Capítulo 6 – Criterio de Estabilidad basado en el Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Criterio de estabilidad basado en el LGR

Ventajas y Desventajas del Criterio LGR

- Ventajas:
  - El método permite obtener gráficamente los valores de las raíces $\bar{\lambda}_i(K)$ de la ecuación caraceterística de lazo cerrado $\bar{q}(s)$ a partir de las raíces de numerador $p(s)$ y la ecuación caracterítica $q(s)$ del sistema en lazo abierto sin necesidad de resolver la ecuación característica de lazo cerrado numéricamente.
  - Permite analizar la estabilidad del sistema ante cambios de uno de los parámetros del sistema, típicamente la ganancia proporcional K del controlador.
  - Permite estudiar la estabilidad del sistema cuando se añaden compensadores y controladores (es decir, cuando se añaden polos y ceros).
  - El método puede aplicarse sin mayores modificaciones tanto a plantas de tiempo contínuo como discretas, a diferencia del método de Routh-Hurwitz.
- Desventajas:
  - No puede aplicarse a sistemas con retardos a menos que se aproxime el retardo, por ejemplo utilizando una aproximación de Padé. Para sistemas con retardos es preferible utilizar los métodos en frecuencia de Nyquist, Bode o Nichols.

Criterio de estabilidad basado en el LGR

Observaciones sobre el Criterio LGR

- Este método fue propuesto por Evans (1948) y recibe también el nombre de método del lugar geométrico de las raíces de Evans.
- Hoy en día existen herramientas computacionales para encontrar el valor de las raíces mediante métodos numéricos. Sin embargo, la primera ventaja hace de este método muy útil para bosquejar los valores $\bar{\lambda}_i(K)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ en plano complejo $\mathcal{C}$ en función de K.
- Como vimos en el capítulo de respuesta dinámica de sistema lineales, la respuesta de Σ_{CL} está dada por:

$$\bar{y}(t) = \bar{C}_1 e^{\bar{\lambda}_1(K)t} + \cdots + C_n e^{\bar{\lambda}_n(K)t} + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} W_i e^{\bar{\lambda}_i(K)(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

por lo que conocer $\bar{\lambda}_i(K)$ para distintos valores de K es de gran utilidad, puesto que ¡determinan el comportamiento de $\bar{y}(t)$!

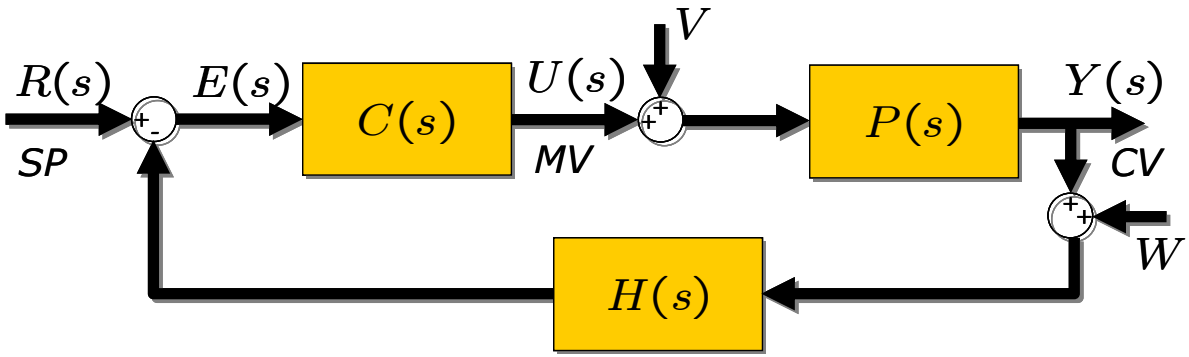
Criterio de estabilidad basado en el LGR

Observaciones sobre el Criterio LGR

- El método puede aplicarse para analizar los efectos de la variación de otras ganancias o parámetros del sistema sobre su estabilidad y no solamente los efectos de las ganancias del controlador.
- Use este método para analizar la estabilidad de sistemas discretos, pero considere que en el caso discreto el sistema es inestable cuando las raíces salen del círculo unitario, es decir cuando $\|z\| \geq 1$.
- Si el sistema es de tiempo continuo y tiene un retardo, tampoco es recomendable usar este método, a menos que explícitamente le estén diciendo que realice una aproximación de Padé del retardo. Para sistemas de tiempo continuo con retardo, es posible obtener respuestas exactas usando los métodos de Nyquist, Bode o Nichols que se verán más adelante en el curso. Si el sistema es continuo, pero el controlador es discreto y el sistema tiene retardos continuos, muchas veces es posible aproximar el retardo o encontrar un retardo discreto equivalente de manera exacta al retardo continuo. En este último caso el método del LGR es útil para analizar la estabilidad de la versión discretizada del sistema original.

Criterio del LGR de un sistema retroalimentado

Considere el diagrama de bloques de un sistema retroalimentado genérico:



Para este sistema la función de transferencia del lazo cerrado se obtiene de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) \\
U(s) &= C(s)E(s) = C(s)\left[R(s) - H(s)Y(s)\right] \\
Y(s) &= P(s)U(s) = P(s)C(s)\left[R(s) - H(s)Y(s)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow G(s) \overset{def}{=} \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}
$$

Criterio del LGR de un sistema retroalimentado

La ecuación característica del lazo cerrado es:

$$\bar{q}(s) \;=\; 1 + C(s)P(s)H(s) \;=\; 0$$

Se desea saber como varían las raíces de $\bar{q}(s)$ con respecto a la variación de algún parámetro de $C(s)$, $P(s)$ o $H(s)$, puesto que la ubicación de las raíces de $\bar{q}(s)$ en $\mathbb{C}$ determina las características de la respuesta dinámica y estabilidad del sistema retroalimentado.

Sea K el parámetro de interés, se asume que es posible escribir la ecuación característica $\bar{q}(s)$ como:

$$\bar{q}(s) \;=\; 1 + KF(s) \;=\; 0$$

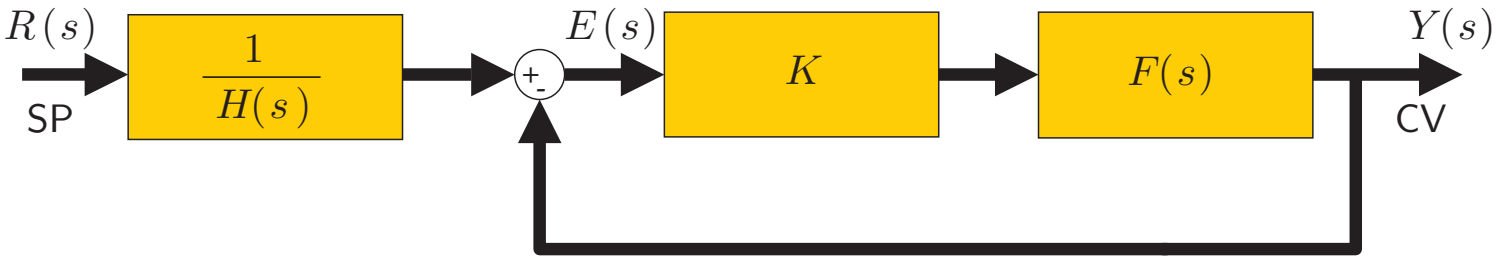
donde $KF(s) = C(s)P(s)H(s)$.

Notar que si $KF(s) = C(s)P(s)H(s)$, luego:

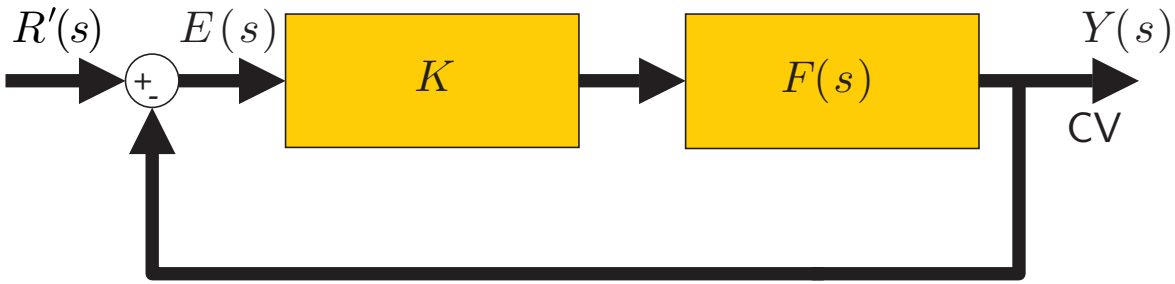
$$G(s) \;\stackrel{def}{=}\; \frac{Y(s)}{R(s)} \;=\; \frac{K\,F(s)}{1 + K\,F(s)} \cdot \frac{1}{H(s)}$$

Criterio del LGR de un sistema retroalimentado

Por lo tanto el sistema retroalimentado del diagrama de bloques anterior equivale a un sistema:



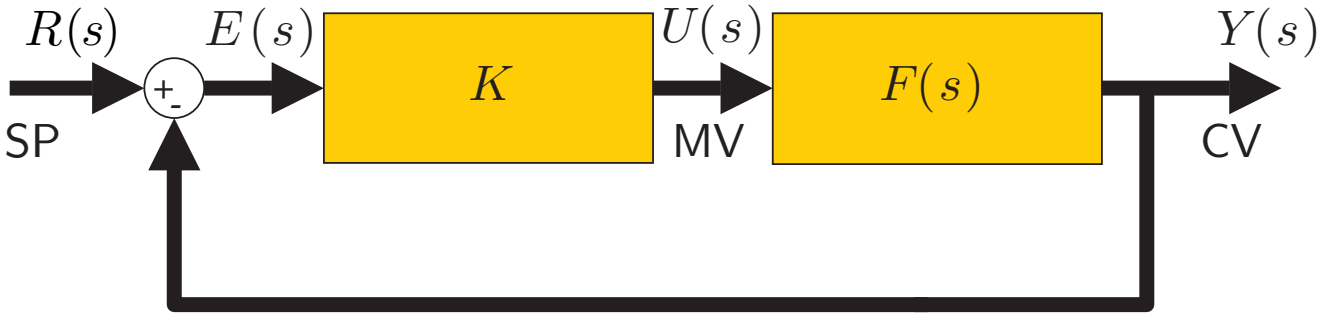
o bien



con $K(s) = K$ y $R'(s) = R(s)/H(s)$.

Criterio del Lugar Geométrico de las Raíces

Definición (LGR): El Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) son las trayectorias que describen las raíces de $\bar{q}(s)$, la ecuación característica del lazo cerrado, cuando se varía la ganancia K entre 0 y $+\infty$.



Considerando que $F(s)$ puede ser escrito como un cuociente de polinomios

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)},$$

se tiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KF(s)}{1+KF(s)} = \frac{K\frac{p(s)}{q(s)}}{1+K\frac{p(s)}{q(s)}}$$

$$= \frac{Kp(s)}{q(s)+Kp(s)} = \frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)}.$$

Criterio del Lugar Geométrico de las Raíces

En otras palabras, si la ecuación caracterísitica de lazo cerrado de un sistema de orden n:

$$\bar{q}(s) = q(s) + Kp(s)$$

tiene raíces

$$r_i = \lambda_i(K), \ i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

el LGR es una gráfica de la posición de las raíces $r_i = \lambda_i(K)$ en el plano $\mathbb{C}$ a medida que cambia la ganancia K.

Dado que la *respuesta natural*, también llamada *respuesta no forzada* o *respuesta característica*, del sistema está dada por:

$$y_h(t) \quad = \quad C_1 e^{\lambda_1(K)t} + C_2 e^{\lambda_2(K)t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n(K)t},$$

el comportamiento y estabilidad del sistema está determinado por los valores de las raíces $r_i = \lambda_i(K)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, en vez de calcular una nueva ecuación para $y_h(t)$ en términos de la ganancia K, basta con conocer los valores de las raíces $r_i = \lambda_i(K)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ante variaciones de K.

Criterio del Lugar Geométrico de las Raíces

Considere la planta:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

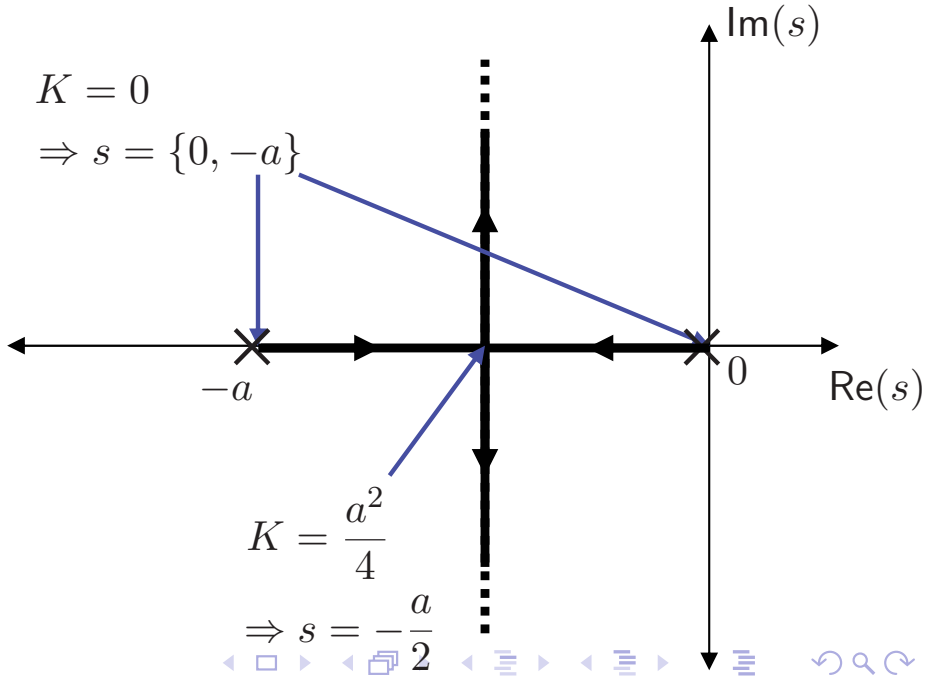
Luego, la ecuación característica del lazo cerrado estará dada por:

$$\bar{q}(s) = s^2 + as + K$$

cuyas raíces son:

$$s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2}$$

Del gráfico resulta evidente que una planta de 2° orden con polos estables y reales siempre será estable, independiente de la magnitud de la ganancia de realimentación K.



Paso 1:
Escriba la ecuación característica, $\bar{q}(s)$, de la función de transferencia del lazo cerrado $G(s) = Y(s)/R(s)$ factorizada de tal manera que aparezca el parámetro de interés K como factor multiplicador de la forma:

$$\bar{q}(s) = 1 + KF(s) = 0$$

Notas:

a) $F(s)$ no necesariamente es la función de transferencia de la planta del sistema. La función de transferencia $F(s)$ puede representar la composición de las funciones de transferencia del actuador, planta, sensor, entre otras. De la misma manera, K, no necesariamente es la ganancia del controlador, puede también ser otro parámetro que interviene linealmente en la ecuación característica del lazo cerrado.

Notas: (cont.)

b) Se asume que $F(s)$ es una función racional tal que:

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

con:

$$p(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i$$

$$= (s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_{m-1})(s - z_m) = \prod_{i=1}^{m}(s - z_i)$$

$$q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

$$= (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_{n-1})(s - p_n) = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)$$

y $n \geq m$. Note que tanto el numerador como denominador son polinomios mónicos, es decir el coeficiente de la mayor potencia de s es 1 (positivo!).

Notas: (cont.)

c) Si el parámetro es elegido de tal manera que resulta que $n < m$, el procedimiento se puede aplicar considerando la ecuación característica equivalente:

$$\bar{q}(s) = 1 + K^{-1}F(s)^{-1} = 0$$

d) Si $p(s)$ o $q(s)$ no son mónicos, deberán manipularse algebraicamente hasta obtener polinomios mónicos:

$$\begin{aligned} p(s) &= b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ &= b_m \left(s_m + \frac{b_{m-1}}{b_m} s^{m-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_m} s + \frac{b_0}{b_m} \right) = b_m \hat{p}(s) \\ q(s) &= a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ &= a_n \left(s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n} \right) = a_n \hat{q}(s) \end{aligned}$$

y trabajar con $\bar{q}(s) = 1 + \hat{K}\hat{F}(s) = 0$ donde:

$$\hat{K} = \frac{b_m}{a_n} K \qquad \text{y} \qquad \hat{F}(s) = \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)}.$$

Paso 2:

Escriba la ecuación característica $\bar{q}(s)$ empleando la forma factorizada en m ceros y n polos de $F(s)$ como:

$$\begin{aligned}\bar{q}(s) &= 1 + KF(s) = 0 \\ &= 1 + K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = 0 \\ &= \prod_{i=1}^{n}(s - p_i) + K\prod_{i=1}^{m}(s - z_i) = 0\end{aligned}$$

y ubique en el plano complejo los polos y ceros, p_i, z_i, de $F(s)$ marcándolos con signos $\times$ y $\circ$, respectivamente.

Nota:

Observe que las raíces de $\bar{q}(s)$ corresponden a los **polos** de $F(s)$ cuando $K = 0$, y a los **ceros** de $F(s)$ cuando $K \to +\infty$.

Paso 3:

De la observación anterior se deduce que, **el LGR se inicia en los polos de $F(s)$, y termina (para m polos) en los ceros de $F(s)$.**

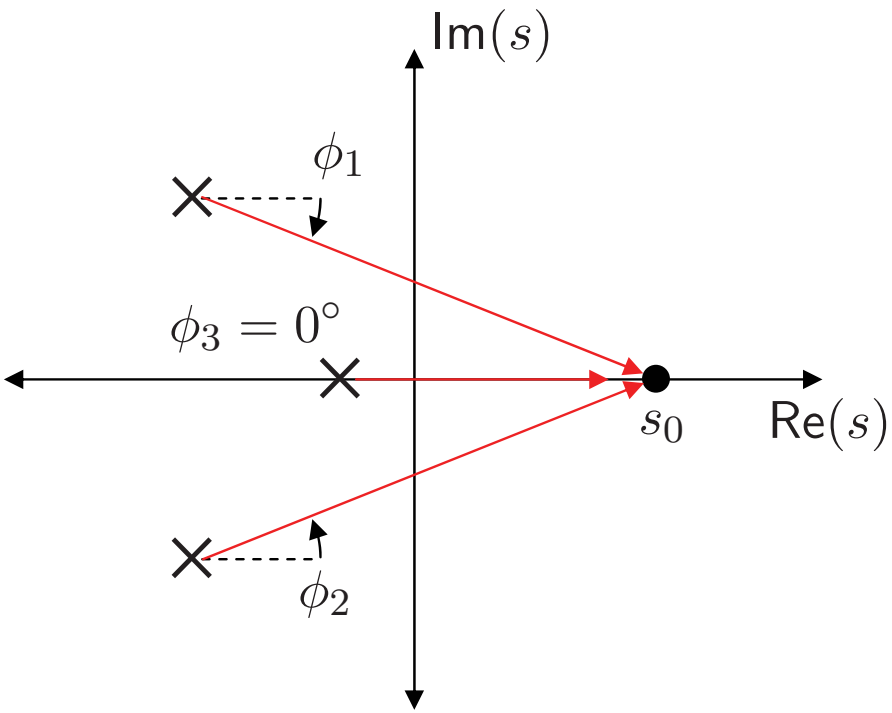
El LGR sobre el eje real siempre yace en una sección del eje real a la izquierda de un número *impar* de polos y ceros.

Nota:

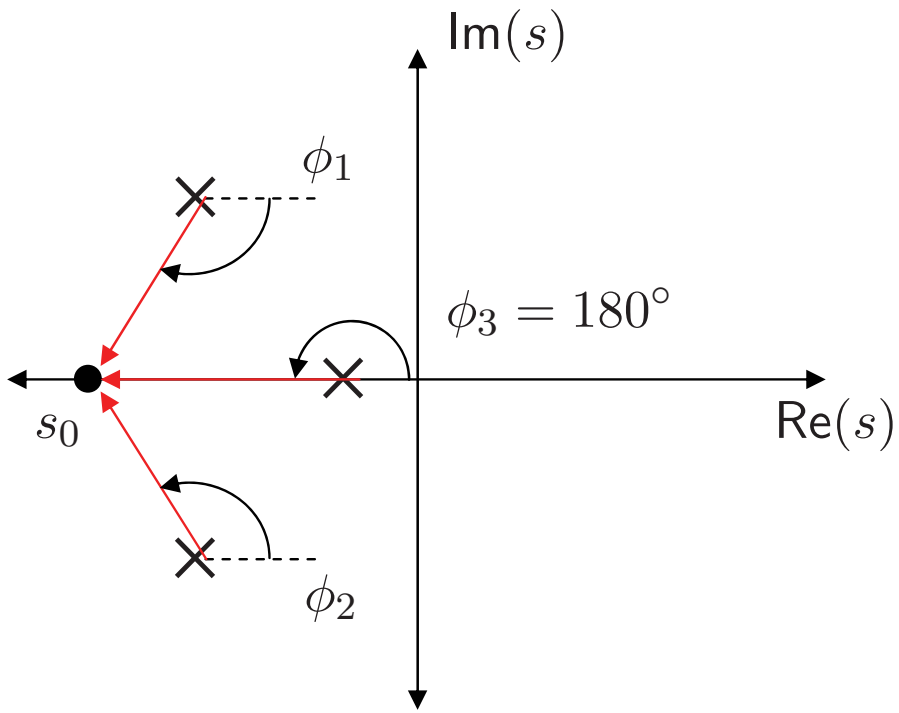
El hecho anterior se puede entender si se re-escribe la ecuación característica $\bar{q}(s) = 0$ como:

$$F(s) = -\frac{1}{K}$$

De esta manera manera es posible intepretar el LGR como el lugar de los puntos $s \in \mathbb{C}$ para el cual la fase de $F(s)$ es $\angle F(s) = 180°$. Tomando un punto de prueba arbitrario s_0 es posible ver que la fase de $F(s)$ es 180°, si s_0 está a la izquierda de un número impar de polos y ceros, ó 0° si está al lado derecho, ya que los pares de ceros/polos complejos conjugados tienen ángulos que se cancelan como se muestra en la siguiente figura.



$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0°$$
$$\Rightarrow s_0 \notin \text{LGR}$$



$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 180°$$
$$\Rightarrow s_0 \in \text{LGR}$$

Paso 4:

El LGR siempre es simétrico con respecto al eje real, pues la raíces complejas aparecen como pares conjugados y determinan que los coeficientes de $\bar{q}(s)$ sean reales.

Paso 5:

Si $m < n$, habrán $n - m$ secciones del LGR que se dirigen hacia infinito cuando $K \to \infty$ y $s \to \infty$ ($n - m$ polos tienden hacia $n - m$ "ceros en el infinito") aproximándose a lo largo de asíntotas que parten del punto $s = a + j0$ con un ángulo ϕ_k, dados por:

- Punto de partida de las asíntotas:

$$a = \frac{\sum \text{polos de } F(s) - \sum \text{ceros de } F(s)}{n - m}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}$$

- Ángulo de las asíntotas:

$$\phi_k = \frac{2k - 1}{n - m} 180^\circ, \; k = 1, 2, \ldots, n - m$$

Nota:

Las reglas del paso 5 se obtienen al considerar que cuando $K \to \infty$, m polos de $G(s)$ tienden a sus ceros. Luego, dividiendo el numerador y denominador de $G(s)$ por su numerador, se tiene:

$$G(s) = \frac{1}{\frac{q(s)}{Kp(s)} + 1} \approx \frac{1}{\frac{1}{K}(s-a)^{n-m} + 1}$$

ya que m de los polos de $G(s)$, que parten de m de las n raíces de $q(s)$, tienden hacia las m raíces de $p(s)$ y se cancelan mutuamente.

De esta manera la ecuación características se "aproxima o tiende" a una que solo contiene los polos de $F(s)$ que no han convergido a un cero de $F(s)$, dada por:

$$1 + K\frac{1}{(s-a)^{n-m}} = 0$$

Para un observador en el infinito del plano complejo, estos polos de $G(s)$ parecen concentrarse en $s = a$, el lugar donde parten las asíntotas.

Ángulo de las asíntotas

Considerando la ecuación característica aproximada, las asíntotas deben tener un ángulo que cumple:

$$\angle \frac{1}{(s-a)^{n-m}} = \angle \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-m} R_k e^{j\phi_k}} = \angle -\frac{1}{K} = 180^\circ$$

Para raíces grandes, hacia el infinito ($s \to \infty$), debe cumplirse que:

$$(n-m)\phi_k = 180^\circ + 360^\circ(k-1)$$

de donde se obtiene la expresión para el ángulo ϕ_k de las asíntotas.

Punto de partida de las asíntotas

El punto de partida de las asíntotas puede encontrarse considerando una propiedad básica de los polinomios (ver apuntes sobre el criterio de R-H):

$$q(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)$$

Igualando los coeficientes de s^{n-1} se cumple que:

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$b_{n-1} = -\sum_{i=1}^{m} z_i$$

Aplicando este resultado a la ecuación característica de lazo cerrado $\bar{q}(s)$:

$$\bar{q}(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i + K \sum_{j=0}^{m} b_j s^j = \prod_{i=1}^{n} (s - r_i) = 0$$

Procedimiento gráfico para obtener el LGR (11/18)

Notando que, si $m < n-1$, el coeficiente de orden s^{n-1} en la ecuación anterior no depende de K y es igual al negativo de la suma de las raíces:

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} r_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i$$

Por otro lado, en el límite cuando $K \to \infty$, m de las raíces de $\bar{q}(s)$ tienden hacia los ceros de $F(s)$, y $n-m$ de las raíces tienden a las asíntotas del sistema asintótico $1/(s-a)^{n-m}$ cuyos polos suman $(n-m)a$, luego:

$$-\sum_{i=1}^{n} r_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i = -\sum_{i=1}^{m} p_i \overset{z_i}{-} \sum_{i=m+1}^{n} p_i \overset{a}{}$$

Por lo tanto, reordenando términos:

$$(n-m)a = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j$$

de donde se obtiene el punto de partida de las asíntotas $s = a$.

Paso 6:

El ángulo de partida de un polo de multiplicidad λ está dado por:

$$\lambda\phi_k^{sal} = \sum_{j=1}^{m}\psi_j - \sum_{i=1,i\neq k}^{n}\phi_i - 180^\circ - 360^\circ(k-1)$$

El ángulo de llegada a un cero de multiplicidad λ está dado por:

$$\lambda\psi_k^{lleg} = -\sum_{j=1,j\neq k}^{m}\psi_j + \sum_{i=1}^{n}\phi_i + 180^\circ + 360^\circ(k-1)$$

donde $k = 1, 2, \ldots, \lambda$.

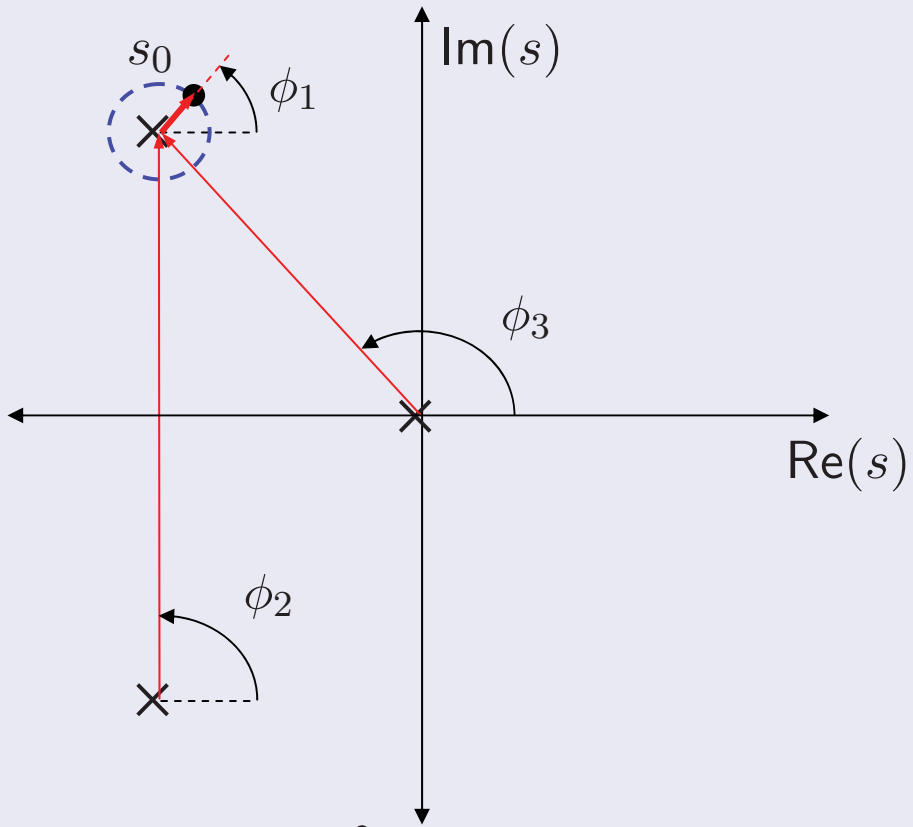
Nota:

El hecho anterior se desprende del análisis de la fase de la ecuación característica $\bar{q}(s) = 0$, para la cual se cumple que:

$$\angle F(s) = \angle -\frac{1}{K} \;\Rightarrow\; \angle\frac{\prod_{i=1}^{m}P_i e^{j\psi_i}}{\prod_{i=1}^{n}Q_i e^{j\phi_i}} = \sum_{i=1}^{m}\psi_i - \sum_{i=1}^{n}\phi_i = 180^\circ$$

Nota: (cont.)

Gráficamente, el ángulo de salida desde los polos o de llegada a los ceros se encuentra colocando un punto de prueba s_0 en la cercanía (infinitesimal) del polo o cero, y graficando el ángulo del vector que une cada polo o cero a s_0, respecto al eje horizontal, es decir el ángulo de los vectores $\phi_i = \angle s_0 - p_i,\ \psi_i = \angle s_0 - z_i$.



$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = 180^\circ \ \Rightarrow\ \phi_1 = -\phi_2 - \phi_3 - 180^\circ$$

Paso 7:
El punto en el cual el LGR cruza el eje imaginario se calcula usando el método de Routh-Hurwitz.

En todos los casos en que $n - m > 2$, al menos una rama del LGR cruzará el eje imaginario... ¿Por qué? Determine las asíntotas para este caso.

Nota:

El valor de la frecuencia para el cual el LGR cruza el eje imaginario puede encontrarse reemplazando K_c (la ganancia encontrada por el método de R-H), y $s = j\omega_c$ en que $\bar{q}(s) = 0$. De este modo, debe resolverse:

$$\bar{q}(j\omega_c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}\{\bar{q}(j\omega_c)\} = 0 \\ \text{Im}\{\bar{q}(j\omega_c)\} = 0 \end{cases}$$

En algunos casos sencillos, es posible encontrar la ganancia crítica K_c y la frecuencia ω_c solamente a partir de las ecuaciones anteriores.

Paso 8:

De existir puntos en los cuales existen múltiples raices o desde los cuales "despega" el LGR del eje real, estos pueden encontrarse resolviendo:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{F(s)}\right) = 0$$

o equivalentemente:

$$p(s)\frac{dq(s)}{ds} - q(s)\frac{dp(s)}{ds} = 0$$

Nota:

E n el caso en que hay múltiples raíces r_λ (de multiplicidad $\lambda > 1$), para una cierta ganancia K_λ, la ecuación característica del lazo cerrado puede re-escribirse como:

$$\bar{q}(s) = q(s) + K_\lambda p(s) = (s - r\lambda)^\lambda f(s) = 0 \quad (1)$$

diferenciando con respecto a s:

$$\frac{dq(s)}{ds} + K_\lambda \frac{dp(s)}{ds} = \lambda(s - r_\lambda)^{\lambda-1} f(s) + (s - r_\lambda)^\lambda \frac{df(s)}{ds} = 0 \quad (2)$$

Nota: (cont.)

Evaluando las ecuaciones (1) y (2) en $s = r_\lambda$ se tiene:

$$\text{De (1):} \qquad K_\lambda = -\left.\frac{q(s)}{p(s)}\right|_{s=r_\lambda}$$

$$\text{De (2):} \qquad \left[\frac{dq(s)}{ds} + K_\lambda \frac{dp(s)}{ds}\right]_{s=r_\lambda} = 0$$

Reemplazando K_λ de la primera ecuación en la segunda, se debe cumplir para $s = r_\lambda$ que:

$$\left[p(s)\frac{dq(s)}{ds} - q(s)\frac{dp(s)}{ds}\right]_{s=r_\lambda} = 0$$

La ecuación anterior entrega una **condición necesaria**, pero **no suficiente**, que debe cumplirse para los puntos donde hay raíces repetidas, como los puntos donde el LGR se aparta del eje real.

¡No debe olvidar que la condición anterior no es suficiente, y que en muchos casos, si bien es posible resolverla, entrega puntos en el plano complejo que no pertenecen al LGR!

Nota: (cont.)

Ejemplo punto de despegue/raíces repetidas

Considere el lazo cerrado con la planta:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

luego:

$$\bar{q}(s) = s^2 + as + K \;\Rightarrow\; s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2}$$

Para el sistema anterior la ganancia para la cual aparece un par de raíces complejas es:

$$K > \frac{a^2}{4}$$

Si $K = a^2/4$, habrán dos raíces iguales $s = -a/2$.

El punto de "despegue" de las raíces del eje real en este caso se puede encontrar tambíen aplicando:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{F(s)}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{ds}(s(s+a)) = 2s + a = 0 \;\Rightarrow\; s = -\frac{a}{2}$$

Paso 9:

El valor K_{s_0} para un valor específico s_0 de una de las n raíces del LGR se calcula como:

$$K_{s_0} = -\frac{q(s_0)}{p(s_0)} = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(s_0 - p_i)}{\prod_{j=1}^{m}(s_0 - z_j)}$$

Consideraciones para graficar LGRs cuando la ecuación característica tiene la forma: $1 - KF(s) = 0$

Si K debe tomar valores entre 0 y $+\infty$, y al escribir $F(s)$ en términos de polinomios mónicos, la ecuación característica de lazo cerrado toma la forma:

$$\bar{q}(s) = 1 - KF(s) = 1 - K\frac{p(s)}{q(s)} = 0$$

En esta situación es posible verificar de la ecuación que:

$$\angle F(s) = \angle \frac{1}{K} = 0° + 360°(k-1)$$

es decir, el LGR se forma por aquellas raíces que hacen que la fase del lazo abierto sea de $0°$ en vez de $180°$.

Por esta razón, los LGRs reciben también los nombres de LGR positivo o de 180° (LGR+) y LGR negativo o de 0° (LGR−), según sea la condición que debe cumplir la fase.

Cuando esta situación ocurre es necesario modificar aquellos pasos del procedimiento que involucran el ángulo, según se resume a continuación.

Resumen del procedimiento para graficar el LGR

1. Escriba $\bar{q}(s)$ de la forma:

$$q(s) = 1 + KF(s) = 1 + K\frac{p(s)}{q(s)} = 1 + K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = 0$$

2. Ubique los polos p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ y los ceros z_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ de $F(s)$ en el plano complejo y recuerde que el LGR se traza partiendo de los polos hacia los ceros.
3. (a) El **LGR+** sobre el eje real se encuentra al lado izquierdo de un número **impar** de polos y ceros.
   (b) El **LGR−** sobre el eje real se encuentra al lado izquierdo de un número **par** de polos y ceros, *incluyendo el eje real a la derecha del polo o cero más a la derecha*.
4. Recuerde que el LGR es simétrico con respecto al eje real.

Resumen del procedimiento para graficar el LGR

5. Grafique las asíntotas para los $n-m$ polos que no convergen a uno de los m ceros partiendo desde $s=a$ y con ángulos ϕ_k dados por:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

   a. **LGR+:** $\phi_k = \dfrac{2k-1}{n-m}180^\circ,\ k=1,2,\ldots,n-m$

   b. **LGR−:** $\phi_k = \dfrac{k-1}{n-m}360^\circ,\ k=1,2,\ldots,n-m$

Resumen del procedimiento para graficar el LGR

6. Encuentre los ángulos de salida desde los polos y los ángulos de llegada a los ceros según:

$$\lambda\phi_k^{sal} = \sum_{j=1}^{m}\psi_j - \sum_{i=1,i\neq k}^{n}\phi_i - 180^\circ\delta - 360^\circ(k-1)$$

$$\lambda\phi_k^{lleg} = -\sum_{j=1,j\neq k}^{m}\psi_j + \sum_{i=1}^{n}\phi_i + 180^\circ\delta + 360^\circ(k-1)$$

donde λ es la multiplicidad del polo o cero, $k = 1, 2, \ldots, \lambda$, y

   a. **LGR+:** $\delta = 1$
   b. **LGR−:** $\delta = 0$

Resumen del procedimiento para graficar el LGR

Nota: *Para encontrar el ángulo de salida desde el polo p_k, grafique todos los vectores que unen los demás polos y ceros al polo p_k. Igualmente, para encontrar el ángulo de llegada al cero z_k, grafique todos los vectores que unen a los demás polos y ceros con el cero z_k. El ángulo que forman estos vectores con el eje horizontal+ son los ángulos ϕ_i, ψ_j. El ángulo de salida es el ángulo de la flecha "saliente" desde el polo con respecto al eje horizontal+. El ángulo de llegada es el ángulo de la flecha "entrante" al cero con respecto al eje horizontal+.*

7. Identifique el punto en el cual el LGR cruza al eje imaginario usando el método de R-H para encontrar la ganancia crítica K_c, y encuentre ω_0 resolviendo $\bar{q}(j\omega_0)|_{K=K_c} = 0$.
8. De existir, encuentre los puntos de múltiplicidad/despegue de raíces $s = r_\lambda$ del eje real resolviendo para s:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{F(s)}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(s)\frac{dq(s)}{ds} - q(s)\frac{dp(s)}{ds} = 0$$

Resumen del procedimiento para graficar el LGR

9. Calcule la ganancia K_{s_0} para algunas raíces s_0 en ubicaciones de interés del LGR según:

$$K_{s_0} = -\frac{q(s_0)}{p(s_0)} = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(s_0 - p_i)}{\prod_{j=1}^{m}(s_0 - z_j)}$$

¿Cuándo ocurre LGR-?

El LGR- ocurre para sistemas en que para $A > 0$:

Caso 1:
$$\bar{q}(s) = 1 + A\frac{(-s + z_i)p'(s)}{q(s)}$$

Caso 2:
$$\bar{q}(s) = 1 + A\frac{p(s)}{(-s + p_i)q'(s)}$$

Caso 3: En general, si hay un número impar de términos entre el numerador y el denominador de $F(s)$ en que los productos contienen la variable s con coeficiente negativo independientemente del signo de p_i o z_i, entonces tendremos un LGR-, puesto que $K = -A$.

¿Cuándo ocurre LGR-?

En particular, en el primer caso, si $z_i > 0$, se trata de un sistema con un cero en el lado derecho del plano complejo. Este tipo de sistema se denomina *sistema de fase no-mínima*, y casos típicos son el nivel de líquido en calderas de plantas generadoras a vapor, y calderas a carbón, donde la adición de líquido o carbón inicialmente enfría el proceso reduciendo la cantidad de vapor o calor generado, hasta que el líquido añadido pase a fase vapor, o el carbón se encienda.

También el sistema de elevación de un avión es otro ejemplo de sistema de fase no-mínima, en que para que el avión gane altura es necesario deflectar los elevadores que inicialmente le hacen perder altura antes de que se incline y suba, puesto que la deflección produce un efecto de frenado y pérdida inicial de sustentación.

Aplicación a Sistemas Discretos

Los pasos para graficar el LGR de un sistema de tiempo discreto son idénticos a los empleados para los sistemas de tiempo continuo.

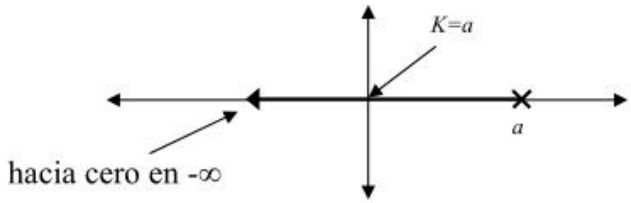
En este caso interesan los puntos críticos en los cuales las raíces de $\bar{q}(z) = 0$, la ecuación característica del sistema discreto en lazo cerrado, cruzan el círculo unitario, es decir cuando:

$$\|z\| = 1$$

Ejemplos LGR (1/23)

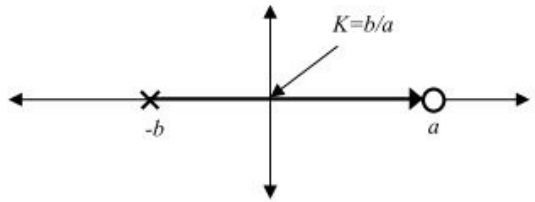
1. Sistema Inestable

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$



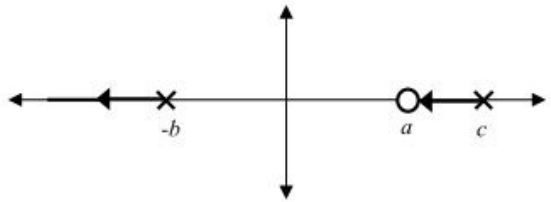
2. Sistema de Fase No-Mínima

$$F(s) = \frac{s-a}{s+b}$$



3. Sistema No-Estabilizable con Controlador Proporcional

$$F(s) = \frac{s-a}{(s+b)(s-c)}$$



4. Sistema

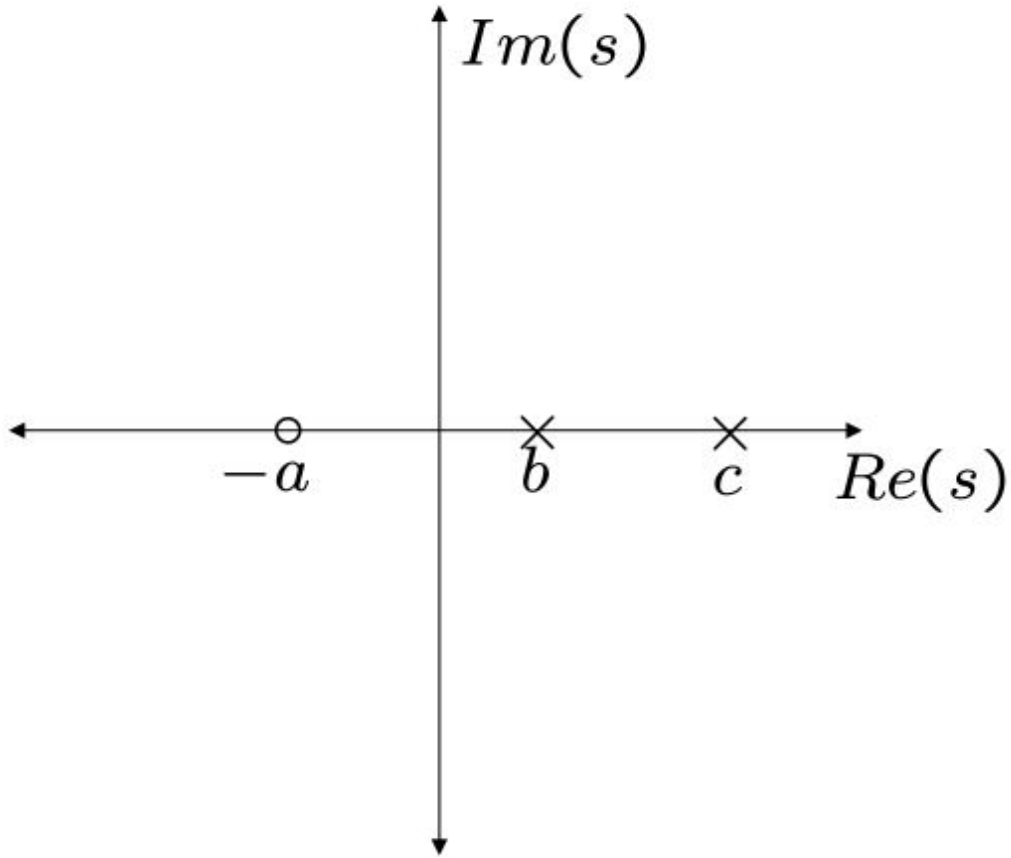
$$F(s) = \frac{s+a}{(s-b)(s-c)}$$

¿LGR?

Todas las constantes son > 0

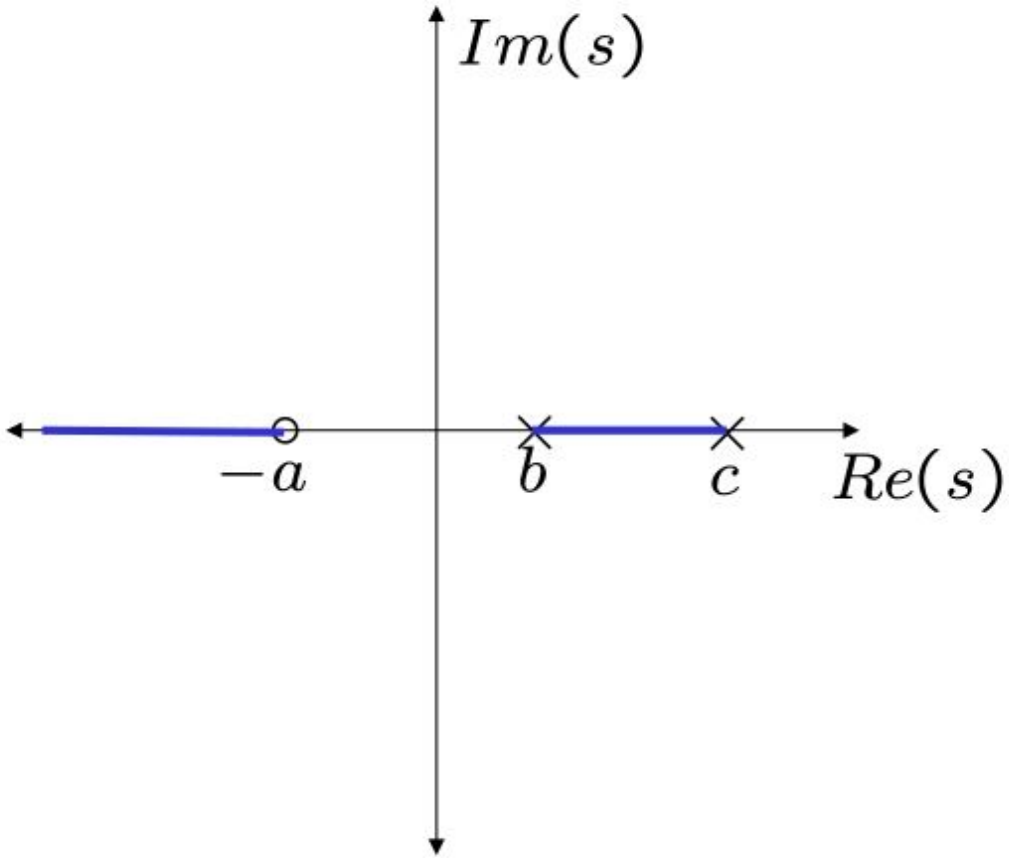
Ejemplos LGR (2/23) - Ejemplo 4

Paso 2: Ubicación de polos y ceros.



Ejemplos LGR (3/23) - Ejemplo 4

Paso 3: Secciones del LGR sobre el eje real.



Ejemplos LGR (4/23) - Ejemplo 4

Paso 5: Ubicación de las Asíntotas.

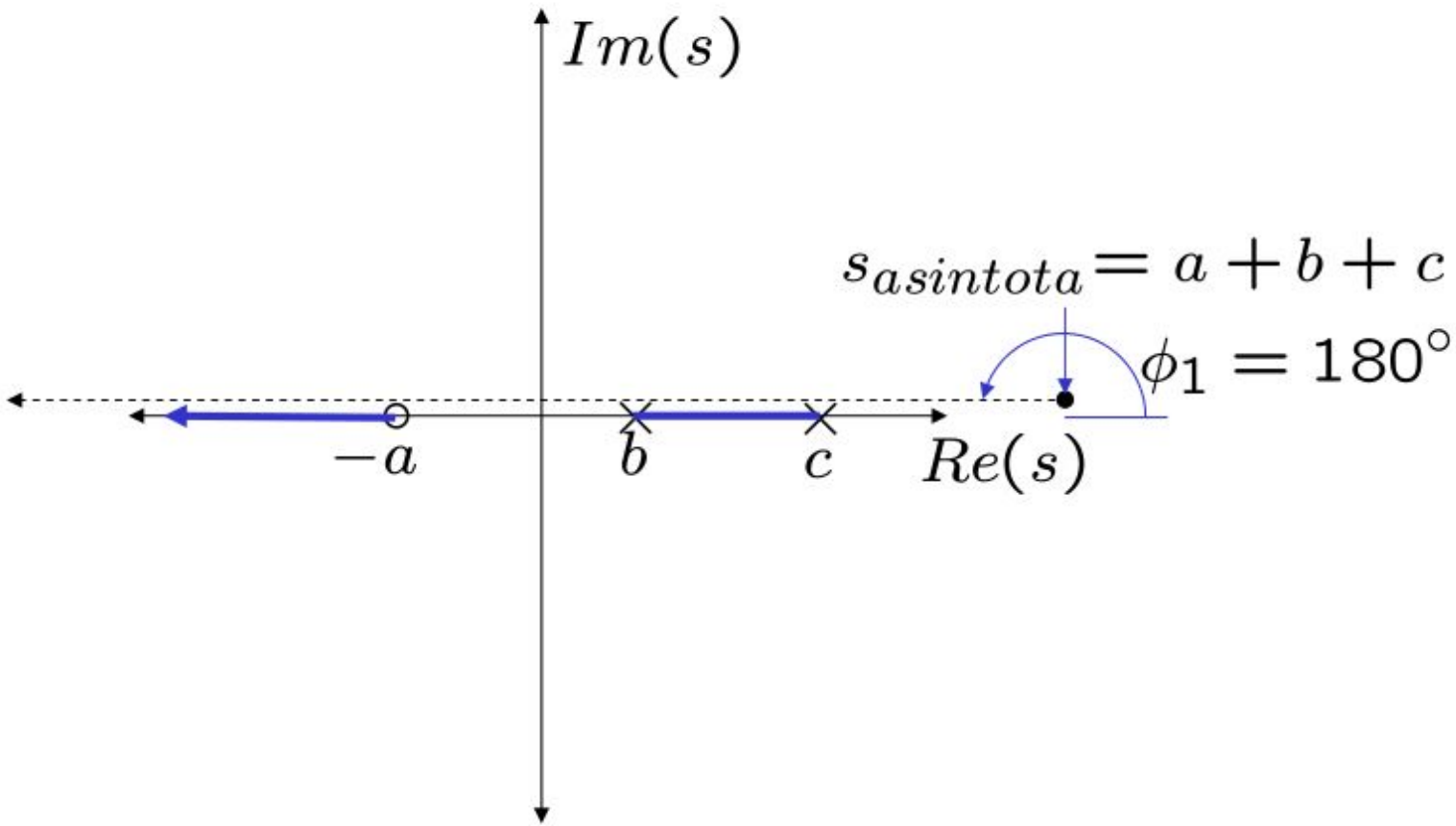
$$s_{asintota} = \frac{b + c - (-a)}{2 - 1} = a + b + c$$

$$\phi_k = \frac{2k - 1}{1} 180^o, \quad k = 1$$

$$\phi_1 = \{180^o\}$$

Ejemplos LGR (5/23) - Ejemplo 4

Paso 5: Ubicación de las Asíntotas.



Ejemplos LGR (6/23) - Ejemplo 4

Paso 6: Angulos de salida desde los polos y llegada a los ceros.

$$\lambda\phi_k^{sal} = \sum_{j=1}^{m}\psi_j - \sum_{i=1,i\neq k}^{n}\phi_i - 180^o\delta - 360^o(k-1)$$

$$\lambda\phi_k^{lleg} = -\sum_{j=1,j\neq k}^{m}\psi_j + \sum_{i=1}^{n}\phi_i + 180^o\delta + 360^o(k-1)$$

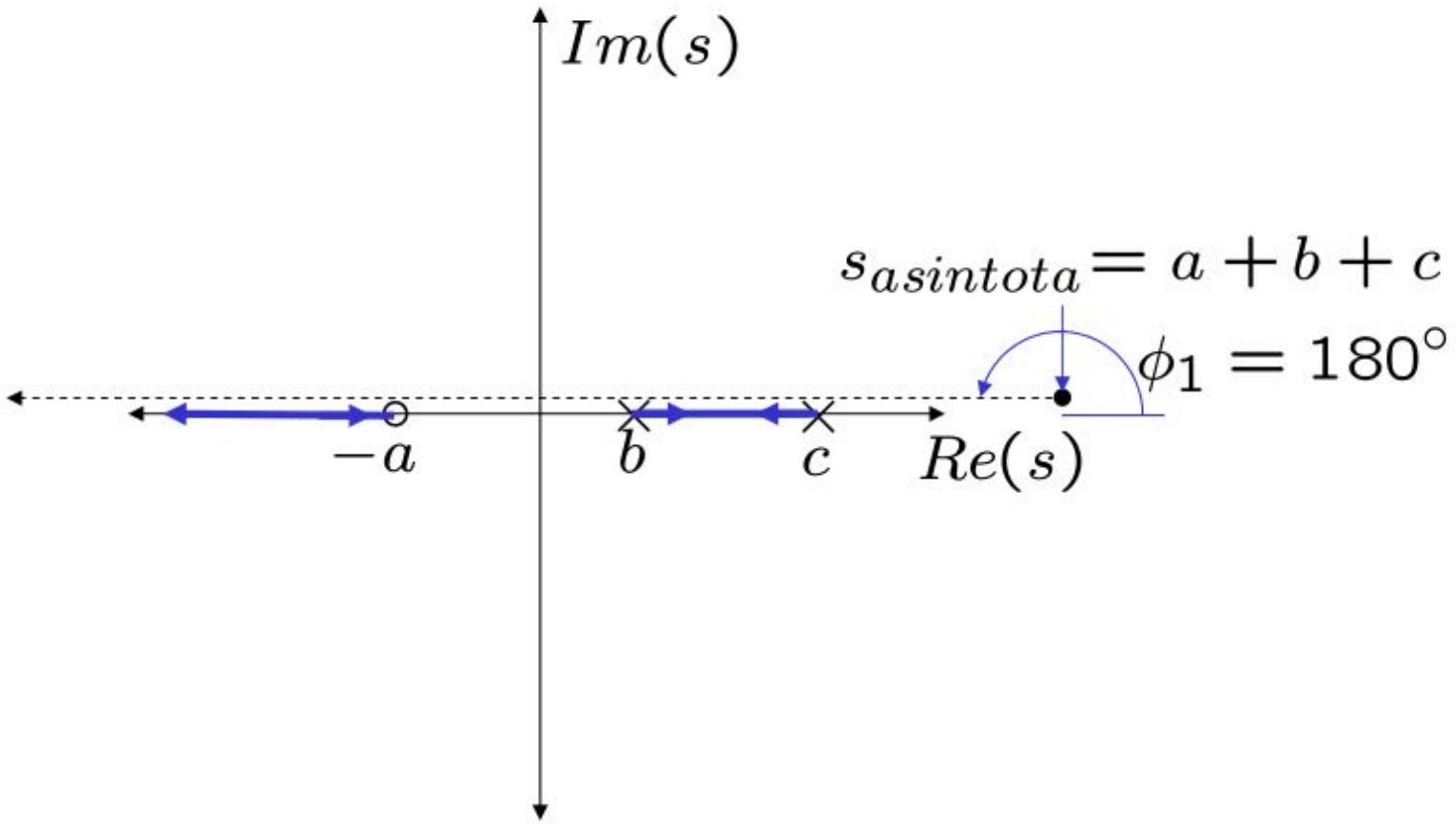
Desde $s=b$: $\phi_1^{sal} = 0^o - 180^o - 180^o = 0^o$

Desde $s=c$: $\phi_2^{sal} = 0^o - 0^o - 180^o = 180^o$

Desde $s=-a$: $\psi_1^{lleg} = -0^o + 180^o + 180^o + 180^o = 180^o$

Ejemplos LGR (7/23) - Ejemplo 4

Paso 6: Angulos de salida desde los polos y llegada a los ceros.



Ejemplos LGR (8/23) - Ejemplo 4

Paso 7: Ganancia crítica y puntos de corte del eje imaginario.

$$\begin{aligned}\bar{q}(s) &= (s-b)(s-c)+K(s+a)=0\\ &= s^2+(K-b-c)s+aK+bc=0\end{aligned}$$

Aplicando el criterio de R-H:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & aK+bc \\ s^1 & K-b-c & 0 \\ s^0 & aK+bc & \end{array}$$

Luego para la estabilidad se requiere que: $K > b+c$

Si es que $K = b+c$ se tiene:

$$\bar{q}(s) = s^2 + ab + ac + bc = 0$$

Ejemplos LGR (9/23) - Ejemplo 4

Paso 7: Ganancia crítica y puntos de corte en el eje imaginario.
(**Alternativa:** Reemplazando $s = j\omega$ en $\bar{q}(s)$)

$$\begin{aligned}\bar{q}(s) &= (s-b)(s-c) + K(s+a) \\ &= s^2 + (K-b-c)s + aK + bc = 0 \\ \bar{q}(j\omega) &= (j\omega)^2 + (K-b-c)j\omega + aK + bc = 0\end{aligned}$$

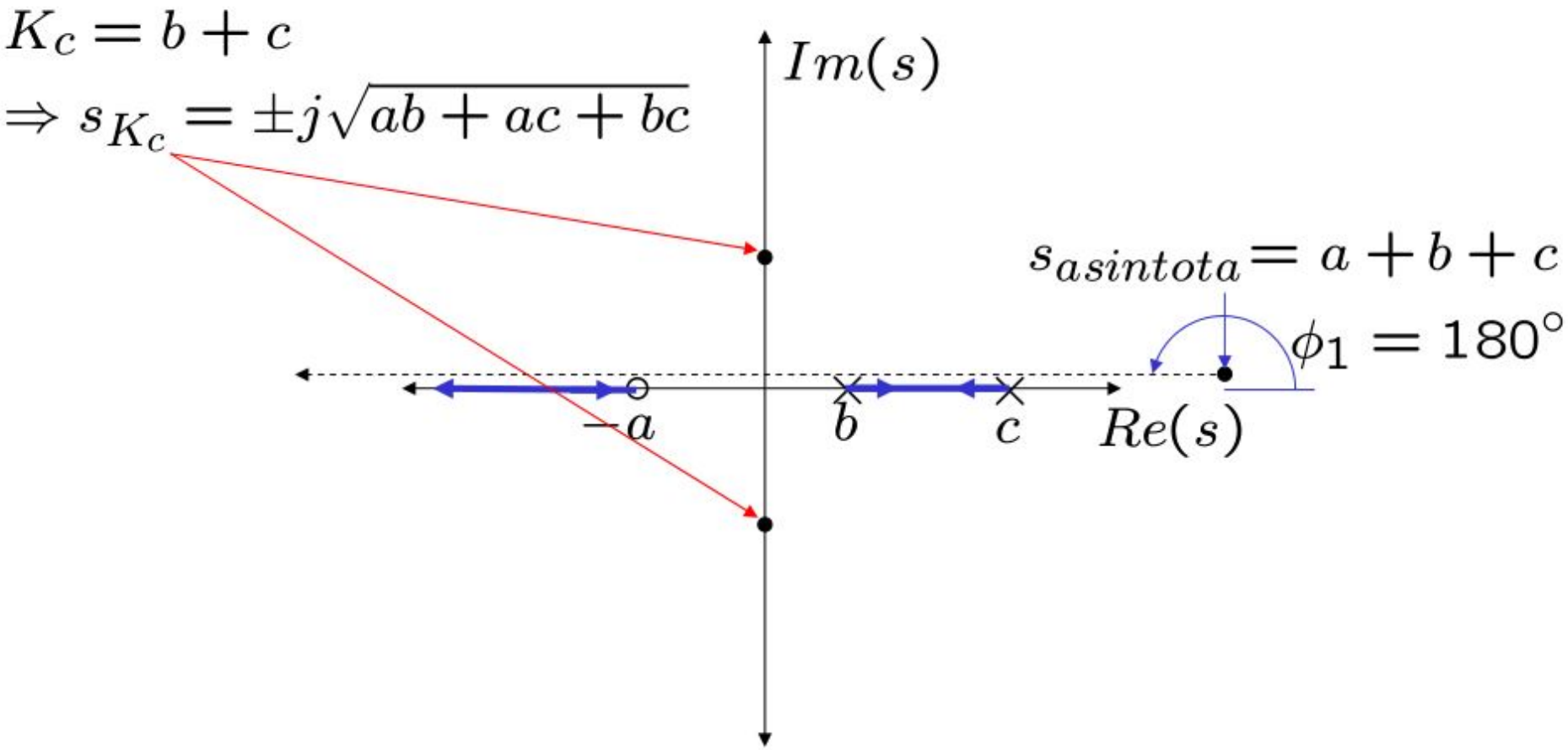
Luego,

$$\begin{aligned}Re\{\bar{q}(j\omega\} = 0 &\Rightarrow -\omega^2 + aK + bc = 0 \\ &\Rightarrow \omega = \sqrt{aK+bc} \\ Im\{\bar{q}(j\omega)\} = 0 &\Rightarrow K - b - c = 0 \\ &\Rightarrow K = b + c\end{aligned}$$

Por lo tanto, el LGR cruza el eje imaginario en:

Ejemplos LGR (10/23) - Ejemplo 4

Paso 7: Ganancia crítica y puntos de corte del eje imaginario.



Ejemplos LGR (11/23) - Ejemplo 4

Paso 8: Puntos de Despegue/Aterrizaje

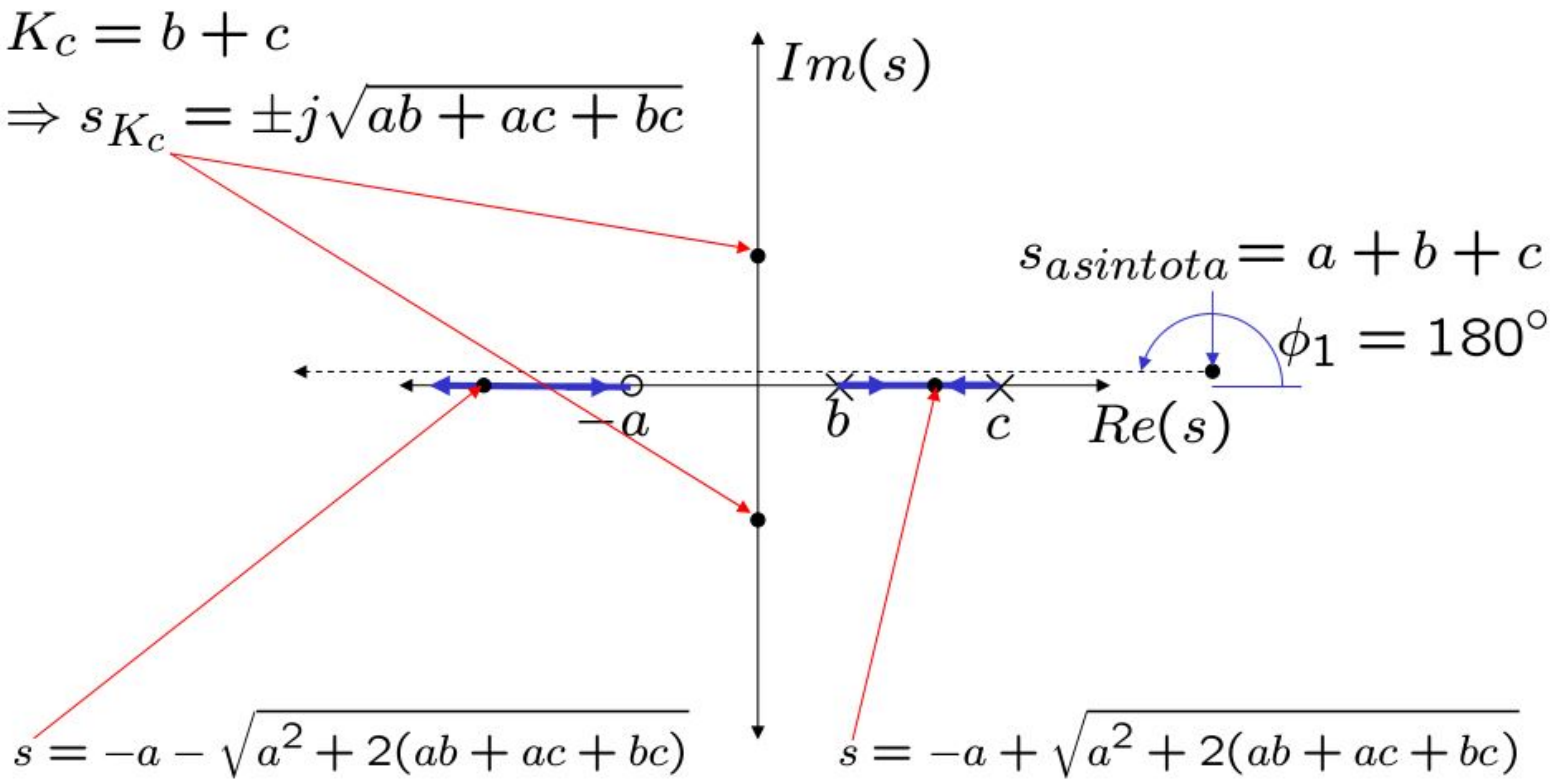
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{F(s)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\frac{(s-b)(s-c)}{s+a} = 0$$
$$\Rightarrow ((s-c)+(s-b))(s+a)-(s-c)(s-b) = 0$$
$$\Rightarrow (s-c)(s+a)+(s-b)(s+a)-(s-b)(s-c) = 0$$
$$\Rightarrow s^2+(a-c)s-ac+s^2+(a-b)s-ab-s^2+(b+c)s-bc = 0$$
$$\Rightarrow s^2+2as-(ab+ac+bc) = 0$$

$$s = -a \pm \sqrt{a^2+2(ab+ac+bc)}$$

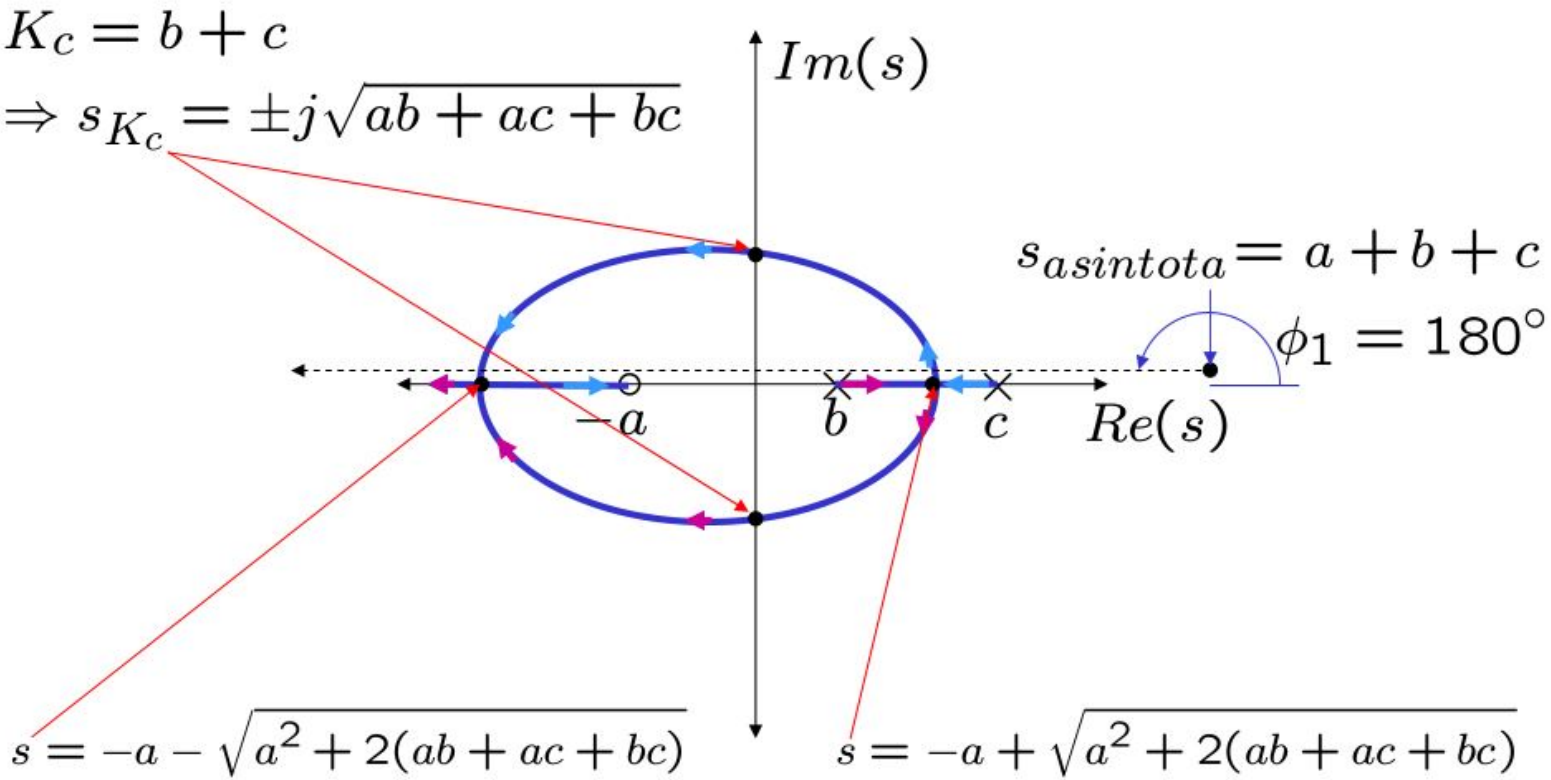
Ejemplos LGR (12/23) - Ejemplo 4

Paso 8: Puntos de Despegue/Aterrizaje



Ejemplos LGR (13/23) - Ejemplo 4

Considerando que, a medida que K aumenta, los polos se mueven hacia los ceros cruzando el eje imaginario por s_{Kc} y despegando/aterrizando en las posiciones donde las raíces se repiten, se obtiene finalmente el LGR como se muestra a continuación.



Ejemplos LGR (14/23) - Ejemplo 5

Obtenga el LGR de la planta $F(s)$ realimentada con ganancia K $(K > 0)$, donde:

$$F(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s-2)}$$

Notando que esta planta se asemeja al sistema anterior con:

$$a = 2, b = -1, c = 2$$

Se obtiene:

$$s_{asintota} = a + b + c = 3, \quad \phi_1 = 180^o$$

$$K_c = b + c = 1$$

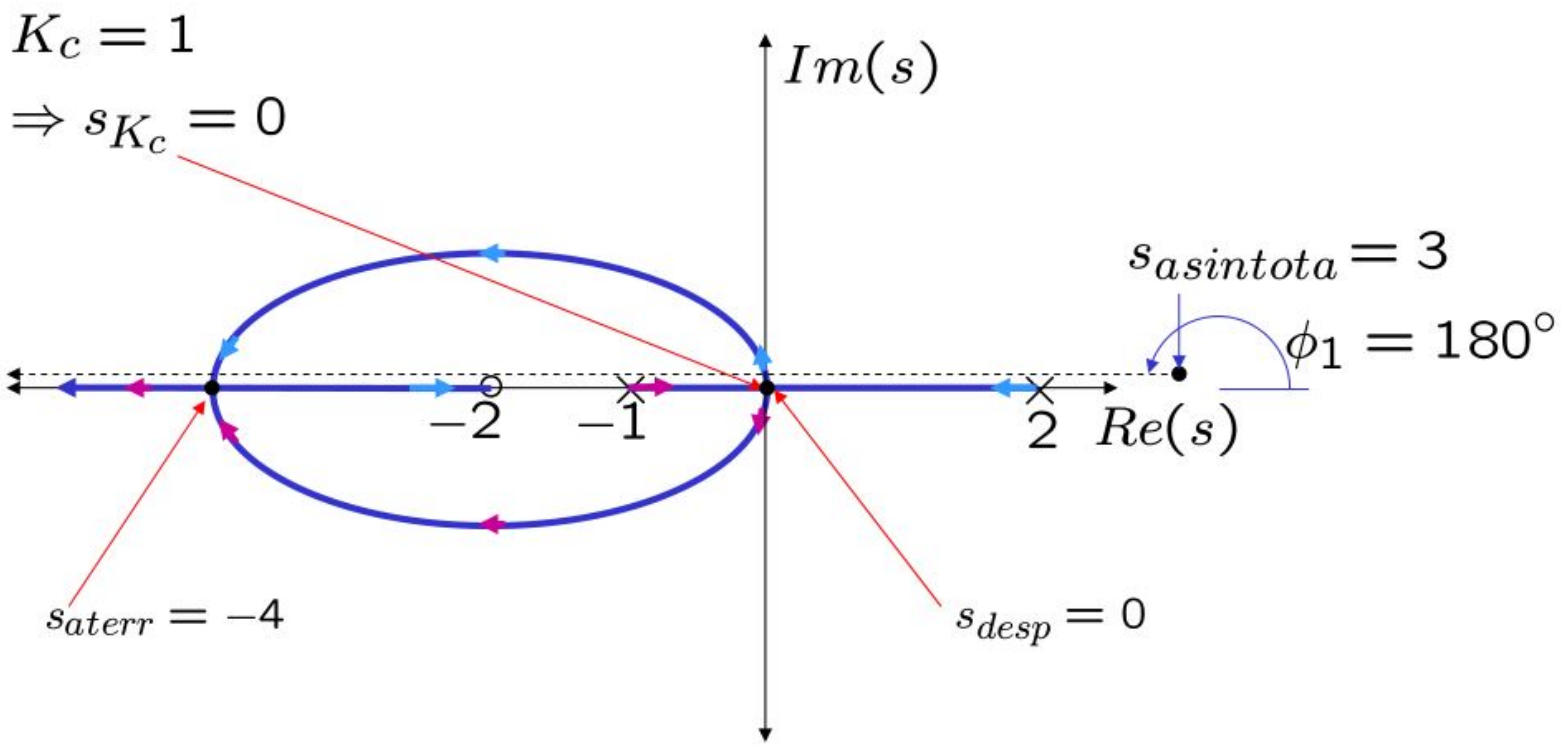
$$\Rightarrow s_{K_c} = \pm j\sqrt{ab + ac + bc} = \pm j\sqrt{-2 + 4 - 2} = 0$$

$$s_{aterr} - = a - \sqrt{a^2 + 2(ab + ac + bc)} = -4$$

$$s_{desp} = -a + \sqrt{a^2 + 2(ab + ac + bc)} = 0$$

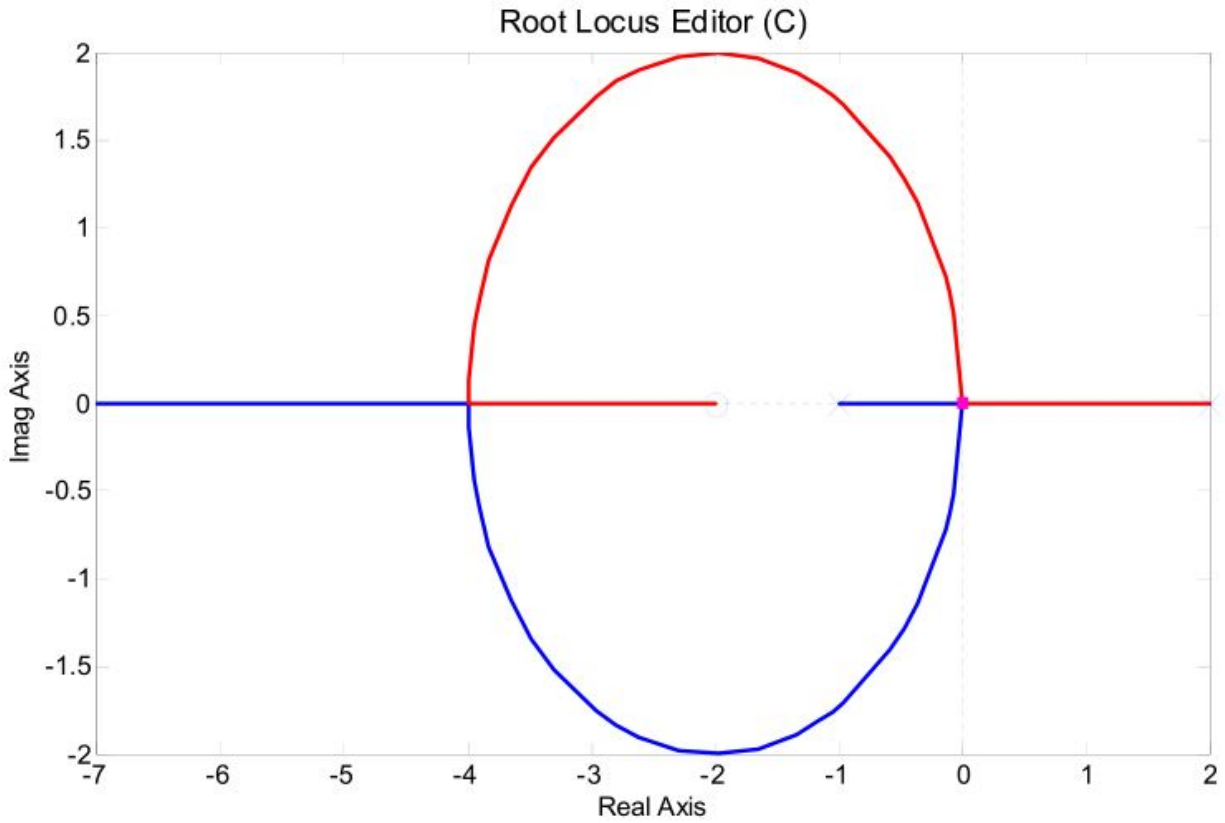
Ejemplos LGR (15/23) - Ejemplo 5

Considerando que, a medida que K aumenta, los polos se mueven hacia los ceros cruzando el eje imaginario por S_{K_c} y despegando/aterrizando en las posiciones donde las raíces se repiten, se obtiene finalmente el LGR como se muestra a continuación.



Ejemplos LGR (16/23) - Ejemplo 5

Gráfico del LGR realizado mediante MATLAB



Ejemplos LGR (17/23) - Ejemplo 6

Obtenga el LGR de la planta $F(s)$ realimentada con ganancia K $(K > 0)$, donde:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} \\ &= \frac{1}{s(s+4)(s^2+8s+32)} \\ &= \frac{1}{s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)} \end{aligned}$$

Ejemplos LGR (18/23) - Ejemplo 6

Paso 5: Ubicación de las asíntotas.

$$
\begin{aligned}
s_{asintota} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} \\
&= \frac{0 + (-4) + (-4 - j4) + (-4 + j4)}{4} \\
&= \frac{-12}{4} = -3
\end{aligned}
$$

$$
\phi_k = \frac{2k-1}{n-m} 180^o, \quad k = 1, \ldots, n-m
$$

$$
\phi_k = (2k-1)\frac{180^o}{4} = (2k-1)45^o \quad k = 1, 2, 3, 4
$$

$$
\phi_{1,2,3,4} = \{45^o, 135^o, 225^o, 315^o\}
$$

Ejemplos LGR (19/23) - Ejemplo 6

Paso 6: Angulos de salida desde los polos.

$$\lambda\phi_k^{sal} = \sum_{j=1}^{m}\psi_j - \sum_{i=1,i\neq k}^{n}\phi_i - 180^o\delta - 360^o(k-1)$$

Notando que solo interesan las raices complejas, ya que aquellas sobre el eje real tiene direcciones de salida triviales:

Desde $s = -4 + j4$:

$$\phi_1^{sal} = 0^o - 135^o - 90^o - 90^o - 180^o = -135^o$$

Desde $s = -4 - j4$:

$$\phi_2^{sal} = 0^o - (-135^o) - (-90^o) - (-90^o) - 180^o = +135^o$$

Ejemplos LGR (20/23) - Ejemplo 6

Paso 7: Ganancia crítica y puntos de corte del eje imaginario.
(**Alternativa:** Reemplazando $s = j\omega$ en $\bar{q}(s)$).

$$\begin{aligned}\bar{q}(s) &= s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K = 0 \\ \bar{q}(j\omega) &= (j\omega)^4 + 12(j\omega)^3 + 64(j\omega)^2 + 128(j\omega) + K = 0 \\ &= \omega^4 - j12\omega^3 - 64\omega^2 + j128\omega + K = 0\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}Re\{\bar{q}(j\omega)\} = 0 &\Rightarrow \omega^4 - 64\omega^2 + K = 0 \\ &\Rightarrow K = 64\omega^2 - \omega \\ Im\{\bar{q}(j\omega)\} = 0 &\Rightarrow -12\omega^3 + 128\omega = 0 \\ &\Rightarrow \omega = 0, \omega^2 - \frac{128}{12} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, el LGR cruza el eje imaginario en:

$$s = \pm j\omega = \pm j\sqrt{\frac{128}{12}} = \pm j\sqrt{\frac{32}{3}} \approx \pm j3.27$$

Ejemplos LGR (21/23) - Ejemplo 6

Paso 8: Puntos de Despegue/Aterrizaje.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{F(s)}\right) = 0$$

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s) = 0$$

$$\Rightarrow 4s^3 + 36s^2 + 128s + 128 = 0$$

Polinomio cúbico en s... la raíz es más difícil de encontrar analíticamente...

Ejemplos LGR (22/23) - Ejemplo 6

Paso 8: Puntos de Despegue/Aterrizaje.

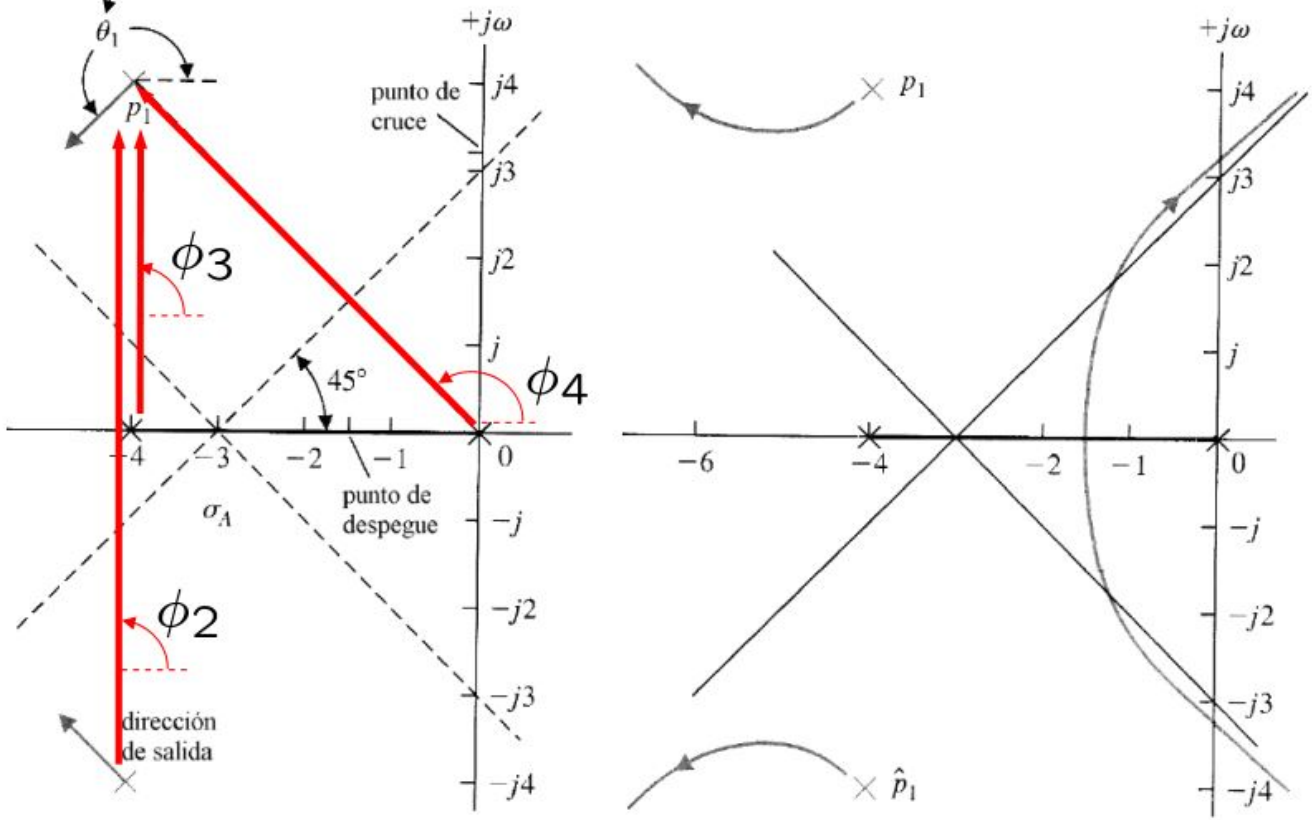
Usando un método numérico para buscar el mínimo de $1/F(s)$ para valores de s entre -4 y 0:

s	1/F(s)
-4.00	0.00
-3.75	-15.06
-3.50	-28.44
-3.25	-40.37
-3.00	-51.00
-2.75	-60.37
-2.50	-68.44
-2.25	-75.06
-2.00	-80.00
-1.75	-82.93
-1.50	-83.44
-1.25	-81.00
-1.00	-75.00
-0.75	-64.75
-0.50	-49.44
-0.25	-28.18
0.00	0.00

← El mínimo ocurre en s=-1.5. Este es el punto de "despegue"!

Ejemplos LGR (23/23) - Ejemplo 6

$$\theta_1 = \phi_1 = 0° - 135° - 90° - 90° - 180°$$
$$= -135° - 360° = 225°$$



Referencias Adicionales

- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems.* 4^a ed. (1^a ed. 1986), Prentice Hall, 2002.
- G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado. *Control System Design.* Prentice Hall, 2001.
- W. R. Evans. Graphical analysis of control systems. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, v. 67, pp. 547-551, 1948.