Módulo 9 — Probabilidad de error de bit (track standard)

Cápsula 9.1 — Receptor óptimo matemáticamente

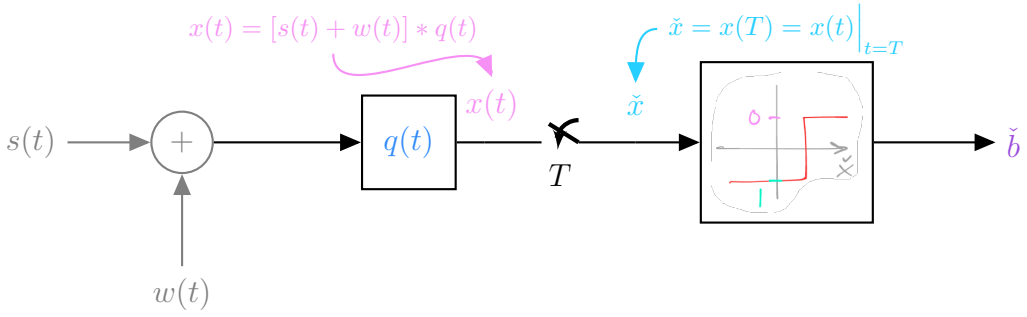


Figura 9.1.1: Diagrama de bloques receptor óptimo.

$$
\begin{aligned}
\check{x} &= x(t)\Big|_{t=T} \\
&= s(t) * q(t)\Big|_{t=T} + w(t) * q(t)\Big|_{t=T} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) q(t-\tau)\, d\tau \Big|_{t=T} + \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) q(t-\tau)\, d\tau \Big|_{t=T} \\
&\qquad = \check{s}_i \varphi(\tau) \qquad\qquad = \varphi(T-(t-\tau)) = \varphi(T-t+\tau) \\
&= \check{s}_i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\varphi(T-t+\tau)\, d\tau \Big|_{t=T} + \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varphi(T-t+\tau)\, d\tau \Big|_{t=T} \\
&= \check{s}_i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)^2\, d\tau}_{=1} + \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau \\
\check{x} &= \check{s}_i + \int_0^T w(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau
\end{aligned}
$$

Componente aleatoria debida al mensaje. Toma uno de dos valores según si $s(t)$ es $s_0(t)$ o $s_1(t)$.

$$\implies \check{s}_i = \begin{cases} \check{s}_0 \\ \check{s}_1 \end{cases}$$

Componente aleatoria debida al ruido térmico.
Es siempre la misma sin importar lo que fue transmitido, pero no sabemos cuanto vale.

$$\implies \check{w} \sim N(0, \sigma_w^2)$$

Ejemplificando con NRZ:

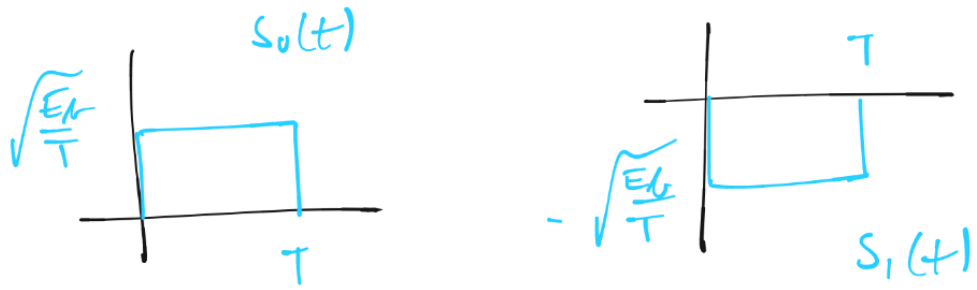


Figura 9.1.2: Modulación NRZ.

$$s_0(t) = \sqrt{E_b} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T} \right)}_{\triangleq \varphi(t)} \qquad = \check{s}_0 \cdot \varphi(t) \tag{9.1.1}$$

$\check{s}_0$

$$s_1(t) = -s_0(t) \qquad = \check{s}_1 \cdot \varphi(t) \tag{9.1.2}$$

$$\check{x} = \pm\sqrt{E_b} + \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T w(\tau)\, d\tau \tag{9.1.3}$$

Cápsula 9.2 — Análisis del estadístico de decisión

La variable de decisión $\check{x}$ tiene 2 componentes aleatorias (mensaje y ruido).

$\Longrightarrow$ ¿Distribución de probabilidad de $\check{x}$?

Condicionando:

$$\text{Bajo } 0 \text{ (dado } \check{s}_i = \check{s}_0) : \check{x} = \check{s}_0 + \underbrace{\int_0^T w(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau}_{\triangleq \check{w}}$$

$$\text{Bajo } 1 \text{ (dado } \check{s}_i = \check{s}_1) : \check{x} = \check{s}_1 + \overbrace{\int_0^T w(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau}$$

Observaciones clave:

(a) Condicionada a la transmisión, la variable de decisión $\check{x}$ tiene distribución Normal.

- Tiene una componente determinística (condicional) debida al bit transmitido.
- Tiene una componente aleatoria debida al ruido térmico.
  $\Longrightarrow$ El ruido térmico es el único responsable de los errores de decisión.

(b) Podemos determinar su media y varianza condicional:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= E\{\check{x} \mid 0\} \\
&= E\left\{\check{s}_i + \int_0^T w(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \mid 0\right\} \\
&= E\{\check{s}_i \mid 0\} + E\left\{\int_0^T w(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \mid 0\right\} \\
&= \check{s}_0 + \int_0^T \underbrace{E\{w(\tau)\}}_{=0}\,\varphi(\tau)\,d\tau \\
&\qquad \text{PEG} \sim N(0,\infty) \\
&= \check{s}_0 \\
\mu_1 &= E\{\check{x} \mid 1\} = \check{s}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_0^2 &= \operatorname{Var}\{\check{x} \mid 0\} \\
&= E\left\{(\check{x} - \mu_0)^2 \mid 0\right\} \\
&= E\left\{(\check{s}_0 + \check{w} - \check{s}_0)^2\right\} \\
&= E\left\{\check{w}^2\right\} \\
&= E\left\{\int_0^T w(\tau_1)\varphi(\tau_1)\,d\tau_1 \cdot \int_0^T w(\tau_2)\varphi(\tau_2)\,d\tau_2\right\} \\
&= E\left\{\int_0^T \int_0^T w(\tau_1)w(\tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\right\} \\
&= \int_0^T \int_0^T \underbrace{E\{w(\tau_1)w(\tau_2)\}}_{R_w(\tau_1-\tau_2)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau_1-\tau_2)}\,\varphi(\tau_2)\,d\tau_2\,\varphi(\tau_1)\,d\tau_1
\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
\sigma_0^2 &= \frac{N_0}{2}\int_0^T \underbrace{\int_0^T \delta(\tau_1-\tau_2)\varphi(\tau_2)\,d\tau_2}_{\text{Prop. del cedazo (sifting property)}\ =\varphi(\tau_1)}\,\varphi(\tau_1)\,d\tau_1 \\
&= \frac{N_0}{2}\int_0^T \varphi^2(\tau_1)\,d\tau_1 \\
&= \frac{N_0}{2}
\end{aligned}$$

Con ello $\check{w} \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$.

$$\sigma_1^2 = \sigma_0^2 \quad \text{(por inspección)}$$

Y, finalmente:

$$\check{x} \mid 0 \sim N\left(\check{s}_0, \frac{N_0}{2}\right)$$
$$\check{x} \mid 1 \sim N\left(\check{s}_1, \frac{N_0}{2}\right)$$

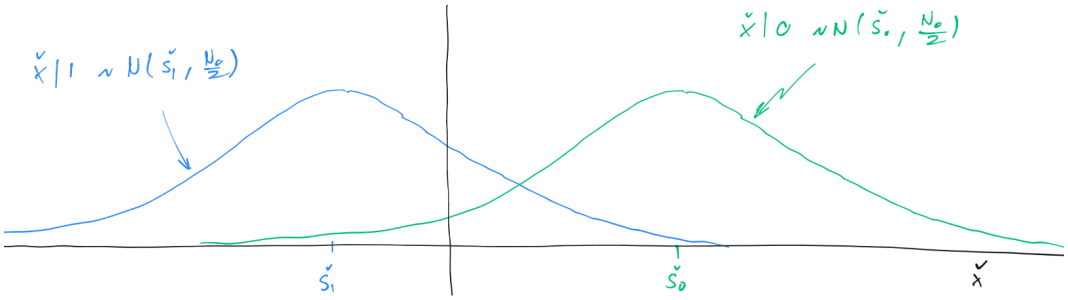


Figura 9.2.1: Estadísticos de decisión.

Cápsula 9.3 — Regiones, frontera y errores de decisión

Veamos lo anterior para el caso concreto de NRZ:

$$\text{Bajo } 0 : \check{x} = \sqrt{E_b} + \check{w} \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$
$$\text{Bajo } 1 : \check{x} = -\sqrt{E_b} + \check{w} \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

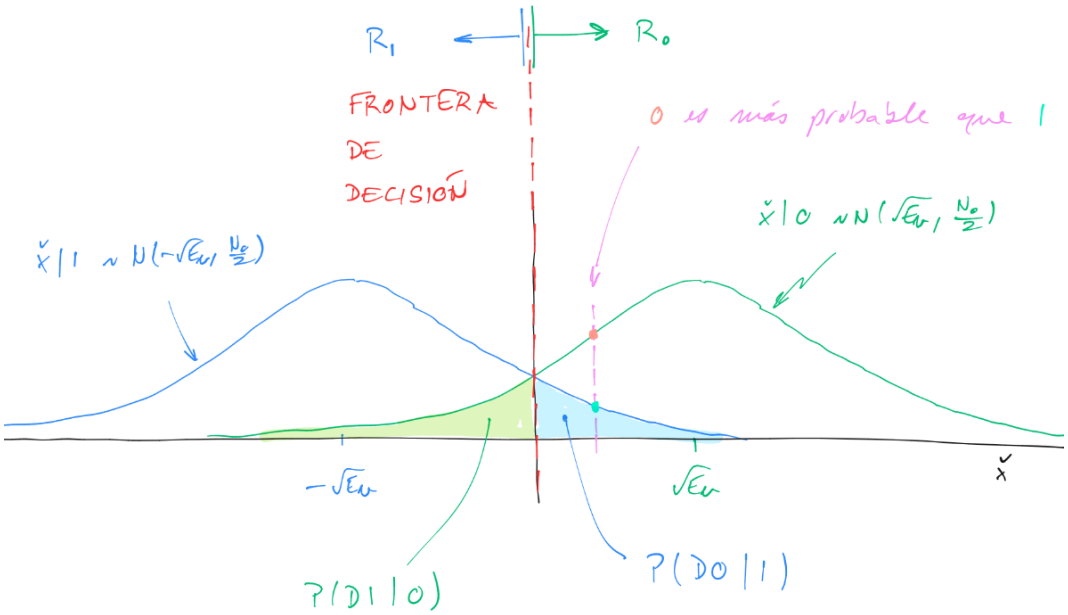


Figura 9.3.1: Frontera de decisión.

(a) Según cuál densidad de probabilidad es mayor, hay 2 regiones:

R_0: 0 es más probable que 1.

R_1: 1 es más probable que 0.

→ REGIONES DE DECISIÓN.

Las regiones de decisión están separadas por la FRONTERA DE DECISIÓN.

La frontera de decisión siempre está en el punto medio (misma distancia euclidiana) de los valores medios de las campanas gaussianas.

NRZ: $\frac{1}{2}\left[\sqrt{E_b} + -\sqrt{E_b}\right] = 0$

$\Longrightarrow$ Por la derecha $p_{\check{x}}(\check{x} \mid 0) > p_{\check{x}}(\check{x} \mid 1)$
$\Longrightarrow$ Probabilidad favorece declarar 0.

$\Longrightarrow$ Por la izquierda $p_{\check{x}}(\check{x} \mid 0) < p_{\check{x}}(\check{x} \mid 1)$
$\Longrightarrow$ Probabilidad favorece declarar 1.

(b) Los ERRORES DE DECISIÓN ocurren cuando el ruido causa que $\check{x}$ caiga en la región de decisión donde el símbolo opuesto al transmitido es más probable.

Hay sólo dos posibles EVENTOS DE ERROR DE DECISIÓN:

D1 | 0 $\implies$ Declarar 1 cuando se transmitió un 0.

D0 | 1 $\implies$ Declarar 0 cuando se transmitió un 1.

D1 | 0 y D0 | 1 son eventos:

- Mutuamente excluyentes.
- Conjuntamente exhaustivos.

(c)

$$P_b = \frac{1}{2}P(D1 \mid 0) + \frac{1}{2}P(D0 \mid 1)$$

$= p_0 = \frac{1}{2}$ $= p_1 = \frac{1}{2}$ $p_0 + p_1 = 1$

P_b: PROBABILIDAD DE ERROR DE BIT.

(Supuesto permanente: $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$)

Cápsula 9.4 La función de error

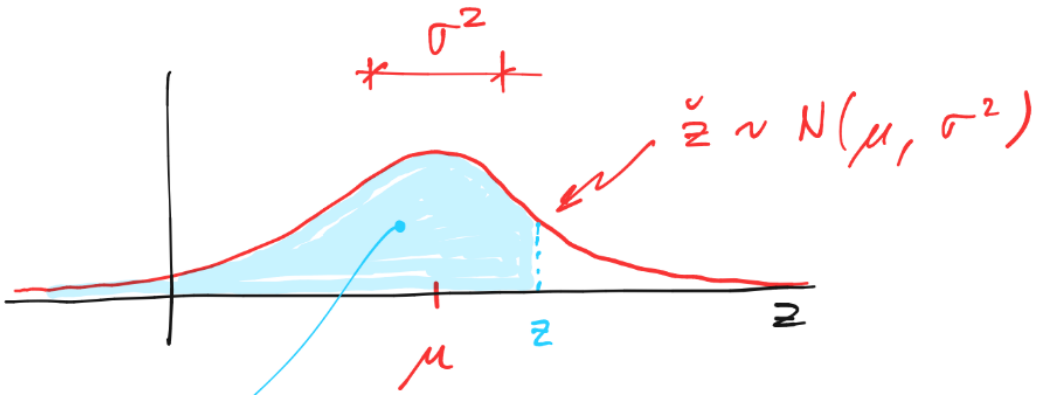
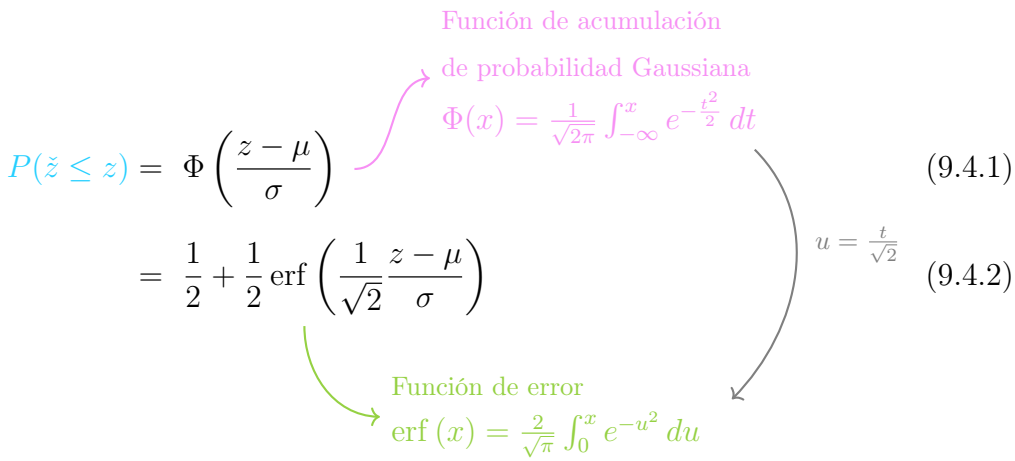


Figura 9.4.1: Función de probabilidad de $\check{z}$.



DEF:

$$\operatorname{erfc}(x) \triangleq 1 - \operatorname{erf}(x) \tag{9.4.3}$$

$$\implies 1 - \Phi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{9.4.4}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{9.4.5}$$

PROPIEDADES:

1. $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

2. $\operatorname{erf}(0) = 0$

3. $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$
   $\implies \operatorname{erf}(-\infty) = -1$

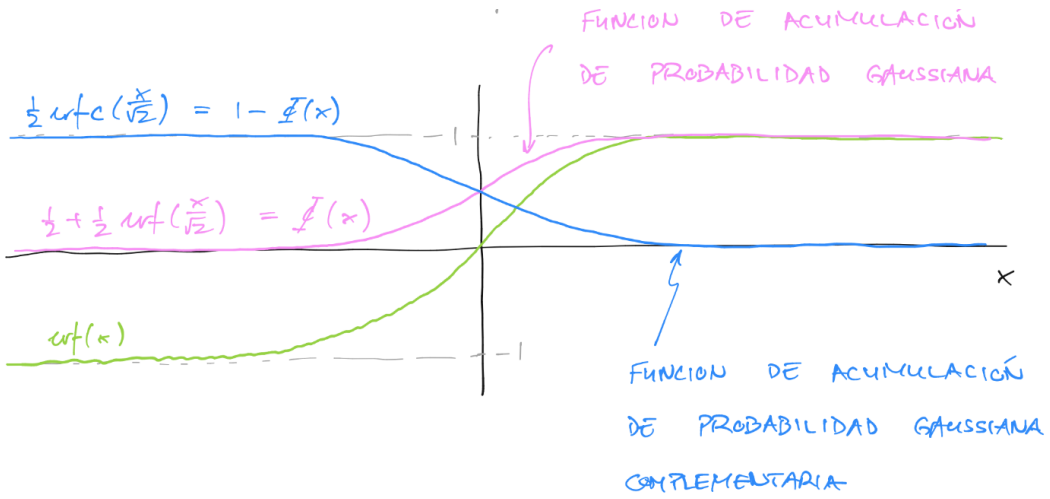


Figura 9.4.2: Funciones de acumulación de probabilidad de error $\mathrm{erf}\,(x)$, gaussiana $\Phi(x)$ y gaussiana complementaria $1 - \Phi(x)$.

4. Dado que:

$$\begin{aligned} \mathrm{erf}\,(x) &< 0, \quad x < 0 \\ \mathrm{erfc}\,(x) &> 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

y que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\,(0) = \frac{1}{2}$$

resulta que:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du = \mathrm{erf}\,(x)$$

   * resta de $\frac{1}{2}$ si $x < 0$.
   * suma a $\frac{1}{2}$ si $x > 0$.

Ello permite calcular $\Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$ numéricamente como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$ de forma eficiente y precisa, ya que la integral de $\mathrm{erf}(\cdot)$ tiene límites de integración finitos, mientras que la de $\Phi(\cdot)$ no.

Relación entre $\operatorname{erf}(x)$ y $\Phi(x)$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{erf}(x)=\Phi(\sqrt{2}x)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2}x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-u^2}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2}x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$u=\frac{t}{\sqrt{2}} \implies t=\sqrt{2}x \Leftrightarrow u=x$$

$$\implies dt=\sqrt{2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-u^2}\,du$$

Cápsula 9.5 Probabilidad de error de bit

$$P_b=\underbrace{\frac{1}{2}P(D1\mid 0)}_{\text{iguales}}+\underbrace{\frac{1}{2}P(D0\mid 1)}_{\text{iguales}} \tag{9.5.1}$$

$$=P(D0\mid 1) \tag{9.5.2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{0-\sqrt{E_b}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \tag{9.5.3}$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)} \tag{9.5.4}$$

Probabilidad de error de bit de NRZ (mod. antipodal).

Cápsula 9.6 Observaciones a la probabilidad de error de bit de NRZ

1. $\frac{E_b}{N_0}$ es la RAZÓN SEÑAL A RUIDO POR BIT de la modulación. Es una medida fundamental en la evaluación del desempeño de sistemas de comunicaciones digitales.

   $\Longrightarrow P_b\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

2. $\frac{E_b}{N_0} \geq 0 \Longrightarrow$ Se desprende que la curva de $P_b\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ tiene el siguiente aspecto:

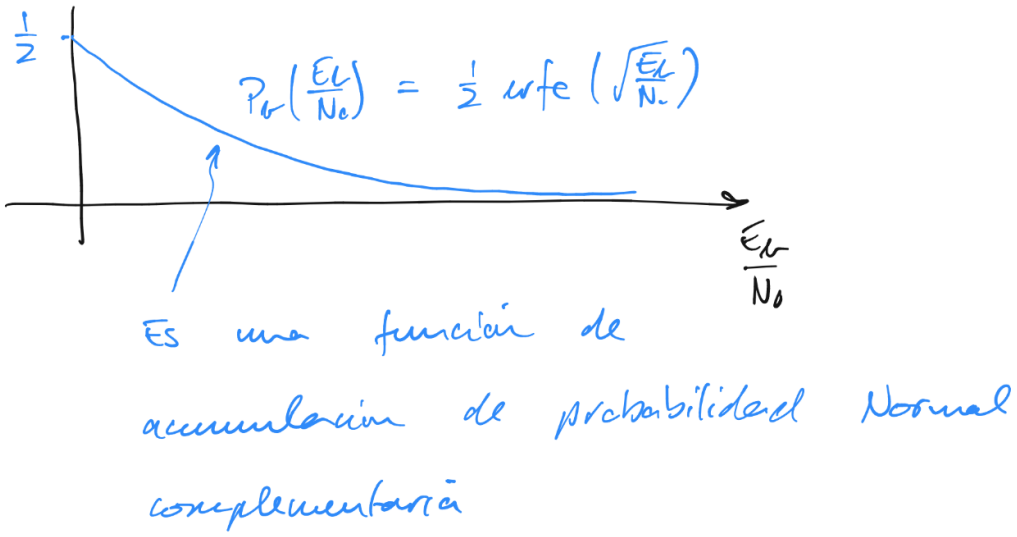


Figura 9.6.1: Curva de probabilidad de error de bit P_b.

3. Si $\frac{E_b}{N_0} = 0 \Longrightarrow P_b = \frac{1}{2}$. Esto tiene sentido intuitivo: Si la SNR es cero, entonces el desempeño del receptor óptimo es igual que "tirar una moneda".

4. $\frac{E_b}{N_0} \uparrow \Longrightarrow P_b \downarrow$

5. Las P_b de interés práctico son:

$$P_b < \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

   Rango típico $\in [10^{-6}, 10^{-8}] < P_b < 10^{-3}$.

   Caso extremo: discos magnéticos ("read channel" $\Longrightarrow$ no es AWGN).

$$1 \quad \text{TB} = 8 \quad \text{Tbits} = 8 \cdot 10^{12} \quad \text{bits}$$
$$\approx 10^{13} \quad \text{bits}$$

   $\Longrightarrow$ Es deseable $P_b \ll 10^{-13} \Longrightarrow 10^{-15}$.

   Caso común: archivo de 1 Mbit = 125 kB adjunto a un correo electrónico.

   $\Longrightarrow$ Es deseable $P_b < 10^{-6}$.

© 2010–2025 Christian Oberli

6. Debido a los rangos típicos anteriores, resulta preferible graficar $P_b\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ en:

   - Escala logarítmica para P_b.
   - $\frac{E_b}{N_0}$ en decibeles $\implies 10\log_{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$

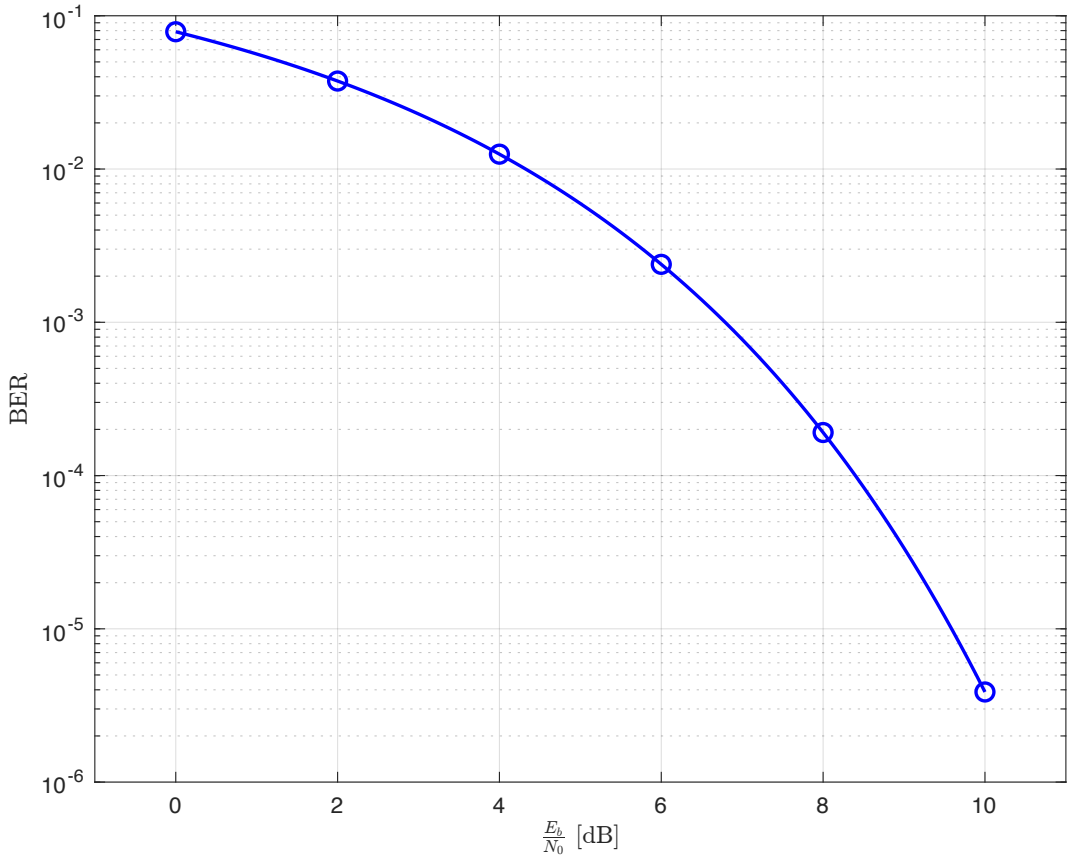


Figura 9.6.2: Curva de probabilidad de error de bit P_b para NRZ en dB.

7. $P_b = p_0 P(D1 \mid 0) + p_1 P(D0 \mid 1)$ es válido en general para cualquier p_0 y p_1. Sin embargo, $P(D1 \mid 0) = P(D0 \mid 1)$ en general solo se cumple para $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.