Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 9

Asignación de polos

08 de Noviembre 2024

Manuel San Francisco - msf@uc.cl

Problema 1

Considere el esquema de prealimentación de perturbación en la figura

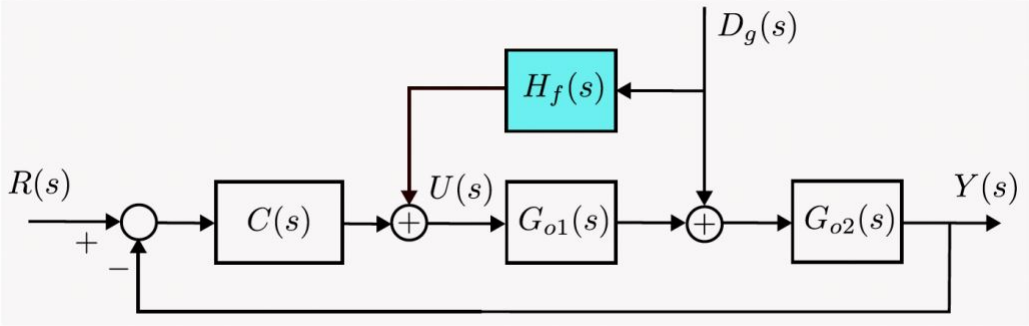


Figura 1: Esquema a estudiar

donde $G_{o2}(s) \equiv 1$ y $G_{o1}(s) = \frac{1}{s+1}$. Se sabe además que

1. La referencia es de tipo escalón
2. La salida de la planta se mide con ruido significativo en frecuencias mayores a 3 rad/s
3. Existe una perturbación medible D_g con energía menor a 5 rad/s

Diseñe el controlador $C(s)$ y el bloque de prealimentación de perturbación $H_f(s)$ que permitan satisfacer los requerimientos de diseño.

Solución:

- Para seguir la referencia de tipo escalón basta diseñar un controlador con integración

de la forma

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{P(s)}{s\bar{L}(s)}$$

donde el grado de P y L se escogen con la fórmula vista en clases dada por $n_p = n_\ell = n-1+r$, con n el grado del denominador de la planta. $r = 1$ dado que solo agregamos un polo para integración. Entonces, la forma del controlador sería

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$

donde p_1 y p_0 son las incógnitas que encontraremos a través de asignación de polos.

- Dado que existe ruido de medición, y que la función de transferencia (o sensibilidad) que relaciona el ruido de medición con la salida es

$$\frac{Y(s)}{D_m(s)} = -T_o(s)$$

debemos diseñar el ancho de banda del lazo cerrado (i.e., de $T_o(s)$) tal que sea menor a 3 rad/s. Es decir, $T_o(j\omega)$ sería aproximadamente cero para frecuencias mayores a 3, que es justamente lo que queremos.

- Sabemos que existe una perturbación D_g medible con energía menor a 5 rad/s. Dado que $G_{o2}(s) = 1$, esta perturbación se encuentra a la salida de la planta $G_{o1}(s)$, y entonces debemos mirar a $S_o(s)$ la cual relaciona $Y(s)$ con $D_g(s)$, es decir

$$\frac{Y(s)}{D_g(s)} = S_o(s)$$

la cual queremos que sea cero para frecuencias menores a 5 rad/s. Dado que $T_o(s)+S_o(s) = 1$, esto es lo mismo que pedir que $T_o(s) = 1$ para frecuencias menores a 5 rad/s. Es decir, necesitamos que el ancho de banda del lazo cerrado sea mayor a 5 rad/s.

Notamos que tenemos dos requisitos incompatibles de ancho de banda, por un lado, necesitamos que $B_w < 3$ y por otro lado queremos que $B_w > 5$. Esto no tendría solución si tuviésemos solamente un controlador $C(s)$ (1 grado de libertad). Sin embargo, podemos lograrlo al utilizar el bloque $H_f(s)$.

Por un lado, diseñaremos $C(s)$ para que el ancho de banda del lazo sea menor a 3 rad/s, y de esta forma matar el ruido de medición. Por otro lado, recordemos que la relación entre $D_g(s)$ y la salida $Y(s)$, en el esquema de prealimentación de perturbación, está dada por

$$Y(s) = S_o(s)(1 + G_{o1}(s)H_f(s))D_g(s)$$

Entonces diseñaremos $H_f(s)$ para que $1+G_{o1}(s)H_f(s)$ sea aproximadamente **cero** para frecuencias menores a 5 rad/s, que es donde vive la perturbación. De esta forma, con el $C(s)$ y $H_f(s)$ diseñados, lograríamos cumplir los requisitos de diseño.

- **Diseño de $C(s)$:** Ya sabemos que el controlador tiene la forma

$$\boxed{C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}}$$

Solo falta proponer un polinomio de lazo cerrado con ancho de banda menor a 3 rad/s. Es decir, nos sirve $A_{cl}(s) = s^2+3s+4$ (ancho de banda igual a 2). Entonces, la ecuación de asignación de polos queda dada por

$$s(s+1) + p_1 s + p_0 = s^2 + 3s + 4$$

Lo que implica que $p_0 = 4$ y $p_1 = 2$.

- **Diseño de $H_f(s)$:** Debemos diseñar $H_f(s)$ tal que $1+G_{o1}(s)H_f(s)$ sea aproximadamente **cero** para frecuencias menores a 5 rad/s. Esto se logra si

$$H_f(s) \approx -\frac{1}{G_{o1}(s)} = -(s+1)$$

en frecuencias menores a 5 rad/s. Dado que esta función de transferencia no es físicamente realizable (no causal), debemos agregar un polo rápido para aproximarla. Nos sirve algo como

$$\boxed{H_f(s) = -\frac{10(s+1)}{s+10}}$$

el cual aproxima bastante bien a $-(s+1)$ en frecuencias menores a 5 rad/s como se puede ver en el siguiente Bode:

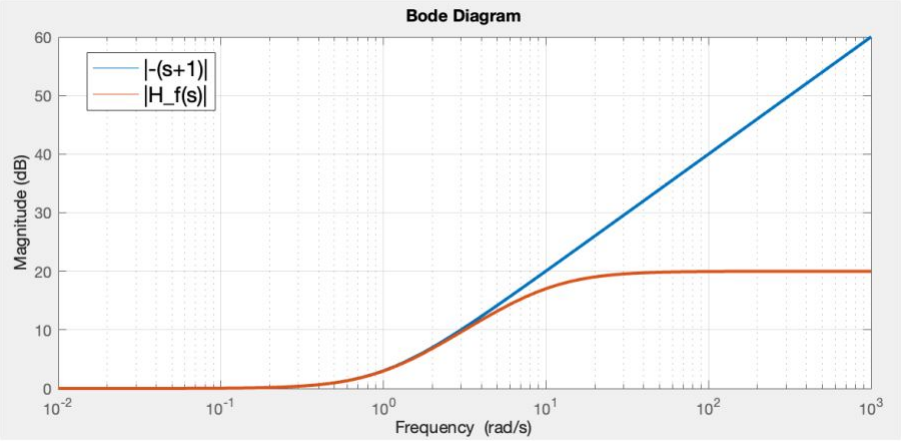


Figura 2: Bode de H_f

Problema 2

Considere un esquema de prealimentación de referencia como el siguiente

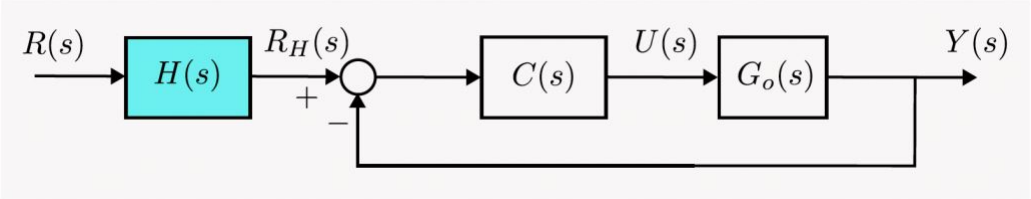


Figura 3: Esquema a estudiar

donde $G_o(s) = \dfrac{1}{s-1}$. Diseñe un controlador $C(s)$ y un bloque de prealimentación de la referencia $H(s)$ que garanticen que el sistema sea internamente estable y que, cuando la referencia $r(t)$ es de tipo escalón, la salida $y(t)$ no presente overshoot y sea igual a la referencia en estado estacionario.

Solución:

Note que si sólo se utiliza un controlador con integración (por ejemplo, un PI) estabilizante, pero sin usar el grado de libertad adicional dado por el bloque de prealimentación de la referencia (es decir, $H(s) = 1$), siempre existirá overshoot. Si bien este se puede reducir eligiendo modificando el ancho de banda, no se puede eliminar. Para garantizar que no exista overshoot, podríamos hacer lo siguiente:

- Diseñamos un controlador estabilizante y con integración. El orden de éste sería $n - 1 + r = 1 - 1 + 1 = 1$, es decir, tiene la forma

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \implies A_{cl}(s) = s(s-1) + p_1 s + p_0 = s^2 + (p_1 - 1)s + p_0$$
$$\implies \frac{Y(s)}{R_H(s)} = T_o(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s^2 + (p_1 - 1)s + p_0}$$

  donde $p_1 > 1$ y $p_0 > 0$ garantizan que el lazo sea estable, y se pueden elegir arbitrariamente los polos de lazo cerrado.

- El bloque de prealimentación $H(s)$ debe ser estable y propio, dado que está en lazo abierto. Se elige de tal forma que la función de transferencia entre $R(s)$ e $Y(s)$ sea de primer orden (así no hay overshoot), y tal que la ganancia continua de esta transferencia sea igual a 1 para seguimiento perfecto. Una opción sería

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = H(s)T_o(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \tau > 0$$
$$\implies H(s) = \frac{s^2 + (p_1 - 1)s + p_0}{(\tau s + 1)(p_1 s + p_0)}$$