IEE-2613 - CONTROL AUTOMATICO – I_1 – 9 Septiembre 2020

Tiempo total: 120 min (Tiempo desarrollo: 115 min; Tiempo bajada enunciado y subida respuesta: 5 min)
Reglas: No puede recibir ni enviar información de o a otras personas.

1.- Para la siguiente ecuación,

$$\frac{d\,y}{dt} + ay = u(t), \quad y(0) = y_0$$

donde

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ b, & 1 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3 \end{cases}$$

con a y b reales mayores que cero.

a) (3 ptos) Encuentre la transformada de Laplace de $y(t)$, es decir, $Y(s)$
b) (2 ptos) Determine $y(t)$
c) (1 pto) Calcule y para $t = 2$

Sol

a) La entrada $u(t)$ corresponde a dos escalones, el primero de magnitud b, ocurre con un retardo de 1 s ($t = 1$) desde el comienzo. El segundo, de magnitud $-b$, anula el primero a partir de $t = 3$

En Laplace, esto es: $U(s) = \frac{b}{s}(e^{-s} - e^{-3s})$

Luego, aplicando Laplace ambos lados de la ecuación diferencial:

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = \frac{b}{s}(e^{-s} - e^{-3s})$$

Despejando obtenemos lo pedido $\quad Y(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{b(e^{-s} - e^{-3s})}{s(s+a)}$

b) Descomponiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{b}{a}(e^{-s} - e^{-3s})\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{b}{a}\frac{e^{-s}}{s} - \frac{b}{a}\frac{e^{-3s}}{s} - \frac{b}{a}\frac{e^{-s}}{s+a} + \frac{b}{a}\frac{e^{-3s}}{s+a}$$

Pasando al dominio del tiempo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y_0 e^{-at} + \frac{b}{a}h(t-1) - \frac{b}{a}h(t-3) - \frac{b}{a}e^{-a(t-1)}h(t-1) + \frac{b}{a}e^{-a(t-3)}h(t-3)$$

donde la función escalón $h(t-\alpha) = \begin{cases} 1, & si\ \ t \ge \alpha \\ 0, & si\ t < \alpha \end{cases}$

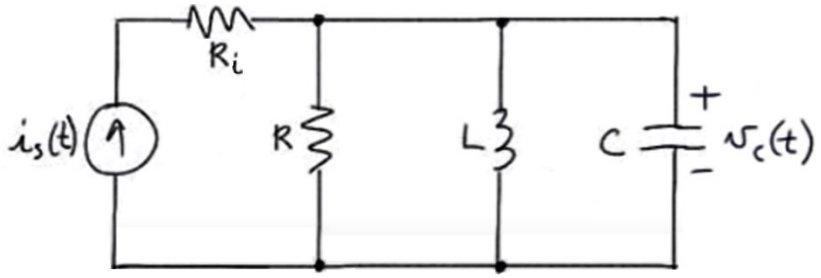
c) para $t = 2$: $\quad y(2) = y_0 e^{-2a} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a})$

Para el circuito de la figura:

a) (2 ptos) Encuentre la función de transferencia $V_c(s)/I_s(s)$ para el circuito.

b) (2 ptos) Usando el resultado anterior, determine la relación entre los parámetros R, L y C para que el comportamiento del circuito linealizado sea críticamente amortiguado.

c) (2 ptos) Asumiendo condiciones iniciales cero para todas las corrientes del circuito, encuentre el máximo valor que alcanza el voltaje en el capacitor y el instante en que ocurre, cuando a la fuente de corriente se le aplica un escalón unitario en $t = 0$.



Sol

a) Función de transferencia:

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i_c(\tau)d\tau \; ; \quad v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) \; ; \quad v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs}I_c(s) = V_L(s) = LsI_L(s) = V_R(s) = RI_R(s)$$

$$I_s(s) = I_c(s) + I_L(s) + I_R(s) = \left(Cs + \frac{1}{Ls} + \frac{1}{R}\right)V_c(s) = \frac{C}{s}\left(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)$$

$$\frac{V_c(s)}{I_s(s)} = \frac{1}{C}\frac{s}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC}$$

b) Para amortiguación crítica, se requieren raíces iguales: $\sqrt{(1/RC)^2 - 4/LC} = 0 \implies L/C = 4R^2$

c) Para la condición de amortiguamiento crítico, el voltaje en el capacitor es:

$$V_c(s) = \frac{1}{C}\frac{s}{s^2 + 2/\sqrt{LC}s + 1/(LC)}I_s(s) = \frac{1}{C}\frac{s}{\left(s + 1/\sqrt{LC}\right)^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{C}\frac{1}{\left(s + 1/\sqrt{LC}\right)^2}$$

y de las tablas de transformadas de Laplace, tenemos:

$$\frac{1}{(s+a)^n} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$$

Luego, para $n = 2$ obtenemos:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_c(s)\} = \frac{1}{C}te^{-t/\sqrt{LC}}$$

Máximo voltaje en capacitor:

$$\frac{d}{dt}v_c(t) = 0 = \frac{d}{dt}\frac{1}{C}te^{-t/\sqrt{LC}} \implies e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} - \frac{t}{\sqrt{LC}}e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} = 0$$

$$t_{max} = \sqrt{LC}$$

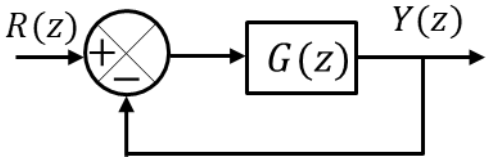
$$v_{cmax} = \frac{\sqrt{L/C}}{e}$$

3.- Se sabe que una planta tiene una función de transmitancia del tipo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = K_o \frac{z^{-n} - bz^{-n-1}}{z - a}$$

donde $Y(z)$ es la temperatura del proceso y $U(z)$ es el flujo de combustible al calefactor.
La planta fue sometida a una prueba donde se ingresó un escalón de amplitud 2 en el flujo de moderador en el instante k=2 minutos, obteniéndose los siguientes datos:

k (min)	y (ºC)	u (m^3/min)
0	0	0
1	0	0
2	0	2
3	0	2
4	1.0	2
5	0.5	2



Posteriormente a esta prueba en lazo abierto, la planta se realimentó según la figura, observándose que para una **rampa** en el setpoint igual $r(k) = k\ °C$, la salida converge a un valor constante.
Identifique la planta $G(z)$ (encuentre todos sus parámetros).

Sol
$y(k+1) = ay(k) + K_o u(k-n) - K_o b u(k-n-1)$
De la tabla se observa que el retardo entrada/salida es 1 ciclo ($k+1-k+n = n+1 = 2 \implies n = 1$)
$y(k+1) = ay(k) + K_o u(k-1) - K_o b u(k-2)$ (1 pto)

$k = 2; \implies y(3) = ay(2) + K_o u(1) - K_o b u(0) = 0$
$k = 3; \implies y(4) = ay(3) + K_o u(2) - K_o b u(1) = 2K_o = 1 \implies K_o = 0.5$
$k = 4; \implies y(5) = ay(4) + K_o u(3) - K_o b u(2) = a + 2K_o - 2K_o b = 0.5 \implies a - b = -0.5$
(1 pto)
Para el sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.5(z^{-n} - bz^{-n-1})}{z - a + 0.5(z^{-n} - bz^{-n-1})} = 0.5\frac{z - b}{z^3 - (b - 0.5)z^2 + 0.5z - 0.5b}$$

(1 pto)
Aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot 0.5\frac{z - b}{z^3 - (b - 0.5)z^2 + 0.5z - 0.5b}R(z) = y(\infty) = ct$$

$$\lim_{z\to 1} 0.5(z-1)\frac{z - b}{z^3 - (b - 0.5)z^2 + 0.5z - 0.5b} \times \frac{1z}{(z-1)^2} = cte$$

(1 pto)
Claramente se ve que la única alternativa para que el sistema converja a un valor finito es que $b = 1$, ya que así se cancela el polo de z=1, tal que el sistema es estable:

$$\lim_{z\to 1} 0.5\frac{z - 1}{z^3 - (b - 0.5)z^2 + 0.5z - 0.5b} \times \frac{1z}{(z-1)} = \frac{0.5}{1 - (1 - 0.5) + 0.5 - 0.5} = 1$$

(1 pto)
La planta es:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = 0.5z^{-2}\frac{z - 1}{z - 0.5}$$

(1 pto)