Sistemas Lineales Invariantes Discretos

◁ ▷

Contenidos

1 Introducción . . . 1
2 Solución Particular Empleando la Respuesta al Impulso . . . 3
3 Método 1: Solución por el Método de Coeficientes Indeterminados . . . 4
3.1 Solución homogénea . . . 4
3.2 Solución particular . . . 6
4 Método 2: Solución Utilizando la Transformada $\mathcal{Z}$ y Fracciones Parciales . . . 7
5 Método 3: Solución Utilizando la Matriz de Transición de Estados . . . 8
6 Obtención de la Ecuación de Diferencias en el Espacio del Estado . . . 10
7 Cálculo de la Matriz de Transición de Estado $\mathbf{A}^k$ . . . 12
7.1 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando el Teorema de Cayley-Hamilton . . . 12
7.2 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando la transformada $\mathcal{Z}$ . . . 13
7.3 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ distintos . . . 13
7.4 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ repetidos . . . 15
8 Cálculo del Vector de Estado Inicial $\mathbf{x}(0)$ a Partir de las Condiciones Iniciales $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$, $y(-4)$, ..., $y(-n)$ de la Ecuación de Diferencias (1) . . . 15

1 Introducción

Este documento resume los conceptos más importantes sobre sistemas discretos de la forma:

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+a_{n-2}y(k+n-2)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k) = b_mu(k+m)+b_{m-1}u(k+m-1)+\cdots+b_1u(k-1)+b_0u(k), \quad (1)$$

con condiciones iniciales $y(k)$, $k=-1,-2,-3,\ldots,-n$.

Definiendo el operador de adelanto:

$$z : f(k) \rightarrow f(k+1)$$

y similarement el operador de atraso como:

$$z^{-1} : f(k) \rightarrow f(k-1)$$

Los operadores de adelanto y atraso son operadores de *desplazamiento* de la variable independiente. Otras notaciones equivalentes para z^{-1} son D (delay), B (backshift), L (lag). También puede definirse como una transformación de traslación $\tau_n f(k) = f(k+n)$. El operador de retardo puede aplicarse repetidas veces, de modo que:

$$\underbrace{(z^{-1})(z^{-1})\cdots(z^{-1})}_{n \text{ veces}} f(k) = z^{-n}f(k) = f(k-n)$$

similarmente $z^n f(k) = f(k+n)$.

Empleando la notación anterior es posible escribir (1) en forma compacta como:

$$\left[z^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} z^{n-i}\right] y(k) \quad = \quad \left[\sum_{i=0}^{m} b_{m-i} z^{m-i}\right] u(k), \tag{2}$$

con condiciones iniciales,

$$z^{-i} y(0),\ i = 0, 1, 2 \ldots, n-1, \tag{3}$$

y donde $u : k \to u(k) \in \mathbb{R}$ es la señal de entrada, $y : k \to y(k)\mathbb{R}$ es la señal de salida, $k \in \mathbb{Z}$ es la variable independiente, típicamente el tiempo, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, m$ son parámetros reales constantes, y $n \geq m$.

Multiplicando ambos lados de (2) por z^{-n}, la ecuación de diferencia puede escribirse también como:

$$\left[1 + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} z^{-i}\right] y(k) \quad = \quad \left[\sum_{i=0}^{m} b_{m-i} z^{-n+m-i}\right] u(k), \tag{4}$$

Otra manera de escribir la ecuación es reemplazando $n - i$ por j en el lado izquierdo y $m - i$ por otro índice j en el lado derecho, de modo que la ecuación (2) se reescribe como:

$$\left[z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\right] y(k) \quad = \quad \left[\sum_{j=0}^{m} b_j z^j\right] u(k), \tag{5}$$

La ecuación (5) está escrita en términos de operadores de adelanto. Es posible reescribirla usando operadores de atraso si se multiplica por z^{-n}:

$$\left[1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j-n}\right] y(k) \quad = \quad \left[\sum_{j=0}^{m} b_j z^{j-n}\right] u(k), \tag{6}$$

Las diversas formas son utilizadas en los textos. Probablemente las formas más convenientes son (5) y (6). La forma (5) es análoga a la de las ecuaciones diferenciales escritas empleando el operador s (derivador) en vez de z (adelantador). La forma (6) permite expresar la salida $y(k)$ en el instante k como una combinación lineal de valores pasados tanto de la salida $y(k-1), y(k-2), \ldots, y(k-(n-1))$ como de la entra $x(k-n), x(k-(n-1)), \ldots x(k-(n-m))$.

Los tres métodos principales para la solución de (1) con condiciones iniciales (3) que se explican a continuación son:

1. Método Basado en la Respuesta al Impulso (sólo para la solución particular)
2. Método de Coeficientes Indeterminados
3. Método Basado en la Transformada $\mathcal{Z}$ y Descomposición en Fracciones Parciales
4. Método Basado en la Matriz de Transición de Estados

2 Solución Particular Empleando la Respuesta al Impulso

Dado que la función impulso unitario discreto $\delta(k) = 1$ solo para $k = 0$, es posible escribir cualquier señal discreta $x(k)$ como:

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n) = x \star \delta(k)$$

Es fácil ver que la relación anterior se cumple porque cuando $n = k$, se tiene que $\delta(k-n) = \delta(0) = 1$.

Si la respuesta de un sistema Σ a un impulso $\delta(k)$ es $h(k)$, gráficamente:

$$\delta(k) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow h(k)$$

Si se aplica el impulso con atraso de n periodos $\delta(k-n)$ se obtiene $h(k-n)$ porque el sistema se asumió invairante en el tiempo. Si se aplica $x(n)\delta(k-n)$, se obtiene $y_n(k) = h(k-n)x(n)$. Por linealidad e invarianza en el tiempo, si se aplica (2), se obtendrá una combinación lineal de respuestas:

$$y(k) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(k) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k-n)x(n) \;=\; h \star x(k) \tag{7}$$

Si el sistema es causal, entonces $h(k)$ solo existe para $k \geq 0$, y es cero para $k < 0$. Por lo tanto, la respuesta particular (7) se reduce a:

$$y(k) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{k} h(k-n)x(n) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} h(n)x(k-n) \tag{8}$$

Si además la señal $x(k) = 0$ para $k < 0$, entonces (8) será una sumatoria con límites acotados:

$$y(k) \;=\; \sum_{n=0}^{k} h(k-n)x(n) \;=\; \sum_{n=0}^{k} h(n)x(k-n) \tag{9}$$

Si utilizamos el operador de retardo es posible expresar:

$$y(k) \;=\; h \star x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}x(k) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}\right] x(k) \tag{10}$$

Luego la relación de trasferencia entre la salida y la entrada es:

$$\frac{y(k)}{x(k)} \;=\; h \star x(k) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \tag{11}$$

El operador de transferencia se define entonces como:

$$H(z) \;\stackrel{def}{=}\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \;=\; \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{i-n}}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^{i-n}} \tag{12}$$

¡La sumatoria en (12) es la *transformada* $\mathcal{Z}$ de $h(k)$! Por lo tanto, el *operador de transferencia* de un sistema descrito por la ecuación de diferencias (1) y la *transformada* $\mathcal{Z}$ de la respuesta el impulso tienen expresiones coincidentes $H(z)$.

Cabe notar que la respuesta del sistema en (7) a la entrada $x(k)$ corresponde a la respuesta particular de (1) cuando las condiciones iniciales son nulas.

3 Método 1: Solución por el Método de Coeficientes Indeterminados

Este método para resolver ecuaciones de diferencias lineales invariantes es equivalente al método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, en el cual se asume que los elementos de la base para la solución homogénea tienen la forma $y(t) = e^{\lambda}t$. En el caso discreto, el tiempo t se evalua en intervalos T, es decir $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $y(k) = y(kT) = e^{\lambda kT} = \left(e^{\lambda T}\right)^k = \alpha^k$. De esta manera, es posible verificar que la base de la solución homogénea en el caso discreto tendrá funciones de la forma $y(k) = \alpha^k$.

Por otro lado, la solución particular de (1) contendrá términos que tienen la misma forma que la función forzante $u(k)$. La respuesta general será la suma de la respuesta natural (solución homogénea) y la respuesta forzada o particular (solución no-homogénea). A continuación se detalla la obtención de cada una de las partes de la solución general.

3.1 Solución homogénea

La solución homogénea se obtiene cuando la señal de entrada es nula, es decir $u(k) = 0$, $k \geq 0$. Por esta razón la solución también recibe el nombre de *respuesta natural* o *respuesta de entrada cero (zero-input response)*. La solución homegénea se compone de términos de la forma:

$$y(k) = A\lambda^k \tag{13}$$

ya que al reemplazar esta expresión en (1) con $u(k) = 0,\ \forall k$, se tiene:

$$A\lambda^{k+n} + a_{n-1}A\lambda^{k+n-1} + \cdots + a_1 A\lambda^{k+1} + a_0 A\lambda^k \ = \ 0 \tag{14}$$

Multiplicando por $A^{-1}\lambda^{-k}$, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \ = \ 0 \tag{15}$$

La ecuación (15) es la llamada ecuación característica, la cual es un polinomio en λ de orden n, y por lo tanto tiene n raíces λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ que satisfacen la ecuación, así como cualquier combinación lineal:

$$y_h(k) \ = \ \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \tag{16}$$

donde los c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes que deberán determinarse a partir de las condiciones iniciales.

La obtención de la solución homogénea puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Reemplace $y(k + j)$ por z^j y $u = 0$ en (1) para obtener la *ecuación característica*:

$$q(z) \ \stackrel{def}{=} \ z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 \ = \ 0 \tag{17}$$

2. Obtenga las raíces λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ que resuelven (17) y construya una base de soluciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Como se asumió que (1) tiene coeficientes reales, entonces es posible construir una base $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ real considerando los siguientes casos:

   (a) **Raíz $\lambda_i \in \mathbb{R}$ no repetida**
   El elemento de la base simplemente se elige como

   $$y_i \;=\; \lambda_i^k$$

   (b) **Par de raíces $\lambda_i = \lambda_j^\star = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ complejas conjugadas no repetidas**
   Si se definen en este caso los elementos de la base como

   $$\{y_i, y_j\} \;=\; \{\lambda_i^k, \lambda_j^k\}$$

   estos serán complejos. Sin embargo, como $\lambda_j = \lambda_i^\star = |\lambda_i| e^{j\angle\lambda_i}$, la base original $\{y_1, y_2\} = \{\lambda_i^k, (\lambda_i^\star)^k\}$ puede redefinirse como las siguientes combinaciones lineales de la base original:

   $$\begin{aligned}
   \{y_1, y_2\} &= \left\{ \frac{\lambda_i^k + (\lambda_i^\star)^k}{2}, \frac{\lambda_i^k - (\lambda_i^\star)^k}{j2} \right\} \\
   &= \left\{ \frac{|\lambda_i|^k e^{jk\angle\lambda_i} + |\lambda_i|^k e^{-jk\angle\lambda_i}}{2}, \frac{|\lambda_i|^k e^{jk\angle\lambda_i} - |\lambda_i|^k e^{-jk\angle\lambda_i}}{j2} \right\} \\
   &= \left\{ |\lambda_i|^k \cos(k\angle\lambda_i), |\lambda_i|^k \sin(k\angle\lambda_i) \right\} \\
   &= \left\{ c^k \cos(k\phi), c^k \sin(k\phi) \right\},
   \end{aligned}$$

   donde $c = |\lambda_i|$ y $\phi = \angle\lambda_i$, para obtener una base real.

   (c) **Raíz $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de multiplicidad p (repetida p veces)**
   En este caso los elementos de la base asociados a la raíz λ_i de multiplicidad p serán:

   $$\{y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+p-1}\} \;=\; \left\{ \lambda_i^k, k\lambda_i^k, k^2\lambda_i^k, \ldots, k^{p-2}\lambda_i^k, k^{p-1}\lambda_i^k \right\}$$

   (d) **Par de raíces $\lambda_i = \lambda_j^* = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ complejas conjugadas de multiplicidad p (repetidas p veces)**

   $$\begin{aligned}
   \{y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}, \ldots, y_{i+2p-2}, y_{i+2p-1}\} \;=\; \Big\{ & c^k \cos(k\phi), c^k \sin(k\phi), kc^k \cos(k\phi), kc^k \sin(k\phi), \\
   & k^2 c^k \cos(k\phi), k^2 c^k \sin(k\phi), \ldots, \\
   & k^{p-1} c^k \cos(k\phi), k^{p-1} c^k \sin(k\phi) \Big\}
   \end{aligned}$$

   Nótese que este caso es una combinación de los dos anteriores. Además observe que si el par de raíces $\lambda_i, \lambda_i^* \in \mathbb{C}$ esta repetido p veces, esto significa que hay un total de $2p$ raíces asociadas a la base de soluciones homogéneas, por lo tanto, la ecuación diferencial deberá tener orden $n \geq 2p$.

3. Construya (16). Para obtener los coeficientes c_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, en general será necesario obtener primero la solución particular $y_p(k)$, y luego reemplazar $y(k) = y_h(k) + y_p(k)$ en $z^{-i}y(k)|_{k=0} = z^{-i}y(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, para obtener un conjunto de ecuaciones que permitan encontrar los coeficientes c_i. Sin embargo, si $z^{-i}y_p(k) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, entonces es posible resolver el sistema de ecuaciones:

   $$\begin{aligned}
   z^{-1}y_h(k)\big|_{k=0} &= z^{-1}y_h(0) = y(-1) \\
   z^{-2}y_h(k)\big|_{k=0} &= z^{-2}y_h(0) = y(-2) \\
   &\vdots \\
   z^{-n}y_h(k)\big|_{k=0} &= z^{-n}y_h(0) = y(-n)
   \end{aligned}$$

para encontrar los coeficientes c_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Notar que esta última situación ocurre siempre que el sistema original no esté forzado, ya que cuando $u(k) = 0$, se tiene automáticamente que $y_p(k) = 0$.

Las ecuaciones anteriores se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \cdots & \lambda_n^{-1} \\ \lambda_1^{-2} & \lambda_2^{-2} & \cdots & \lambda_n^{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{-n} & \lambda_2^{-n} & \cdots & \lambda_n^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

a partir de las cuales es posible obtener los coeficientes c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3.2 Solución particular

La solución particular a la ecuación no-homegénea (o forzada) y_p se obtiene mediante el *método de los coeficientes indeterminados* notando que si $\bar{y}(k)$ es la solución de:

$$y(k+n) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y(k+j) \quad = \quad u(k) \tag{18}$$

Luego la solución de la ecuación anterior cuando se aplica $u(k-i)$ en vez de $u(k)$, es decir la solución de

$$y(k+n) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y(k+j) \quad = \quad u(k-i) \tag{19}$$

será $\bar{y}(k-i)$ por invarianza en el tiempo, ya que al retardar la aplicación de $u(k)$ en i intervalos de tiempo, se retrasará la salida $\bar{y}(k)$ en la misma cantidad de intervalos de tiempo. De esta manera, la respuesta a la combinación lineal

$$\sum_{j=0}^{m} b_j u(k+j)$$

será la solución particular:

$$y_p(k) \quad = \quad \sum_{j=0}^{m} b_j \bar{y}(k+j) \tag{20}$$

La solución de $\bar{y}(k)$ tendrá de la forma de $u(k)$. Como $y_p(k)$ es una combinación lineal de $\bar{y}(k)$, entonces la forma de $y_p(k)$ será tambiń la de $u(k)$. Los casos base o más estándares son:

1. **Entrada constante** $u(k) = c \rightarrow y_p(k) = A$.
2. **Entrada exponencial** $u(k) = \alpha^k \rightarrow y_p(k) = A\alpha^k$.
3. **Entrada sinusoidal** $u(k) = \sin(\Omega_0 k) \rightarrow y_p(k) = A\sin(\Omega_0 k) + B\cos(\Omega_0 k)$. La forma de $y_p(k)$ en este caso se debe a que

$$\begin{aligned} u(k-n) &= \sin(\Omega_0(k-n)) \\ &= \sin(\Omega_0 k)\cos(\Omega_0 n) - \sin(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0 k) \\ &= A\sin(\Omega_0 k) + B\cos(\Omega_0 k) \end{aligned}$$

La misma forma para $y_p(k)$ se asume cuando $u(k) = \sin(\Omega_0 k)$.

Finalmente, los valores de los parámetros de $y_p(k)$ pueden econtrarse recordando que $y_p(k)$ debe satisfacer la ecuación de diferencias (1). Si la función de entrada $u(k)$ es igual a alguna de las soluciones de la ecuación homogénea, entonces la forma supuesta para la solución particular debe modificarse multiplicándola por la potencia adecuada de k.

4 Método 2: Solución Utilizando la Transformada $\mathcal{Z}$ y Fracciones Parciales

Este método es equivalente al método basado en la aplicación de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales invariantes. El método para encontrar la solución de la ecuación de diferencias (1) empleando la transformada $\mathcal{Z}$ se resume en los siguientes pasos.

1. Aplique la propiedad de la transformada $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-j} f(j)$$

a la ecuación diferencial (1), para obtener:

$$\begin{aligned}(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0)Y(z) \\ - \left[\sum_{j=0}^{n-1} z^{n-j} y(j)\right] - \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[\sum_{j=0}^{n-i-1} z^{n-i-j} y(j)\right] = \\ (b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0)U(z) - \sum_{i=0}^{m} b_{m-i}\left[\sum_{j=0}^{m-i-1} z^{m-i-j} u(j)\right] \quad (21)\end{aligned}$$

La ecuación anterior es posible re-escribirla como:

$$Y(z) = F(z)U(z) + c\left(z, \mathbf{a}_{0:n-1}, \mathbf{b}_{0:m}, \mathbf{y}(0:n-1), \mathbf{u}(0:m-1)\right) \quad (22)$$

donde

- $\mathbf{a}_{0:n-1} \stackrel{def}{=} \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$,
- $\mathbf{b}_{0:m} \stackrel{def}{=} \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m\}$,
- $\mathbf{y}(0:n-1) \stackrel{def}{=} \{y(0), y(1), \ldots, y(n-1)\}$,
- $\mathbf{u}(0:m-1) \stackrel{def}{=} \{u(0), u(1), \ldots, u(m-1)\}$,
- $F(z)$ es la llamada *función de transferencia discreta*, la cual se define como:

$$F(z) \stackrel{def}{=} \frac{p(z)}{q(z)} \quad (23)$$

con

$$p(z) \stackrel{def}{=} b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \quad (24)$$

y

$$q(z) \stackrel{def}{=} z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (25)$$

Observe que (25) corresponde al polinomio de la ecuación característica (17).

2. Descomponga (22) en términos más simples mediante fracciones parciales para obtener:

$$Y(z) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \phi_i(z)$$

donde $\phi_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ son las fracciones parciales. El procedimiento para descomponer $Y(z)$ en fracciones parciales es exactamente el mismo al empleado en el caso continuo para funciones en el dominio de Laplace. Los detalles del procedimiento se explican en la sección 5 *Expansión en Fracciones Parciales* del documento *Repaso: Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales Invariantes*.

3. Finalmente calcule la respuesta $y(k)$ aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ inversa a la expresión anterior, es decir:

$$y(k) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \mathcal{Z}^{-1}\left\{\phi_i(z)\right\} \tag{26}$$

Observe que la solución homogénea puede obtenerse como

$$\boxed{y_h(k) \;=\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{c\left(z, \mathbf{a}_{0:n-1}, y(0:n-1)\right)\right\}}$$

puesto que $U(z) = 0$, mientras que la solución particular está dada por

$$\boxed{y_p(k) \;=\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{F(z)U(z)\right\}}$$

5 Método 3: Solución Utilizando la Matriz de Transición de Estados

Otra alternativa para encontrar la solución de (1) es formular la ecuación de diferencias como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el espacio de los estados de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \tag{27}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ es la señal de entrada, y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m\times p}$ son las matrices que definen el sistema.

Algunas ventajas de este enfoque son:

- Sistema de primer orden
- Facilita la aplicación de métodos computacionales rápidos y eficientes
- Facilita el análisis de tipo geométrico de la trayectoria del estado

Al igual que en el caso escalar, $y(k+1) = \alpha y(k) + \beta u(k)$, en el cual la solución homogénea es $y_h(t) = \alpha^k y(0)$ y la solución particular es $y_p(t) = \sum_0^k \alpha^{(k-n)}\beta u(n)$, en el caso de (27) la solución puede escribirse como:

$$\mathbf{y}(k) \;=\; \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{C}\sum_{n=k_0}^{k-1|} \mathbf{A}^{k-1-n}\mathbf{B}\mathbf{u}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{28}$$

El primer término del lado derecho de la expresión anterior corresponde a la solución homogénea, mientras que los últimos dos términos corresponden a la solución particular.

Cabe notar que la solución (28) a (27) puede encontrarse aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ a (27), lo cual resulta en:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \quad (29)$$
$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \quad (30)$$

Despejando $\mathbf{X}(z)$ a partir de (29) y reemplazando en (30) se obtiene:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z)$$

donde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz identidad de $n \times n$.

Finalmente, aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ inversa a la ecuación anterior se obtiene (28). Esta última formulación que emplea la transformada $\mathcal{Z}$ es importante porque entrega una manera alternativa para calcular la matriz de transición de estado $\mathbf{A}^k$ como:

$$\boxed{\phi(k) \stackrel{def}{=} \mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\right\} \quad (31)}$$

Otra manera de verificar que la solución de (27) puede escribirse como (28) sin utilizar la transformada $\mathcal{Z}$ es escribir la solución en forma recursiva:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
&= \mathbf{A}\left[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)\right] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
&= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
&= \mathbf{A}\left[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)\right] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
&= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{n=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-1-n}\mathbf{B}\mathbf{u}(n)
\end{aligned}$$

En resumen, para resolver la ecuación diferencial (1) mediante su formulación en el espacio de los estados (27) es necesario:

- Transformar (1) a (27) según se explica en la sección 6.
- Calcular la matriz de transición de estado $\mathbf{A}^k$, a partir de su serie de Taylor, su transformada $\mathcal{Z}$ (31), o la diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$.
- Calcular la integral de convolución entre $\mathbf{A}^k$ y $\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$.

6 Obtención de la Ecuación de Diferencias en el Espacio del Estado

Utilizadno el *operador de adelnato* es posible reescribir (1) como

$$q(z)y = p(z)u \tag{32}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son expresiones polinomiales del operador de adelanto, y por lo tanto, son operadores sobre la señal de entrada u y la señal de salida y, respectivamente. Específicamente:

$$p(z) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{m} b_i z^i \tag{33}$$

y

$$q(z) \stackrel{def}{=} z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \tag{34}$$

El *operador de transferncia* se define como el operador que relaciona la salida y con la entrada u como:

$$F(z) \stackrel{def}{=} \frac{y}{u} = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{35}$$

permitiendo reescribir (32) como:

$$y = F(z)u \tag{36}$$

Si se introduce una variable (señal) auxiliar x, y se definen la salida y y la entrada u respectivamente como

$$y = p(z)x \tag{37}$$
$$u = q(z)x \tag{38}$$

es posible observar que el par de expresiones (37) y (38) es otra manera de expresar el sistema descrito por la ecuación diferencial (1). De hecho, la relación entre la salida y la entrada de un sistema descrito por estas dos últimas ecuaciones se mantiene igual a la del sistema (32), puesto que el operador de transferencia en ambos casos es el mismo:

$$F(z) = \frac{y}{u} = \frac{p(z)x}{q(z)x} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

Introduciendo n variables de estado $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ definidas como adelantos de la varible auxiliar:

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= z^0 x(k) = x(k) \\
x_2(k) &= z x(k) = x(k+1) \\
x_3(k) &= z^2 x(k) = x(k+2) \\
&\vdots \\
x_i(k) &= z^{i-1} x(k) = x(k+i) \\
&\vdots \\
x_n(k) &= z^{n-1} x(k) = x(k+n-1)
\end{aligned}$$

es posible plantear un sistema de n ecuaciones de diferencias de primer orden, cuyo operador de transferencia es igual al que se asocia con (4), y por lo tanto, el sistema de n ecuaciones constituye una representación

alternativa del mismo sistema (4). Para obtener el sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden se aplican los operadores de adelanto con respecto al tiempo a las n variables de estado:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= zx(k) = x_2(k) \\
x_2(k+1) &= z^2x(k) = x_3(k) \\
x_3(k+1) &= z^3x(k) = x_4(k) \\
&\vdots \\
x_i(k+1) &= z^ix(k) = x_{i+1}(k) \\
&\vdots \\
x_n(k+1) &= z^nx(k) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i(k) + u(k)
\end{aligned}$$

La última ecuación se obtiene utilizando la defincón $u = q(z)x$ introducida en (38). Para completar la descripción del sistema utilizando las variables de estado se reescribe la salida y como

$$y(k) = p(z)x(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i x_i(k)$$

Para tener una representación más compacta del sistema se prefiere una notación matricial (ver ecuación (27)):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)
\end{aligned} \tag{39}$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el llamado *vector de estado*, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ es la *salida*, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ es la *entrada*, y las matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ se definen de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
-a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1}
\end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\mathbf{C} = \left[\; b_0 - a_0b_n \;\middle|\; b_1 - a_1b_n \;\middle|\; b_2 - a_2b_n \;\middle|\; b_3 - a_3b_n \;\middle|\; b_4 - a_4b_n \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; b_{n-1} - a_{n-1}b_n \;\right] \tag{42}$$

$$\mathbf{D} = \left[\; b_n \;\right] \tag{43}$$

Las matrices obtenidas se encuentran en la llamada *forma canónica controlable*. Existe otra forma equivalente llamada *forma canónica observable* en la cual las matrices son:

$$\mathbf{A_o} = \mathbf{A}^T \quad (44)$$
$$\mathbf{B_o} = \mathbf{C}^T \quad (45)$$
$$\mathbf{C_o} = \mathbf{B}^T \quad (46)$$
$$\mathbf{D_o} = \mathbf{D} \quad (47)$$

Es importante tener presente que el vector de estado $\mathbf{x}_o$ correspondiente a la forma canónica observable es un vector de estado distinto al de la forma canónica controlable $\mathbf{x}$. Ambos vectores representan la dinámica de un mismo proceso, pero en sistemas de coordenadas distintos, y por lo tanto, al utilizar condiciones iniciales para resolver el sistema (27) debe tenerse la precaución de utilizar la condición inicial en el sistema de coordenadas apropiado. Ambos vectores de estado $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_o$ se relacionan por una transformación de coordenadas.

7 Cálculo de la Matriz de Transición de Estado $\mathbf{A}^k$

7.1 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando el Teorema de Cayley-Hamilton

El teorema de Cayley-Hamilton sostienque que toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ cuadrada satisface su ecuación característica:

$$q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0,$$

de modo tal que $q(\mathbf{A}) = \mathbf{0}_{N\times N}$, donde $\mathbf{0}_{N\times N}$ es una matrix de ceros de dimensión $N \times N$.

De esta manera, la matriz $\mathbf{A}$ satisface el lado derecho de (1):

$$\left[z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j \right] |_{z=\mathbf{A}} = \mathbf{0}_{N\times N}$$

y puede verificarse que $\mathbf{A}^k$ es expresable como una combinación lineal $(\mathbf{A}k)^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, es decir:

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(k)\mathbf{A}^i$$

Es posible verificar que la ecuación anterior también se cumple al reemplazar $\mathbf{A}$ por su diagonalización $\mathbf{A}_d = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, donde $\mathbf{P}$ es la matriz de vectores propios de $\mathbf{A}$, asociados a los valores propios $\mathbf{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$. Por lo tanto, los valores $\gamma_i(k)$ se pueden obtener resolviendo el sistema de N ecuaciones:

$$(\lambda_j)^k = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(k)(\lambda_j)^i, \quad æ = 1, 2, \ldots, N$$

Si un valor propio está repetido p veces, entonces el sistema de ecuaciones contendrá p ecuaciones linealmente dependientes. En este caso, para poder encontrar los valores γ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ será necesario derivar la

ecuación anterior $p-1$ veces con respecto al valor propio repetido para obtner $p-1$ ecuaciones adicionales:

$$\begin{aligned} k(\lambda_j)^{k-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i(k) i (\lambda_j)^{i-1} \\ k(k-1)(\lambda_j)^{k-2} &= \sum_{i=2}^{N-1} \gamma_i(k) i(i-1)(\lambda_j)^{i-2} \\ \vdots & \quad \vdots \\ k(k-1)\cdots(k-p+2)(\lambda_j)^{k-p+1} &= \sum_{i=2}^{N-1} \gamma_i(k) i(i-1)\cdots(i-p+2)(\lambda_j)^{i-p+1} \end{aligned}$$

7.2 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando la transformada $\mathcal{Z}$

Utilizando (31) es posible obtener la matriz de transición de estado. En términos simples, la expresión en (31) puede justificarse considerando que en el caso escalar $\mathcal{Z}\left\{a^k\right\} = \frac{z}{z-a} = z(z-a)^{-1}$, mientras que en el caso matricial $\mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}^k\right\} = z(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$. Luego,

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}. \tag{48}$$

7.3 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ distintos

Considere una matriz diagonal:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

con elementos λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ no necesariamente distintos. Es sencillo verificar que

$$\mathbf{A}_d^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

y por lo tanto, el calculo de la exponencial de una matriz diagonal se reduce al calculo de exponenciales de cada elemento de la diagonal. Para aprovechar esta ventaja de las matrices diagonales, es posible encontrar una transformación de la matriz original $\mathbf{A}$ que la convierta en una matriz diagonal $\mathbf{A}_d$. Este proceso se denomina diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$ y emplea la matriz de vectores propios o eigenvectores $\mathbf{P}$ asociados a los eigenvalores de $\mathbf{A}$ como se explica a continuación.

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **distintos**, entonces los eigenvectores correspondientes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ serán linealmente independientes y forman una base para $\mathbb{R}^n$, la matriz $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n]$ es invertible y

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \tag{49}$$

El resultado (49) puede demostrarse recordando que por definición los eigenvectores satisfacen:

$$(\lambda_i I - \mathbf{A})\mathbf{v}_i \;=\; \mathbf{0}_{n\times 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} [\lambda_1\mathbf{v}_1 \;\lambda_2\mathbf{v}_2 \;\cdots\; \lambda_n\mathbf{v}_n] &= [\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \;\mathbf{A}\mathbf{v}_2 \;\cdots\; \mathbf{A}\mathbf{v}_n], \\ \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} &= \mathbf{A}\mathbf{P}, \end{aligned}$$

y por lo tanto, multimplicando $\mathbf{P}^{-1}$ por la izquierda de la expresión anterior se obtiene (49).

El resultado (49) es útil para calcular $\mathbf{A}^k$ a partir de la matriz diagonal $\mathbf{A}_d = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$:

$$\mathbf{A}^k \;=\; \mathbf{P}\mathbf{A}_d^k\mathbf{P}^{-1} \tag{50}$$

La relación (50) puede demostrarse considerando que la solución de la ecuación de diferencias:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \tag{51}$$

para un vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es (por (27)–(28) con $\mathbf{C} = \mathbf{I}$):

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$

Si se introduce una transformación lineal de coordenadas $\mathbf{T}$ invertible de modo que:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \tag{52}$$

es posible por la transformación anterior obtener una ecuación de diferencias matricial en las coordenadas del vector $\mathbf{z}$ como:

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{T}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(k) \tag{53}$$

Eligiendo la matriz de transformación como la inversa de la matriz de eigenvectores:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$$

la ecuación de diferencias (53) se reduce a:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_d\mathbf{z} \tag{54}$$

cuya solución es:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{A}_d^k\mathbf{z}(0)$$

Considerando que $\mathbf{z}(k) = \mathbf{T}\mathbf{x}(k)$ por (52), la solución anterior puede escribirse en términos del vector $\mathbf{x}$ como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_d^k\mathbf{T}\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}\mathbf{A}_d^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

demostrándose así (50).

7.4 Cálculo de $\mathbf{A}^k$ usando la diagonalización de $\mathbf{A}$ para eigenvalores de $\mathbf{A}$ repetidos

Los resultados de la sección anterior pueden generalizarse para el caso en que existan eigenvalores λ_i repetidos. El procedimiento es exactamente el mismo que para sistemas de tiempo continuo, pero reemplazando matrices $e^{\mathbf{M}t}$ por $\mathbf{M}^k$, donde $\mathbf{M}$ puede ser $\mathbf{A}$ o $\mathbf{A}_d$ según corresponda. Los pasos del procedimeinto se explican en detalle en la sección 7.4 del documento *Repaso: Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales Invariantes*.

8 Cálculo del Vector de Estado Inicial $\mathbf{x}(0)$ a Partir de las Condiciones Iniciales $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$, $y(-4)$, ..., $y(-n)$ de la Ecuación de Diferencias (1)

El procedimiento es equivalente al descrito en la sección 8 del documento *Repaso: Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales Invariantes*. La diferencia entre el caso continuo y el discreto es que en este último el valor de $\mathbf{x}(0)$ se expresa en términos de $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$, $y(-4)$, ..., $y(-n)$ y valores anteriores de la señal de entrada $u(k)$, $k < 0$, en vez de $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$, $\dddot{y}(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$ y derivadas de la señal de entrada u en $t = 0$.