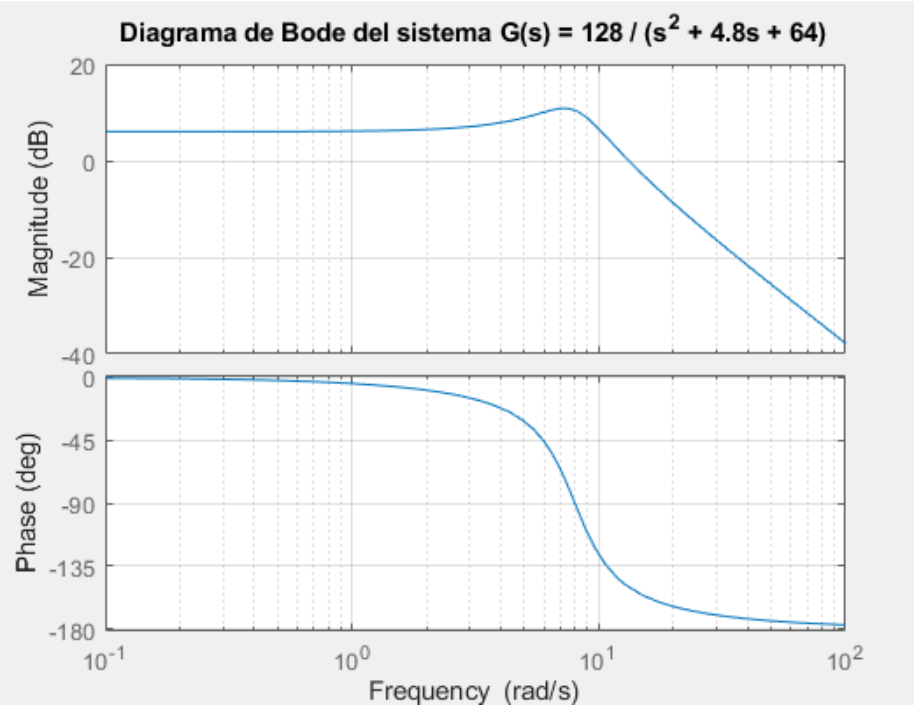
$$M_r \approx 2 \cdot \frac{1}{2\xi} \approx 3.33$$

$$M_{r_{\text{dB}}} = 20\log_{10}(3.33) \approx 10.45 \text{ dB}$$

Conclusiones:

- La magnitud comienza en $20\log_{10}(2) \approx 6$ dB para bajas frecuencias.
- Presenta un pico de resonancia de aproximadamente 10.88 dB en $\omega_r \approx 7.63$ rad/s.

- A frecuencias altas, la magnitud decae con pendiente de -40 dB/década, y la fase tiende a $-180°$.



Problema 2

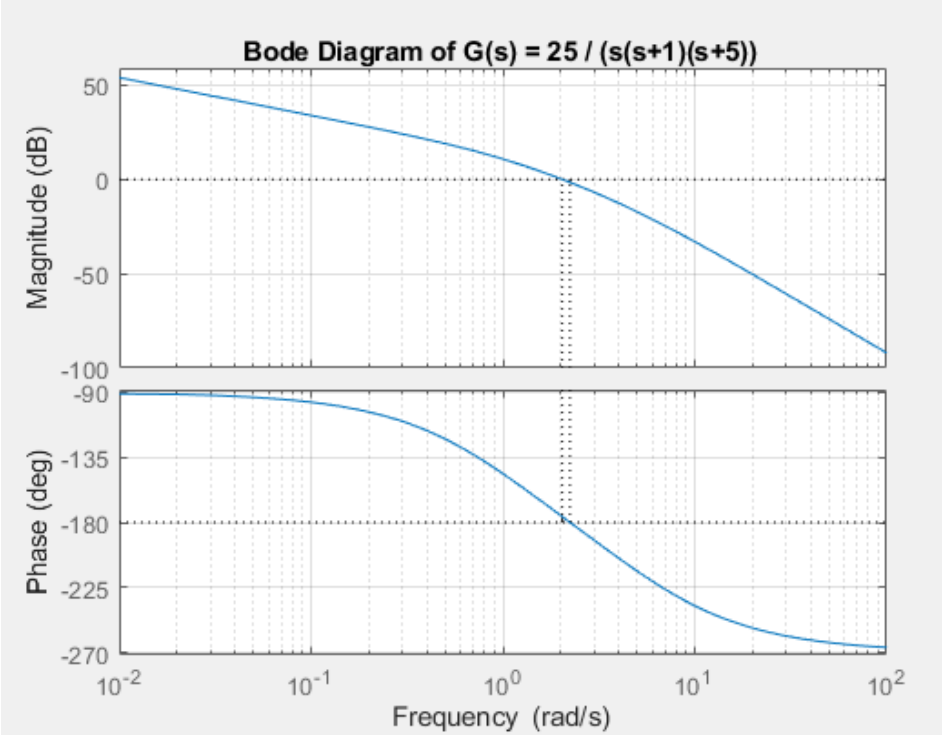
Dado el sistema:

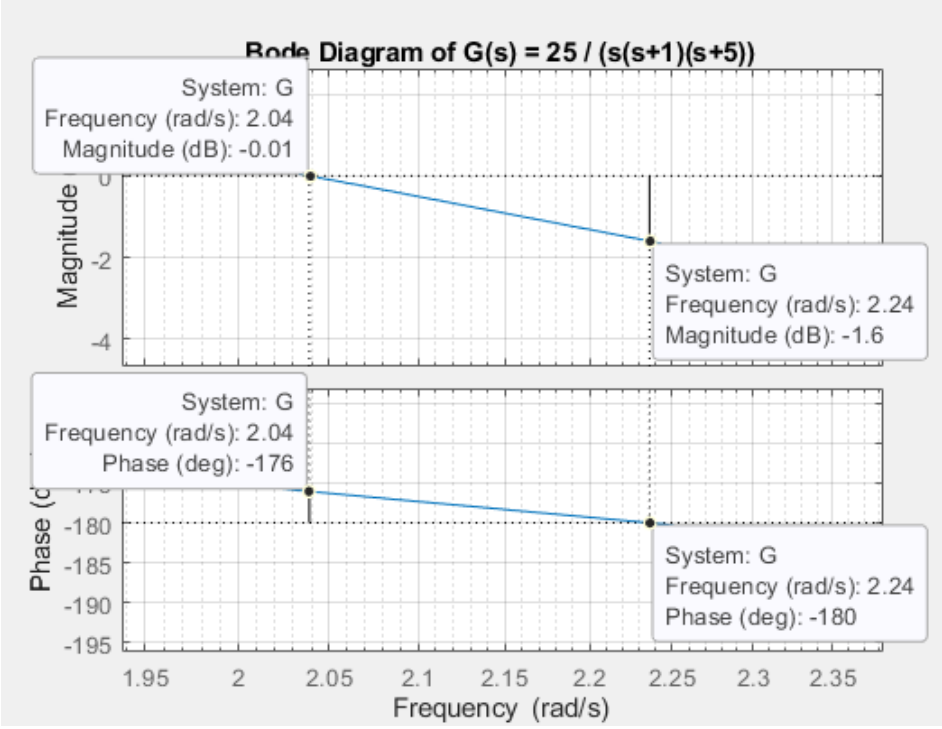
$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+5)}$$

Se desea diseñar un compensador de adelanto de la forma

$$C(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Con $\frac{1}{T} = 2.2$ de modo que asegure que el margen de fase es de al menos $40°$, determine cual es la ganancia en DC, para ello use los siguientes diagramas de bode.





Solución:

El compensador de adelanto propuesto es de la forma:

$$C(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Este cumple $\lim_{s\to 0} C(s) = 1$, por lo tanto, tiene ganancia unitaria en DC.

A partir del diagrama de Bode, se observa que el sistema no compensado posee:

$$\omega_c \approx 2.04 \text{ rad/s}, \quad PM \approx 4^\circ$$

Se desea alcanzar un margen de fase de al menos 40°:

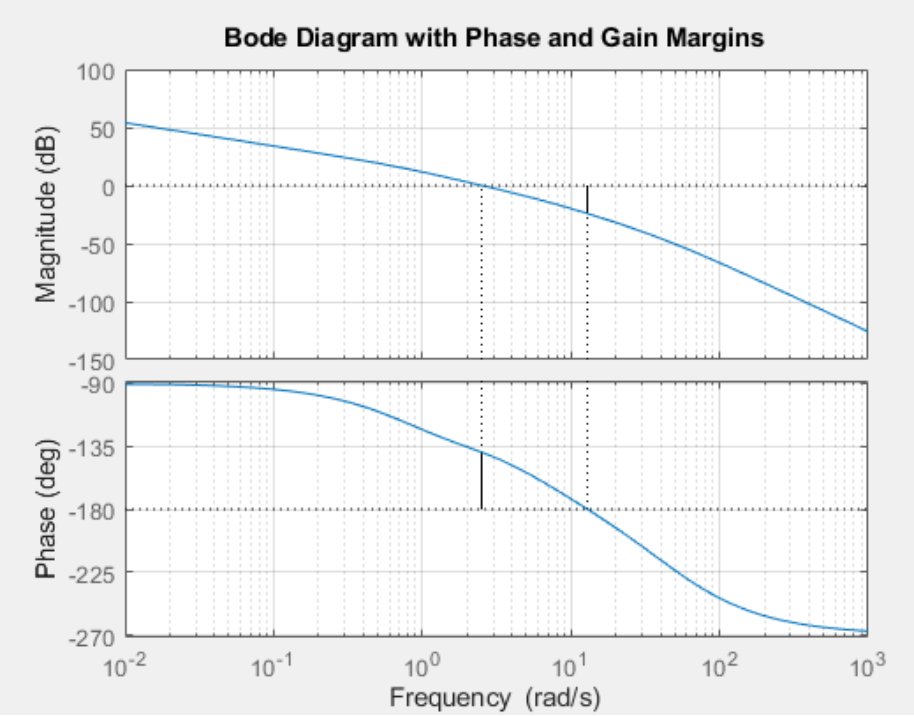
Para ello, se decide diseñar un compensador que aporte un adelanto de fase de aproximadamente 65°.

$$\phi_{\text{máx}} = \sin^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) = 65^\circ$$

$$\sin 65^\circ \approx 0.9 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$
$$\Rightarrow \alpha \approx 0.05$$

Por lo que el compensador quedará expresado de la forma.

$$C(s) = \frac{\frac{s}{2.2}+1}{\frac{s}{44}+1}$$



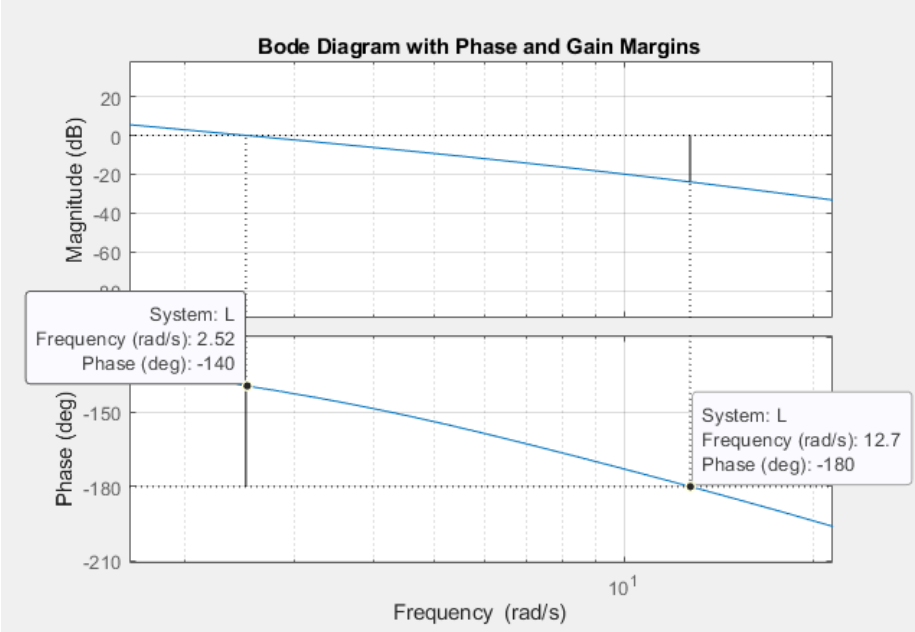


Figura 1: Enter Caption

El sistema compensado cumple:

$$PM = 40°, \quad \omega_c = 2.52 \text{ rad/s}$$

Cabe destacar que la decisión de un compensador "Amigable" se debe a como se comporta el bode en las señales para las frecuencias trabajadas.

Problema 3

Considere la planta

$$G_o(s) = \frac{-s+1}{(s+1)(s+a)}$$

donde $a > 0$. Si se aplica el método de oscilación de Ziegler y Nichols, determine el valor de la ganancia crítica K_c y del período de oscilación P_c obtenidos del experimento. Ajuste los parámetros de un PID en base a K_c y P_c obtenidos, usando la tabla de Z-N:

	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_c$		
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$P_c/8$

Solución:

El método de oscilación se aplica a plantas estables, cerrando el lazo con un controlador proporcional $C(s) = K_p$ y aumentando la ganancia hasta que el lazo muestre una oscilación sostenida(cuando las raices son puramente imaginarias). Para determinar la ganancia crítica a la que se presenta la oscilación obtenemos primero el polinomio de lazo cerrado:

$$A_{cl}(s) = (s+1)(s+a) + K_p(-s+1) = s^2 + (a+1-K_p)s + (a+K_p)$$

Para que haya oscilación sostenida basta que $a+1-K_p = 0$, lo que implica una ganancia crítica de $K_c = a+1$. Esto implica, a su vez, que

$$A_{cl}(s) = s^2 + a + K_p = s^2 + 2a + 1$$

por lo que se desprende que los polos cruzan el eje real en $\pm j\sqrt{2a+1}$, y así la frecuencia crítica de la oscilación sostenida es $\omega_c = \sqrt{2a+1}$. Por lo tanto, el período de la oscilación es $P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{2a+1}}$. Los parámetros del PID son

$$K_p = 0.6(a+1), \quad T_i = \frac{\pi}{\sqrt{2a+1}} \Rightarrow K_i = \frac{K_p}{T_i}, \quad T_d = \frac{\pi/4}{\sqrt{2a+1}} \Rightarrow K_d = K_p \cdot T_d$$