Tema: Control PID y Compensadores

◁ *Guía de Ejercicios # 17* ▷

1. Para el sistema realimentado de la figura 1 en el que:

$$C(s) = K_p, \qquad F(s) = \frac{K_0}{s^2 + K_1 s + K_2},$$

determine los valores de $K_p, K_0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que generan un error permanente de control nulo ante un escalón unitario en la referencia. Verifique las condiciones de estabilidad del sistema realimentado.

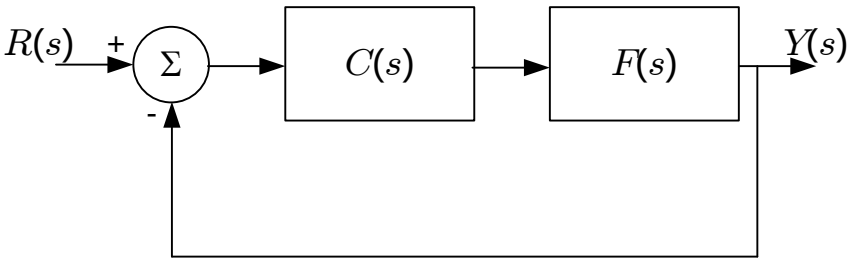


Figura 1: Sistema de realimentado

Solución:

Se tiene que:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ Y(s) &= C(s)F(s)E(s) \\ \text{(2) en (1)} \quad &\Rightarrow E(s) = R(s) - C(s)F(s)E(s) \\ &\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + C(s)F(s)} R(s) \end{aligned}$$

Luego, utilizando el Teorema del Valor Final (TVF):

$$\begin{aligned} e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1 + C(s)F(s)} R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{1 + K_p\frac{K_0}{s^2+K_1 s+K_2}}\frac{1}{\cancel{s}} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s^2}^{0} + K_1\cancel{s}^{0} + K_2}{\cancel{s^2}^{0} + K_1\cancel{s}^{0} + K_2 + K_pK_0} \\ &= \frac{K_2}{K_2 + K_pK_0} \end{aligned}$$

Por lo anterior, $e_\infty = 0$ solo si $K_2 = 0$.

La estabilidad se puede verificar calculando los polos de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$s_{1,2} = -\frac{K_1}{2} \pm \sqrt{\frac{K_1^2 - 4K_2 - 4K_0K_p}{4}} = -\frac{K_1}{2} \pm \sqrt{\frac{K_1^2 - 4K_0K_p}{4}}$$

Para que un sistema sea estable se debe cumplir que la parte real debe ser negativa. La parte real es $-\frac{K_1}{2}$ si $K_1^2 - 4K_0K_p \leq 0$. En caso controrario, se requirá satisfacer:

$$-\frac{K_1}{2} \pm \sqrt{\frac{K_1^2 - 4K_0K_p}{4}} < 0,$$

es decir, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} K_1^2 - 4K_0K_p > 0 \quad &\Rightarrow \quad K_1 > 2\sqrt{K_0K_p}, \\ K_1^2 - 4K_0K_p < K_1^2 \quad &\Rightarrow \quad K_0K_p > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema será estable si:

$$K_p > 0, K_0 > 0, K_1 > 0, K_2 > 0.$$

2. Para el control de atitud de un avión, cuya función de transferencia está dada por:

$$F(s) \quad = \quad \frac{\Theta(s)}{U(s)} \quad = \quad \frac{4500}{s(s+361.2)}$$

donde $\Theta(s)$ corresponde a la inclinación de la nariz ante un movimiento del estabilizador de cola $U(s)$:

(a) Diseñe un controlador proporcional $C(s) = K$ que asegure una sobreoscilación del 2% frente a un escalón unitario.

(b) Diseñe un controlador proporcional $C(s) = K$ que asegure un tiempo de respuesta $t_r = 1$ s.

Solución:

(a) Para un *overshoot* igual a 2%, es decir $M_p = 0.02$:

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{\Theta(s)}{R(S)} = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)} = \frac{4500K}{s^2 + 361.2s + 4500K}$$

donde $R(s)$ es la referencia en el ángulo de inclinación de la nariz del avión.
La ecuación característica de lazo cerrado es:

$$\bar{q}(s) = s^2 + 361.2s + 4500K$$

Al comparar con el modelo de segundo orden:

$$\bar{q}(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= 4500K \\ 2\xi\omega_n = 2\sqrt{4500K}\xi &= 361.2 \\ \Rightarrow \xi &= \frac{2.692}{\sqrt{K}} \end{aligned}$$

Empleando las definiciones de los términos de las raíces $s = \alpha \pm j\beta$:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\xi\omega_n \\ \beta &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \gamma = \frac{\beta}{\alpha} &= -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \\ \phi &= \arctan(\gamma) \end{aligned}$$

Para el overshoot del 2%, es decir:

$$M_p = e^{\alpha\frac{\pi}{\beta}} = \frac{2}{100}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
2 &= 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
\ln(2) &= \ln\left(100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) \\
0.693 &= 2\ln(10) - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
0.693 &= 4.605 - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} &= 1.245 \\
\xi^2 &= 1.55003 - 1.5503\xi^2 \\
\xi^2 &= 0.607 \\
\xi &= 0.7796
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
&\frac{2.692}{\sqrt{K}} = 0.7796 \\
&\Rightarrow K = 11.92
\end{aligned}$$

(b) Para el tiempo de respuesta $t_r = 1$ s, recordando que:

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\beta}$$

y utilizando los valores:

$$\begin{aligned}
t_r &= 1 \text{ s} \\
\omega_n &= \sqrt{4500K} \\
\xi &= \frac{2.692}{\sqrt{K}}
\end{aligned}$$

se resuelve numéricamente:

$$1 = \frac{\pi - \arctan\left(-\frac{\sqrt{1-2.692^2/K}}{2.692/\sqrt{K}}\right)}{\sqrt{4500K}\sqrt{1-2.692^2/K}} \Rightarrow K = 0.458.$$

3. Considere la planta

$$F(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

en lazo cerrado como se muestra en la figura 2. Se desea diseñar un compensador:

$$C(s) \;=\; K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \;=\; K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

para el sistema que cumpla las siguientes especificaciones:

- Error permanente en lazo abierto ante una entrada escalón igual al 20%.
- Margen de fase de al menos 60°.
- Margen de ganancia de al menos 10 dB.

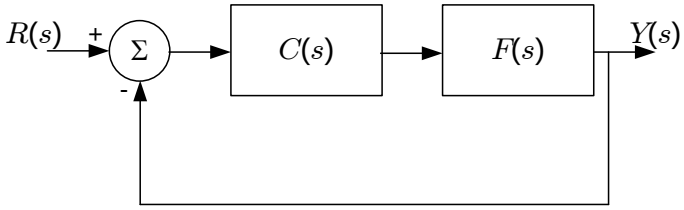


Figura 2: Planta $F(s)$ en lazo cerrado con un compensador $C(s)$.

Solución:

- Error permanente en lazo abierto igual a 20%
  Aplicando el Teorema del Valor Final en lazo abierto se tendrá que el error será:

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s\to 0} s(\frac{1}{s} - C(s)F(s)\frac{1}{s}) \\ &= \lim_{s\to 0} s(\frac{1}{s} - C(s)F(s)\frac{1}{s}) \\ &= \lim_{s\to 0} 1 - C(s)F(s) \\ &= 1 - K_c\alpha\frac{4}{\cancel{s}^{0}(\cancel{s}^{0}+2)} = -\infty \end{aligned}$$

  El resultado anterior se debe a que la planta tiene un polo en el origen que actúa como integrador. Ante una entrada escalón, el integrador genera una rampa que sobrepasa el escalón de referencia, por lo tanto el error tiene a $-\infty$.
  Es posible observar que en lazo cerrado el error permanente es nulo debido al polo en el origen. En efecto, la función de transferencia del error está dada por:

$$\frac{E(s)}{R(s)} \;=\; \frac{1}{1+C(s)F(s)} \;=\; \frac{s(s+2)(\alpha Ts+1)}{s(s+2)(\alpha Ts+1)+4K_c\alpha(Ts+1)}$$

  aplicando el Teorema del Valor Final (TVF) con $R(s) = \frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s\to 0} s\frac{s(s+2)(\alpha Ts+1)}{s(s+2)(\alpha Ts+1)+4K_c\alpha(Ts+1)}\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{\cancel{s}^{0}(\cancel{s}^{0}+2)(\alpha T\cancel{s}^{0}+1)}{\cancel{s}^{0}(\cancel{s}^{0}+2)(\alpha T\cancel{s}^{0}+1)+4K_c\alpha(T\cancel{s}^{0}+1)}\frac{1}{\cancel{s}} \;=\; 0 \end{aligned}$$

Debido a la ubicación de los polos, es posible observar a partir de la tabla de Routh-Hurwitz o del lugar geométrico de las raíces que el margen de ganancia es infinito. El sistema en lazo cerrado será estable para cualquier valor de un controlador puramente proporcional $C(s) = K_p$. Sin embargo, con un compensador de adelanto o de atraso, la situación es distinta por la presencia de un polo adicional.

La solución para los requerimientos de margen de ganancia (MG) y margen de fase (MF) puede obtenerse graficando y aproximando los valores o resolviendo las ecuacions para el MG y MF con una herramienta computacional. A continuación se explicará primero la formulación explícita de las ecuaciones que se requieren resolver. Como se verá, las ecuaciones resultantes no pueden resolverse a mano para obtener una expresión algebraica como en casos más sencillos. Sin embargo, el propósito es mostrar cómo se plantea el problema y la utilidad del método gráfico para encontrar una solución aproximada.

- Ecuaciones del MG y MF

  Para encontrar el margen de ganancia debe encontrarse primero la frecuencia a la que la fase cruza los -180°, es decir resolver:

$$\begin{aligned} -180^\circ - \angle C(j\omega)F(j\omega) &= 0^\circ \\ \angle C(j\omega)F(j\omega) &= -180^\circ \end{aligned}$$

  Lo anterior ocurre cuando la parte imaginaria es cero, es decir:

$$\mathrm{Im}\{C(j\omega)F(j\omega)\} = 0$$

  Es posible calcular la ganancia crítica empleando el método de Routh-Hurtiz y la ecuación característica:

$$\begin{aligned} \bar{q}(s) &= s(s+2)(\alpha T s+1) + 4K_c\alpha(Ts+1) \\ &= \alpha T s^3 + 2\alpha T s^2 + s^2 + 2s + 4K_c\alpha T s + 4K_c\alpha \\ &= \alpha T s^3 + (2\alpha T+1)s^2 + (2+4K_c\alpha T)s + 4K_c\alpha \end{aligned}$$

  Construyendo la tabla de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|l} s^3 & \alpha T \qquad\qquad (2+4K_c\alpha T) \\ s^2 & (2\alpha T+1) \qquad\quad 4K_c\alpha \\ s^1 & -\frac{1}{(2\alpha T+1)}\begin{vmatrix} \alpha T & (2+4K_c\alpha T) \\ (2\alpha T+1) & 4K_c\alpha \end{vmatrix} \\ s^0 & 4K_c\alpha \end{array}$$

  De la tabla de Routh-Hurwitz se obtienen las condiciones:

$$\begin{aligned} \alpha T &> 0 \\ \alpha T &> -\frac{1}{2} \\ 4K_c\alpha^2 T - (2+4K_c\alpha T)(2\alpha T+1) &< 0 \\ 4K_c\alpha &> 0 \end{aligned}$$

De la tercera restricción se tiene:

$$\begin{aligned} 4[\alpha^2 T - \alpha T(2\alpha T+1)]K_c &< 2(2\alpha T+1) \\ K_c &< \frac{(2\alpha T+1)}{2\alpha T[\alpha-(2\alpha T+1)]} \\ \alpha-(2\alpha T+1) &> 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{1-2T} \\ 1-2T>0 \Rightarrow T &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si $T=\frac{1}{2}$ entonces se requerirá $K_c < \frac{\alpha+1}{\alpha}$. Es posible observar que existen valores de K_c, T y α que aseguran que las condiciones se cumplan y el sistema sea estable. A manera de ejemplo, elegiremos en este ejercicio con cierta arbitrariedad:

$$K_c = \frac{5}{2\alpha}$$

Calculando, las partes reales e imaginaria usando $K_c=\frac{5}{2\alpha}$ se tiene:

$$\begin{aligned} C(j\omega)F(j\omega) &= K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\frac{4}{s(s+2)}\Big|_{s=j\omega} \\ &= 10\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}\frac{1}{j\omega(j\omega+2)} \\ &= 10\frac{Tj\omega+1}{(j\omega(j\omega+2)\alpha Tj\omega+1)} \\ &= \frac{10Tj\omega+10}{j\omega(j\omega+2)(\alpha Tj\omega+1)} \\ &= \frac{10Tj\omega}{j\omega(j\omega+2)(\alpha Tj\omega+1)}+\frac{10}{j\omega(j\omega+2)(\alpha Tj\omega+1)} \\ &= \frac{10T}{(j\omega+2)(\alpha Tj\omega+1)}-j\frac{10}{\omega(j\omega+2)(\alpha Tj\omega+1)} \\ &= \frac{10T(-j\omega+2)(-\alpha Tj\omega+1)}{(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)}-j\frac{10(-j\omega+2)(-\alpha Tj\omega+1)}{\omega(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)} \\ &= \frac{10T\omega((2-\alpha T\omega^2)-j\omega(2\alpha T+1))}{\omega(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)}-\frac{10(\omega(2\alpha T+1)+j(2-\alpha T\omega^2))}{\omega(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)} \\ &= \frac{10T\omega(2-\alpha T\omega^2)-10\omega(2\alpha T+1)}{\omega(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)}-j\frac{10T\omega(2\alpha T+1)-10(2-\alpha T\omega^2)}{\omega(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)} \\ &= 10\frac{\omega[2T(1-\alpha)-\alpha T^2\omega^2-1]}{\omega(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)}-j10\frac{\alpha T\omega^2+(2\alpha T+1)T\omega-2}{\omega(\omega^2+4)(\alpha^2T^2\omega^2+1)} \end{aligned}$$

La parte imaginaria es cero cuando:

$$\begin{aligned} \alpha T\omega^2+(2\alpha T+1)T\omega-2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \omega_1 &= \frac{-(2\alpha T+1)\pm\sqrt{4\alpha^2T^2+4\alpha T+1+8\alpha T^{-1}}}{2\alpha} \end{aligned}$$

Luego se calcula el margen de ganancia evaluando:

$$MG = 20\log\left(\frac{1}{\mathrm{Re}\left\{C(j\omega_1)F(j\omega_1)\right\}}\right) = 10 \text{ dB}$$

es decir, resolviendo:

$$10\frac{\omega_1(\omega_1^2+4)(\alpha^2T^2\omega_1^2+1)}{\omega_1[2T(1-\alpha)-\alpha T^2\omega_1^2-1]}=\sqrt{10}$$

Como ω_1 depende de α y T, entonces la ecuación anterior tiene dos incógnitas, que son precisamente α y T. Se requiere otra ecuación adicional para resolver un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Esta segunda ecuación se obtiene al consdierar el requerimiento de margen de fase.
Para encontrar el margen de fase debe encontrarse la frecuencia ω_2 a la cual $\|C(j\omega)F(j\omega)\|=1$, usando el $K_c=\frac{5}{2\alpha}$ encontrado en el primer punto de la pregunta, es decir:

$$\begin{aligned}
\|C(j\omega)F(j\omega)\| &= \left\|K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\frac{4}{s(s+2)}\right\|_{s=j\omega} = 1\\
&= \left\|10\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}\frac{1}{j\omega(j\omega+2)}\right\|^2 = 1\\
\Rightarrow\ & 10\frac{T^2\omega^2+1}{\alpha^2T^2\omega^2+1}\frac{1}{\omega^2(\omega^2+4)} = 1\\
& 10(T^2\omega^2+1) = (\alpha^2T^2\omega^2+1)\omega^2(\omega^2+4)\\
& 10T^2\omega^2+10 = \alpha^2T^2\omega^6+\omega^4+4\alpha^2T^2\omega^4+4\omega^2
\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\alpha^2T^2\omega^6+(1+4\alpha^2T^2)\omega^4+(4-10T^2)\omega^2-10 = 0$$

se obtenría la frecuencia ω_2 a la que la magnitud de $C(j\omega_2)F(j\omega_2)$ es 1. Luego con esa frecuencia sería necesario encontrar el margen de fase:

$$MF = -180^\circ-\angle C(j\omega_2)F(j\omega_2)=-60^\circ$$

y ajustar los parámetros α y T para que $MF>60^\circ$. Como ω_2 dependería de α y T, la solución de está ecuación con dos incógnitas requeriría considerar simultáneamente la restricción impuesta por el margen de ganancia como se explicó anteriormente. Es posible observar que se trata de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, cuya solución no es posible de obtener a mano como una expresión algebraica en forma cerrada. Por esta razón se requiere el método gráfico construyendo las asíntotas que aporta cada término como se explica a continuación.

- Solución gráfica
  A continuación para cumplir las especificaciones de márgenes de fase y ganancia, es necesario dibujar el diagrama de Bode para:

$$C(j\omega)F(j\omega)=\underbrace{\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}}_{C_1(s)}\underbrace{\frac{10}{j\omega(j\omega+2)}}_{F_1(\omega)}$$

  En la figura 3 se muestra el diagrama de Bode $F_1(\omega)$ con líneas contineas. Se puede observar en la figura 3 que el margen de fase es de $MF=-35^\circ$ y el margen de ganancia es $MG=+\infty$ dB. Según el enunciado, necesitamos un margen de fase de al menos $MF=-60^\circ$, por lo tanto debemos compensar la fase en al menos $+25^\circ$ (en adelanto) en una frecuencia cercana a los 3 rad/s, lo que implica que el cero del compensador debe ubicarse entorno a:

$$s=-\frac{1}{T}\approx -3\Rightarrow T=\frac{1}{3.}$$

Veremos con una aproximación algo más precisa que efectivamente $\frac{1}{T} \approx 3$. Sin embargo, cabe notar que al hacer la compensación de fase también provocamos un corrimiento hacia la derecha del cruce por cero en el diagrama de magnitud. Las curvas en línea punteada en la figura 3 muestran la situación con el compensador en adelanto y la situación descrita. Esto significa que ya no bastan los $25°$ adicionales del compensador para obtener al menos $60°$ de margen de fase. Consideraremos entonces que el adelanto necesario es un poco mayor y aproximadamente de $30°$ para cumplir con la especificación del enunciado.

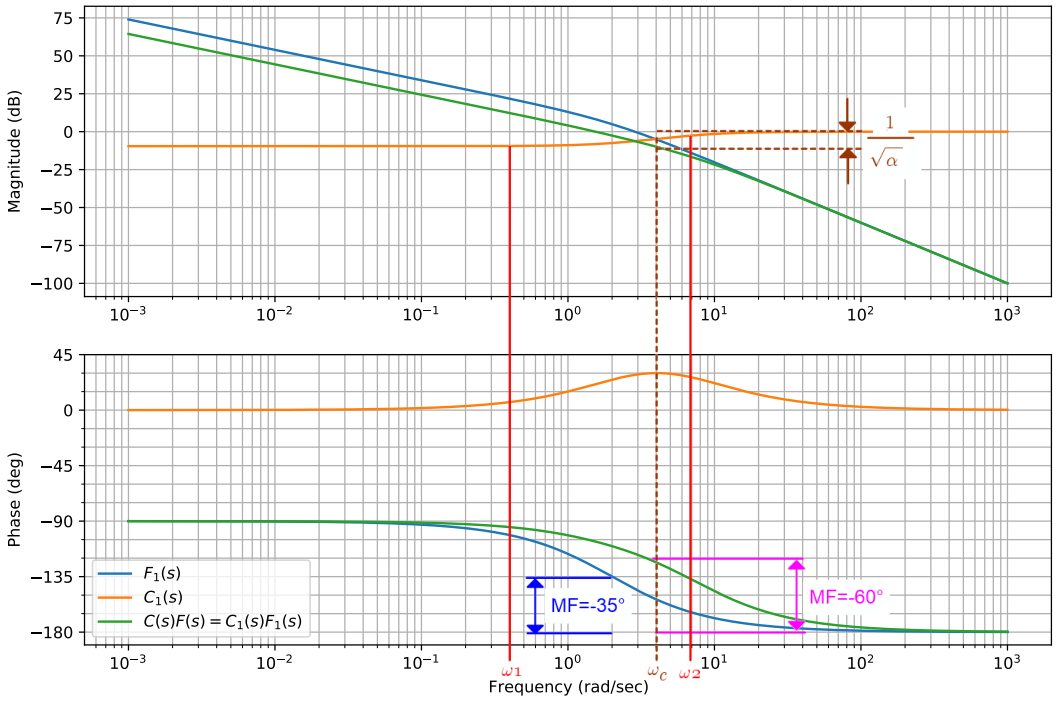


Figura 3: Diagrama de Bode de magnitud y fase para la planta $F_1(s)$ y el compensador $C_1(s)$.

El máximo ángulo de adelanto de fase ϕ_m de un compensador de adelanto se relaciona con el factor de atenuación α según (ver anexo):

$$\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

A partir de la relación anterior y considerando que el ángulo de adelanto requerido es $\phi_m = 30°$ se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, las frecuencias de corte están definidas respectivamente para el cero y el polo por:

$$\omega_1 = \frac{1}{T}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\alpha T}.$$

Para calcular la frecuencia en la cual ocurre el máximo ángulo de adelanto de fase buscamos la media geométrica entre las frecuencias de corte, esto es:

$$\log(\omega_c) = \frac{\log(\omega_1)+\log(\omega_2)}{2} \Rightarrow \omega_c^2 = \omega_1\omega_2 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

La modificación de la curva de magnitud en $\omega = \omega_c$ debido a la inclusión del término de adelanto del compensador es:

$$\left|\frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T}\right|_{\omega=\omega_c=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}} = \left|\frac{1+j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1+j\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 4.77 \text{ dB}$$

Tenemos que encontrar la frecuencia a la que $\|F_1(j\omega)\| = -4.77$ dB, ya que a esa frecuencia el compensador aumentará la ganancia justo en 4.77 dB y se producirá una ganancia neta de 0 dB, que es punto al cual se calcula el margen de fase. Resolviendo entonces:

$$\begin{aligned}
\|F_1(j\omega)\| &= 10^{\frac{-4.77}{20}} = 0.58 \\
\frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} &= 0.58 \\
17.32 &= \omega\sqrt{\omega^2+4} \\
300 &= \omega^2(\omega^2+4) \\
0 &= \omega^4+4\omega^2-300 \\
\omega &= \sqrt{\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 300}}{2}} = 3.93 \text{ rad/s}
\end{aligned}$$

Luego se requiere que ω_c coincida con la frecuencia encontrada:

$$\begin{aligned}
\omega_c = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad &\Rightarrow \quad T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{3.93\sqrt{\frac{1}{3}}} = 0.44 \text{ s} \\
&\Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1}{T} = 2.27 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T\alpha} = 6.80 \text{ rad/s}.
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
K_c &= \frac{5}{2\alpha} = 7.5 \\
C(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} &= \frac{7.5}{3}\frac{s+2.27}{s+6.80}
\end{aligned}$$

Entonces la planta compensada será:

$$C(s)F(s) = 30\frac{s+2.27}{s+6.80}\frac{1}{s(s+2)}$$

4. Considere el sistema realimentado de la figura 4 cuya planta:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

se desea estabilizar con un controlador PID. Calcule las ganancias del controlador utilizando las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols (ZN).

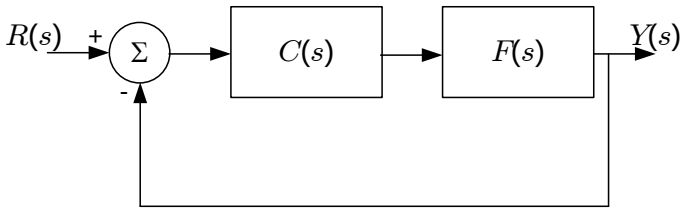


Figura 4: Sistema $F(s)$ y controlador PID $C(s)$.

Solución:

Para sintonizar un controlador PID mediante ZN puede utilizarse la técnica de lazo abierto o la de lazo cerrado. En este caso el sistema se encuentra en lazo cerrado, y aún cuando podría calcularse la respuesta en lazo abierto, este cálculo será más complicado porque el sistema tiene tres polos. En este caso conviene utilizar la técnica de sintonización ZN de lazo cerrado. En esta técnica es necesario encontrar la ganancia crítica K_{cr} que hace que el sistema en lazo cerrado sea críticamente estable. Aunque impracticable en muchas situaciones reales, en una situación real o en simulación, una vez que el sistema se encuentre oscilacilando de manera críticamente estable, deberá anotarse la ganancia crítica K_{cr} para la cual el sistema se comporta críticamente estable y además medir el período de oscilación crítico T_{cr}. Con estos datos y dependiendo del controlador deseado, se sintonizan las constantes mediante la siguiente tabla:

Controlador: $C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i}\frac{1}{s} + T_d s\right)$.

Tipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
P+I	$0.45K_{cr}$	$\frac{T_{cr}}{1.2}$	0
P+I+D	$0.6K_{cr}$	$0.5T_{cr}$	$0.125T_{cr}$

La función de transferencia del lazo cerrado es:

$$\bar{F}(s) \quad = \quad \frac{K_p}{s(s+1)(s+5)+K_p}$$

Para encontrar la ganancia crítica usamos el criterio de Routh-Hurwitz empleando la ecuación característica del sistema en lazo cerrado:

$$\bar{q}(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K_p$$

La tabla de Routh-Hurwitz es:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \frac{30-K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

Por lo tanto para que el sistema sea estable, debe cumplirse que:

$$K_p > 0, \qquad \frac{30 - K_p}{6} > 0$$

A partir de esto es posible establecer que:

$$K_{cr} \quad = \quad 30$$

Entonces la ecuación característica queda:

$$\bar{q}(s) \;=\; s^3 + 6s^2 + 5s + 30$$

Luego para encontrar la frecuencia de oscilación tenemos que encontrar el punto de cruce $s = j\omega$ por el eje imaginario de las raíces en el plano complejo, el cual es una raíz de la ecuación característica cuando la ganancia es la ganancia crítica K_{cr}:

$$\begin{aligned}
\bar{q}(j\omega) &= (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0 \\
&= -j\omega^3 - 6\omega^2 + 5j\omega + 30 = 0 \\
&= 6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{5}\ \text{rad/s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el período de oscilación crítica es:

$$T_{cr} \;=\; \frac{2\pi}{\omega} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \;=\; 2.81\ \text{s}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
K_p = 0.6K_{cr} &= 18 \\
T_i = 0.5T_{cr} &= 1.405\ \text{s} \\
T_d = 0.125T_{cr} &= 0.351\ \text{s}
\end{aligned}$$

Finalmente el controlador PID es:

$$C(s) \;=\; K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \;=\; 18\left(1 + \frac{1}{1.405s} + 0.351s\right) \;=\; 18 + 12.81\frac{1}{s} + 6.32s.$$

5. Encuentre un controlador proporcional para la planta:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

que entregue un error permanente menor al 1% ante una entrada al escalón unitario cuando la planta se realimenta como se muestra en la figura 5.

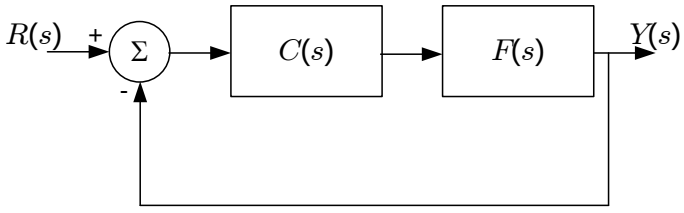


Figura 5: Sistema realimentado.

Solución:

Estabilidad

Para determinar el rango de ganancias del controlador que estabilizan la planta consideramos la ecuación característica de lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\bar{q}(s) &= 1 + C(s)F(s) = 0 \\ &= 1 + K\frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)} = 0 \\ &= (s+2)(s+3)(s+4) + K = 0 \\ &= s^3 + 9s^2 + 26s + 24 + K = 0\end{aligned}$$

y utilizamos el criterio de es estabilidad de Routh-Hurwitz, cuya tabla en este caso está dada por:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 26 \\ s^2 & 9 & 24+K \\ s^1 & \frac{210-K}{9} & \\ s^0 & 24+K & \end{array}$$

De la tabla anterior, se concluye que el sistema realimentado será estable si $-24 < K < 210$. Ahora que hemos confirmado la existencia de una ganancia K que estabiliza el sistema en lazo cerrado, podemos proceder a encontrar el valor que cumpla el requerimiento de error esperado ante un escalón unitario.

Error permanente

Aplicando el Teorema del Valor Final al error:

$$\begin{aligned}e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+C(s)F(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+C(s)F(s)}\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{s^3+9s^2+26s+24}{s^3+9s^2+26s+24+K}\frac{1}{s} \\ &= \frac{24}{24+K} < 0.01 \\ &\Rightarrow K > 2376\end{aligned}$$

Sin embargo, para la estabilidad se requiere que $K < 210$. Por lo tanto, no existe un controlador puramente proporcional que estabilice el sistema y satisfaga los requerimientos de desempeño solicitados. Sería necesario considerar por ejemplo, un controlador PI, para anular el error en régimen permanente y repetir el ejercicio de manera similar.

6. Calcule los valores de las ganancias de un controlador PID sintonizado utilizando el método de Ziegler-Nichols de lazo abierto con los valores obtenidos utilizando el método de sintonziación de Ziegler-Nichols de lazo cerrado para la planta:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

Solución:

Método ZN 1

Si se emplea el método de Ziegler-Nichols de lazo abierto, el cual asume una forma de la función de transferencia que coincide con la del problema, por simple inspección de la función de transferencia es posible observar que $L = 1$ y $T = 1$, y no es necesario calcular la respuesta en el tiempo o graficarla para conocer los valores del retardo L y el tiempo de respuesta T. A continuación se emplea la tabla de ZN del método de lazo abierto con $K/K_0 = 1$:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{K_0 T}{KL}$	∞	0
PI	$0.9\frac{K_0 T}{KL}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{K_0 T}{KL}$	$2L$	$0.5L$

Luego un controlador PID sintonizado por el método de lazo abierto tendría parámetros:

$$K_p \;=\; 1.2, \quad T_i \;=\; 2 \text{ s}, \quad T_d \;=\; 0.5 \text{ s}.$$

Método ZN 2

Para poder calcular los parámetros del PID es necesario primero obtener los valores críticos K_{cr} y T_{cr} de la planta, los cuales pueden calcularse utilizando métodos de análisis en frecuencia como Nyquist o Bode dada la presencia del retardo que impide aplicar el método de Routh-Hurwitz sin hacer aproximaciones.

Utilizando el método de Nyquist, debemos evaluar la función de transferencia en $s = j\omega$. No es necesario obtener la gráfica completa de Nyquist, pero si recordar los puntos especiales. *Aunque no es un conocimiento esencial para resolver el ejercicio, no está demás recordar que el reemplazo $s = j\omega$ corresponde a realizar un análisis AC en el que se considera que los inputs del sistema son puramente sinusoidales y en el que las respuestas transitorias ya han desaparecido. Algunos llaman a este análisis como sinusoidal steady-state analysis.*

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{e^{-j\omega}}{j\omega+1} \\ &= \frac{\cos(\omega) - j\sin(\omega)}{j\omega+1} \\ &= \frac{(\cos(\omega) - j\sin(\omega))(1-j\omega)}{(1+j\omega)(1-j\omega)} \\ &= \frac{\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) - j(\sin(\omega) + \omega\cos(\omega))}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

Igualando la parte imaginaría a cero y despejando la frecuencia angular ω, se encuentra la frecuencia crítica que permite calcular el margen de ganancia:

$$\sin(\omega) + \omega\cos(\omega)) \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \omega = -\tan(\omega)$$

para la cual se encontran soluciones $\omega_{c_1} = 0$ y $\omega_{c_2} \approx 2.03$.

El periodo crítico debe ser finito y positivo (por un tema físico) y puede calcularse utilizando ω_{c_2} como:

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{c_2}} \approx 3.1 \text{ s}.$$

Luego, la ganancia crítica se puede calcular usando

$$K_{cr}F(j\omega_{c_2}) = -1 \;\Rightarrow\; K_c = -\frac{1}{\text{Re}\{F(j\omega_{c_2})\}} \approx 2.26$$

y finalmente de la tabla 1 se pueden obtener los valores requeridos

$$K_p \;=\; 1.35, \quad T_i \;=\; 1.54 \text{ s}, \quad T_d \;=\; 0.387 \text{ s}.$$

Comparando los valores de ambos métodos, puede afirmarse que son similares. En este caso la ganancia proporcional es un poco mayor, pero se las constantes T_i y T_d son un poco menores, moderando las acciones integral y derivativa, respectivamente.

Repita este ejercicio para la planta $F(s) = 2\frac{e^{-s}}{(2s+1)^2}$, pero esta vez utilice el diagrama de Bode para calcular K_{cr} y T_c.

7. Considere un sistema con controlador $C(s)$ y planta $F(s)$ dados por:

$$C(s) = K, \qquad F(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

diseñe un compensador $K(s)$ de tal manera que el sistema realimentado tenga:

- Error permanente menor a 5% ante una rampa de pendiente a relativo al crecimiento de la rampa en una unidad de tiempo, es decir el error relativo a la pendiente de la rampa. Puede considerar que el sistema es estable a priori.
- Margen de fase de al menos $45°$.

Solución:

Empleando el Teorema del Valor Final (TVF) para determinar el error permanente ante una referencia rampa $R(s) = \frac{a}{s^2}$:

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s\to 0} sE(s) &&= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+C(s)F(s)}R(s) \\ &&&= \lim_{s\to 0} s\frac{s(s+2)}{s^2+2s+K}\frac{a}{s^2} \\ &&&= \frac{2a}{K} \end{aligned}$$

Luego, el requierimiento de que el error sea menor al 5% de la pendiente:

$$\frac{e_\infty}{a} < 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{2a}{K}}{a} < \frac{5}{100} \quad \Rightarrow \quad K > 40.$$

Antes de diseñar un posible compensador $K(s)$ es necesario calcular el margen de fase del sistema con el controlador $C(s)$. Para esto se busca el punto en el que la magnitud de $C(j\omega)F(j\omega)$ es 0 dB, es decir:

$$|C(j\omega)F(j\omega)| = \left|\frac{40}{j\omega(j\omega+2)}\right| = \frac{40}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} = 1 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \sqrt{\frac{-4\pm\sqrt{16+6400}}{2}} = 6.17 \text{ rad/s}$$

Ahora podemos calcular el desfase $\angle C(j\omega)F(j\omega)$ para el valor de ω_1:

$$\begin{aligned} \angle C(j\omega)F(j\omega) &= \angle 40 + \angle\frac{1}{j\omega_1} + \angle\frac{1}{j\omega_1+2} \\ &= 0 - 90° - \arctan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = -162.04° \end{aligned}$$

Luego el margen de fase es:

$$MF \;=\; -180° - (-162.04) \;=\; -17.96°$$

Se requiere un margen de fase de $45°$, por lo que se busca una compensación de $27.04°$ en adelanto. La compensación en adelanto se puede lograr con un compensador de la forma:

$$K(s) \;=\; \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

Sin embargo, al introducir la compensación $K(s)$ esta también afecta la magnitud y la nueva frecuencia donde se produce el cruce por cero es levemente mayor. Por esta razón, se requiere una compensación un poco mayor a la calculada con el fin de compensar también este efecto.

El máximo ángulo de adelanto de fase ϕ_m de un compensador de adelanto se relaciona con el factor de atenuación α según (ver anexo):

$$\sin\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Luego con $\phi_m = 30°$:

$$\sin(30°) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, las frecuencias de corte están definidas respectivamente para el cero y el polo por:

$$\omega_1 = \frac{1}{T}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\alpha T}.$$

Para calcular la frecuencia en la cual ocurre el máximo ángulo de adelanto de fase buscamos la media geométrica entre las frecuencias de corte, esto es:

$$\log(\omega_c) \;=\; \frac{\log(\omega_1)+\log(\omega_2)}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_c^2 = \omega_1\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

La modificación de la curva de magnitud en $\omega = \omega_c$ debido a la inclusión del término de adelanto del compensador es:

$$\left|\frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T}\right|_{\omega=\omega_c=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}} \;=\; \left|\frac{1+j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1+j\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right| \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \;=\; 4.77 \text{ dB}$$

Tenemos que encontrar la frecuencia a la que $\|C(j\omega)F(j\omega)\| = -4.77$ dB, ya que a esa frecuencia el compensador aumentará la ganancia justo en 4.77 dB y se producirá una ganancia neta de 0 dB, que es punto al cual se calcula el margen de fase. Resolviendo entonces:

$$\begin{aligned}
\|C(j\omega)F(j\omega)\| &= 10^{\frac{-4.77}{20}} = 0.58 \\
\frac{40}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} &= 0.58 \\
68.97 &= \omega\sqrt{\omega^2+4} \\
4756.24 &= \omega^2(\omega^2+4) \\
0 &= \omega^4 + 4\omega^2 - 4756.24 \\
\omega &= \sqrt{\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 4756.24}}{2}} = 8.19 \text{ rad/s}
\end{aligned}$$

Luego se requiere que ω_c coincida con la frecuencia encontrada:

$$\begin{aligned}
\omega_c \;=\; \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad &\Rightarrow \quad T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{8.29\sqrt{\frac{1}{3}}} = 0.21 \text{ s} \\
&\Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1}{T} = 4.79 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T\alpha} = 14.36 \text{ rad/s}.
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$K(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{T}{\alpha T}\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = 3\frac{s+4.79}{s+14.36}$$

La fase del sistema es:

$$\begin{aligned}\angle K(j\omega)C(j\omega)F(j\omega) &= \angle K(j\omega) + \angle C(j\omega) + \angle F(j\omega) \\ &= \arctan(T\omega) - \arctan(\alpha T\omega) + 0^\circ - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

la que evaluada en $\omega_c = 8.19$ rad/s, $T = 0.21$ s resulta en:

$$\angle K(j\omega)C(j\omega)F(j\omega) = 59.70^\circ - 29.83 + 0^\circ - 90^\circ - 76.28^\circ = -136.41^\circ$$

El margen de fase resultante es entonces:

$$MF = -180 - \angle K(j\omega)C(j\omega)F(j\omega) = -180^\circ - (-136.41^\circ) = -43.59^\circ$$

El margen de fase no resultó ser el requerido, pero bastante cercano. Esto se debe a que se hizo una aproximación $\phi_m = 30^\circ$ cuando se requería algo levente mayor. Se utilizó este $\phi_m = 30^\circ$ para simplificar los cálculos. Para obtener el margen de fase requerido sería necesario repetir el proceso con ϕ_m algo mayor a 30°.

8. Para la planta

$$F(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

desarrolle un controlador PID que ubique al menos dos polos del sistema en lazo cerrado en $s = -4$ y tenga un error permanente nulo ante una entrada escalón.

Solución:

Para que la planta tenga error permanente nulo, el controlador debe ser PI o PID. Se hará un análisis de un PI y en caso de faltar parámetros se incluirá la acción derivativa. Dado que la acción integral agregará un tercer polo al sistema, se tendrá como objetivo una ecuación característica de lazo cerrado *deseada* de la siguiente forma:

$$\bar{q}^d(s) = (s+4)^2(s+c) = s^3 + (8+c)s^2 + (16+8c)s + 16c$$

Un controlador PI puede ser representado según $C(s) = K(s+a)/s$. Al utilizar este controlador, la ecuación característica del sistema realimentado será:

$$\bar{q}(s) = 1 + C(s)F(s) = s^3 + (K-1)s + Ka$$

En la ecuación característica anterior no aparece el término de segundo orden, por lo que se concluye que no es posible lograr el polinomio requerido $\bar{q}^d(s)$.

Probando con un controlador PID con $C(s) = K_p + K_i\frac{1}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = \frac{K(s+a)(s+b)}{s} = \frac{K(s^2+(a+b)s+ab)}{s}$, el sistema realimentado tendrá ecuación característica:

$$\bar{q}(s) = 1 + C(s)F(s) = s^3 + Ks^2 + (K(a+b)-1)s + Kab$$

Igualando los polinomios $\bar{q}(s)$ y $\bar{q}^d(s)$ se concluye que:

$$\begin{aligned} K &= 8+c \\ K(a+b)-1 &= 16+8c \;\Rightarrow\; a+b = \frac{17+8c}{8+c} \\ Kab &= 16c \quad\Rightarrow\quad ab = \frac{16c}{8+c} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene que $b = \frac{16c}{a(8+c)}$, y reemplazándo b en la primera ecuación y resolviendo para a se llega a:

$$a = \frac{17+8c \pm \sqrt{289-240c}}{2(8+c)}$$

Existen múltiples posibles valores para a en función de c. Eligiendo $c = 289/240$ se tendrá que a solo tiene una solución, y lo mismo ocurre con b, de modo que $a = b = 68/47$ y $K = 2209/240$. Quedando un controlador de la forma:

$$C(s) = K\frac{(s+a)^2}{s} = K\left(\frac{s^2+2as+a^2}{s}\right) = 2aK\left(1+\frac{a}{2s}+\frac{s}{2a}\right) = \frac{799}{30}\left(1+\frac{34}{47s}+\frac{47s}{136}\right)$$

Anexo: Resumen de repaso

Resumen controlador PID

$$u(t) = MV(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)d\tau + k_d \frac{de}{dt}$$

Parameter	Tiempo de respuesta	Overshoot	Tiempo de estabilización	Error en régimen permanente	Estabilidad
$K_P \uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	Cambio menor	$\downarrow$	$\downarrow$
$K_I \uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	Se elimina	$\downarrow$
$K_D \uparrow$	Cambio menor	$\downarrow$	$\downarrow$	Sin efecto	$\uparrow$ si K_D es pequeño

Métodos de sintonización de Ziegler-Nichols para controladores PID

Forma del controlador:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Método ZN 1 (lazo abierto): Este método asume que la planta tiene un comportamiento que puede describirse por una función de transferencia de la forma:

$$F(s) = \frac{(K/K_0)e^{-Ls}}{Ts+1}$$

El primer paso es aplicar un escalón unitario de magnitud K_0 en lazo abierto. Luego se deben medir: (i) el retardo L de la respuesta, y (ii) el tiempo de estabilización T a partir del gráfico obtenido.
Finalmente, las ganancias de controlador se fijan de acuerdo al tipo de controlador según los valores de la siguiente tabla:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{K_0 T}{KL}$	∞	0
PI	$0.9\frac{K_0 T}{KL}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{K_0 T}{KL}$	$2L$	$0.5L$

Método ZN 2 (lazo cerrado): Este método asume que la planta en lazo cerrado empieza a oscilar si se emplear una ganancia puramente proporcional suficientemente grande. El método no asume una forma de función de transferencia específica.
El primer paso consiste para la aplicación práctica consiste en aumentar la ganancia hasta encontrar un valor K_{cr}, llamado *ganancia crítica*, para el cual la respuesta del sistema en lazo cerrado empieza a oscilar. Luego se mide el periodo de la oscilación T_{cr}.
Finalmente, las ganancias de controlador se fijan de acuerdo al tipo de controlador según los valores de la siguiente tabla:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{T_{cr}}{1.2}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$\frac{T_{cr}}{2}$	$0.125T_{cr}$

El método es difícil de aplicar a la mayoría de los sistemas reales por la peligrosidad en muchos casos de llevar el sistema a un régimen oscilatorio crítico. Sin embargo, puede aplciarse a modelos de plantas encontrando el valor crítico mediante métodos de análsis de estabilidad como Routh-Hurwitz, LGR, Nyquist o Bode, y luego encontrar la frecuencia crítica ω_{cr}, la cual se relaciona al periodo según $\omega_{cr} = 2\pi f_{cr} = 2\pi \frac{1}{T_{cr}}$, lo que implica que $T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}}$.

Redes de Compensación

Los márgenes de ganancia y de fase son criterios que determinan la estabilidad de sistemas realimentados a partir de su respuesta en frecuencia de lazo abierto. Uno o más compensadores combinados adecuadamente permiten modificar los márgenes de ganancia y fase con el fin de aumentar la estabilidad de un sistema.

El compensador típico puede expresarse de la siguiente forma:

$$C(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K\frac{T}{\alpha T}\frac{s+T^{-1}}{s+\alpha^{-1}T^{-1}} = K\alpha^{-1}\frac{s+T^{-1}}{s+\alpha^{-1}T^{-1}} = \bar{K}\frac{s+b}{s+a}$$

donde $\bar{K} = \alpha^{-1}K$, $a = \frac{1}{\alpha T}$ y $b = \frac{1}{T}$. Cuando $\alpha < 1$ ($a > b$), se denomina compensador o red de adelanto, mientras que en el caso contrario es de retraso.
La fase del compensador es

$$\begin{aligned}\angle C(j\omega) = \phi(\omega) &= \angle(Tj\omega+1) - \angle(\alpha Tj\omega+1)\\ &= \arctan(T\omega) - \arctan(\alpha T\omega)\end{aligned}$$

Para encontrar el valor máximo de adelanto (o retraso), maximizamos $\phi(\omega)$:

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{T}{1+T^2\omega^2} - \frac{\alpha T}{1+\alpha^2T^2\omega^2} = 0 \;\Rightarrow\; \omega^2 = \frac{1}{\alpha T^2} \;\Rightarrow\; \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

Cabe notar que la media geométrica del cero b y el polo a corresponde a la ubicación del la frecuencia máxima ϕ_m. Dicho de otra manera, utilizando la escala logáritmica para el eje de frecuencias en el diagrama de Bode, el lugar de la frecuencia máxima está en el promedio de $\log(a)$ y $\log(b)$:

$$\log(\omega_m) = \frac{\log(a)+\log(b)}{2} \;\Rightarrow\; \omega_m^2 = ab \Rightarrow\; \omega_m = \sqrt{ab} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

Para obtener la relación entre el desfase máximo ϕ_m y el valor de α se debe evaluar $C(s)$ en $s = j\omega$ y calcular el desfase que ocurre cuando $\omega = \omega_m$.

$$\begin{aligned}C(j\omega) &= K\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1} = K\frac{1+\alpha T^2\omega^2}{1+\alpha^2T^2\omega^2} + jK\frac{T\omega(1-\alpha)}{1+\alpha^2T^2\omega^2}\\ C(j\omega_m) &= K\frac{2}{1+\alpha} + jK\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{(1-\alpha)}{1+\alpha}\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene que en $\omega = \omega_m$:

$$\|C(j\omega_m)\| = K\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \phi_m = \phi(\omega_m) = \arctan\left(\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right), \quad \sin(\phi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

La última relación se obtiene considerando que $\tan(\phi_m) = (1-\alpha)/(2\sqrt{\alpha}) \Rightarrow \sin^2(\phi_m) = (1-\alpha)^2/(4\alpha)(1-\sin^2(\phi_m))$ o bien que $\sin(\phi_m) = \text{Im}\{C(j\omega_m)\}/\|C(j\omega_m)\|$. Observar que para un *compensador de atraso* de la forma $C(s) = K\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}$, con $\alpha < 1$, se obtienen los mismos resultados, pero ahora ϕ_m es un ángulo negativo, por lo que en este caso:

$$\sin(\phi_m) = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$