Tema: Modelos matemáticos lineales de tiempo continuo

◁ *Guía de Ejercicios # 2* ▷

1. En la figura 1 se muestra un diagrama P&ID que representa un sistema de control de flujo y temperatura basado en dos servoválvulas que ajustan los caudales de agua caliente, q_c, y fria, q_f, de acuerdo a las señales de voltaje aplicado v_c y v_f, respectivamente. Asumiendo que la temperatura a la salida del calefactor por combustión es T_c, y que la temperatura a la salida del sistema, T_s, es proporcional a las temperaturas T_c y T_e de acuerdo a los aportes del flujo q_c y q_f al total:

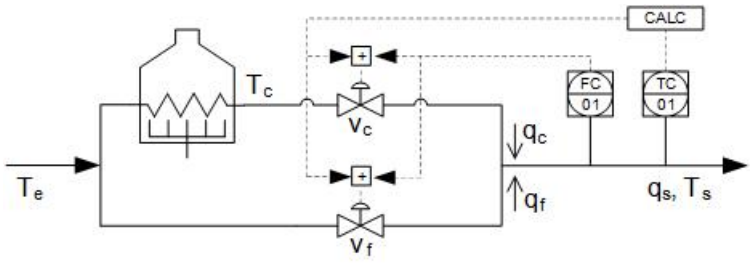


Figura 1: Sistema de regulación de flujo y temperatura.

Obtenga un modelo del sistema asumiendo que T_e y T_c son constantes e independientes del flujo, y que la relación entre el voltaje aplicado a las válvulas y los flujos está dada por:

$$v_c = q_c + \tau \frac{dq_c}{dt}$$
$$v_f = q_f + \tau \frac{dq_f}{dt}$$

Nota Determinación de variables del sistema (ver Guia 1, ejercicio 2).

Solución

Del enunciado se tiene:

$$T_s = \frac{q_c}{q_c + q_f} T_c + \frac{q_f}{q_c + q_f} T_e$$

De la figura 1:

$$q_s = q_c + q_f$$

Luego, reordenando las ecuaciones:

$$v_c = q_c + \tau_c \frac{dq_c}{dt}$$
$$\Rightarrow \dot{q}_c = -\frac{1}{\tau_c} q_c + \frac{1}{\tau_c} v_c$$
$$v_f = q_f + \tau_f \frac{dq_f}{dt}$$
$$\Rightarrow \dot{q}_f = -\frac{1}{\tau_f} q_f + \frac{1}{\tau_f} v_f$$

Observe que si bien las ecuaciones diferenciales que relacionan los caudales q_c y q_f con las variables manipuladas v_c y v_f son ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo, la variable controlada de temperatura de salida T_s no-linealmente de las razones de caudales con respecto al caudal total. Para obtener una respuesta lineal con respecto a los caudales deberÃa fijarse el caudal total de salida q_s. Esto implica que se requerirÃa un control de flujo para asegurar que el total $q_s = q_c + q_f$ sea constante.

2. Obtenga el modelo del circuito de la figura 2

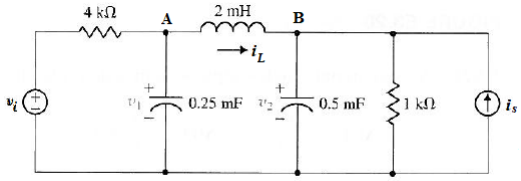


Figura 2: Circuito Eléctrico

Solución

Por KCL en nodos se tiene que:

$$\text{Nodo A:} \quad 0.00025\frac{dv_1}{dt} + i_L - \frac{v_i - v_1}{4000} = 0$$

$$\text{Nodo B:} \quad 0.0005\frac{dv_2}{dt} - i_L + \frac{v_2}{1000} - i_s = 0$$

Por KVL en malla se tiene que:

$$0.002\frac{di_L}{dt} + v_2 - v_1 = 0$$

Dado que hay tres elementos cuya respuesta es de primer orden (dos condensadores y un inductor), el sistema tiene un orden total de tres. Por esta razón, el modelo está compuesto por tres ecuaciones de primer orden o una ecuación diferencial de orden tres si se juntan las tres ecuaciones de primer orden.