Módulo 13 **Modulación binaria de pasabanda**

Cápsula 13.1 BPSK: binary phase-shift keying

$$s_0(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T} \right) \cos\left(2\pi f_c t\right) \tag{13.1.1}$$

Condición: $f_c >> \frac{1}{T}$

$$s_1(t) = -s_0(t) \tag{13.1.2}$$

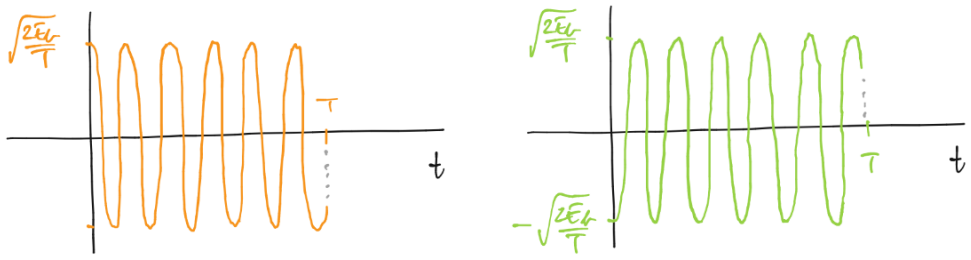


Figura 13.1.1: Modulación BPSK, $s_0(t)$ en naranjo y $s_1(t)$ en verde.

Vemos que:

$$s_0(t) = \underbrace{\underbrace{\sqrt{E_b}}_{\check{s}_0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T} \right)}_{\text{Pulso base } \varphi(t)}}_{\tilde{s}_0(t) \text{ (Componente en fase)}} \underbrace{\sqrt{2} \cos\left(2\pi f_c t\right)}_{\text{Portadora}} \tag{13.1.3}$$

Por inspección reconocemos la envolvente compleja $\hat{s}_0(t)$ mediante la forma canónica. En este caso, $\check{s}_0(t) \in \mathbb{R}$ ya que $s_0(t)$ solo tiene la componente en fase. Esto es una particularidad de BPSK.

Nota:

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t)|^2\, dt = |\check{s}_0|^2 \quad = E_b \tag{13.1.4}$$

BPSK

El espectro de $s_0(t)$ es de pasabanda:

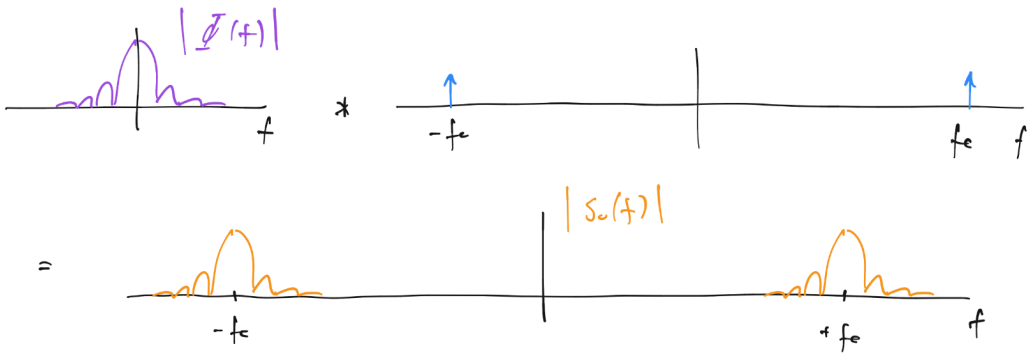


Figura 13.1.2: Espectro de $s_0(t)$.

Cápsula 13.2 — Receptor optimo para BPSK

BPSK no viola ninguna condición establecida para el receptor óptimo de dos ramas. De igual forma, también la simplificación del receptor continúa siendo válida.

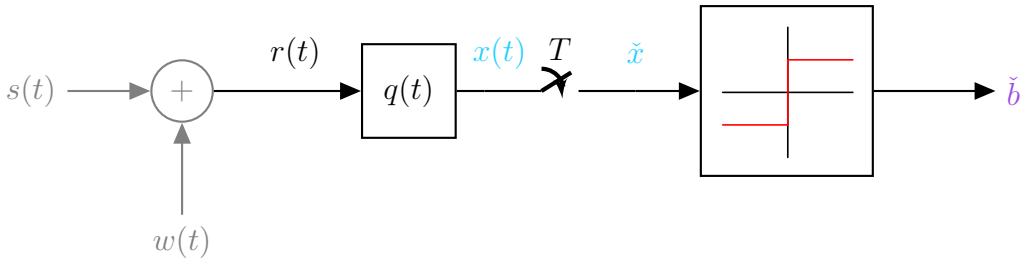


Figura 13.2.1: Receptor óptimo simplificado.

Por ello, el F.A. (normalizado) sigue siendo:

$$q(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{E_0}}\, s_0(T-t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{E_b}}\, s_1(T-t) = \quad \varphi(T-t) \qquad (13.2.1)$$

$\downarrow$ BPSK

Dado que $q(t)$ tiene el mismo espectro de magnitud que $s_0(t)$, notamos que $q(t)$ es también una señal de pasabanda.

Que $q(t)$ sea de pasabanda tiene dos implicancias importantes:

(a) Contiene implícitamente a f_c.

$\implies$ Su implementación no es independiente de la frecuencia portadora.

$\implies$ Costoso e impráctico.

(b) Impráctico de implementar digitalmente.

$\implies$ Frecuencia de muestreo tendría que ser en el orden de $2f_c$.

¿De qué forma podemos aprovechar la representación equivalente de banda base para simplificar o evitar los inconvenientes anteriores?

Cápsula 13.3 **Receptor optimo equivalente de banda base**

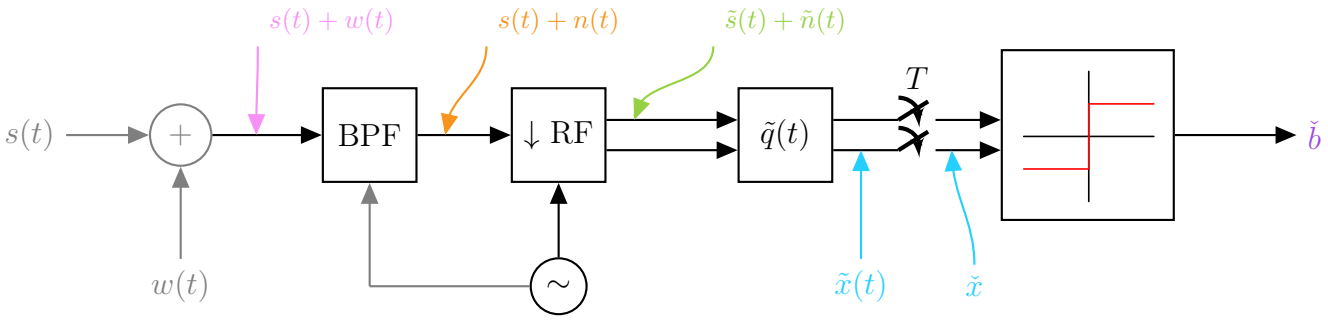


Figura 13.3.1: Diagrama de bloques receptor óptimo equivalente de banda base.

Asumiendo BPF ideal con ancho de banda mayor que $s(t)$, $n(t)$ es ruido blanco de pasabanda. Entonces, se puede aplicar F.A. equivalentemente en banda base a la señal $\tilde{s}(t) + \tilde{n}(t)$.

Gráficamente, representamos por ello el receptor óptimo como sigue:

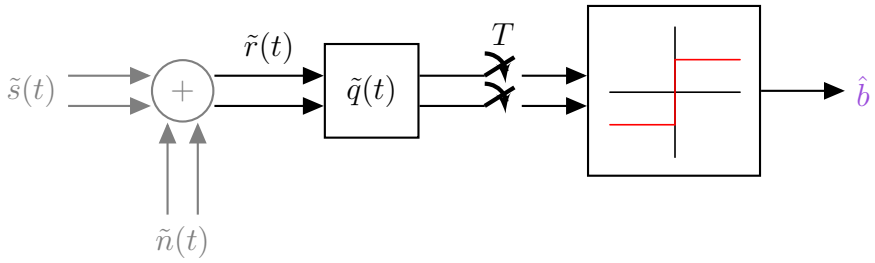


Figura 13.3.2: Diagrama simplificado del receptor óptimo de equivalente de banda base.

Donde

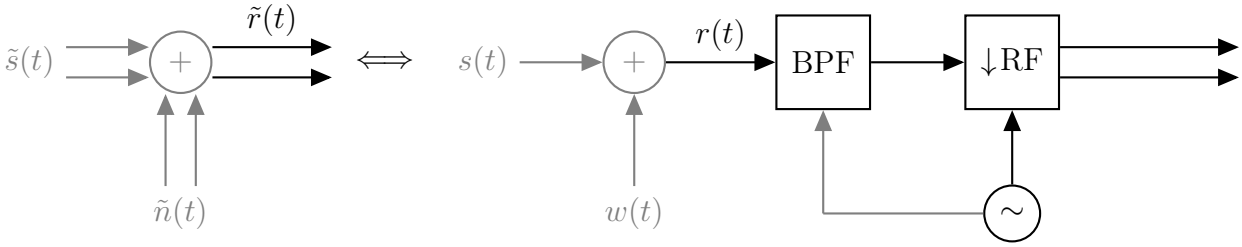


Figura 13.3.3: Equivalencia entre la representación de banda base y pasabanda.

Cápsula 13.4 Filtro adaptado equivalente de banda base

Hasta ahora, las señales siempre han sido reales y el F.A. (normalizado) ha sido:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{E_0}} s_0(T - t) \quad \text{(Rx óptimo simplificado)}$$

Pero, en general, si una señal es compleja, entonces la forma correcta del F.A.N. es:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{E_0}} s_0^*(T-t) \tag{13.4.1}$$

($s_0^*(T-t) \in \mathbb{C}$)

PB: $$q(t) = \frac{1}{\sqrt{E_0}} s_0^*(T-t) \tag{13.4.2}$$

(conj. es irrelevante, porque $s_0(t) \in \mathbb{R}$ (pero siempre ha estado presente implícitamente); $s_0^*(T-t) \in \mathbb{R}$)

Equivalente en banda base:

EBB: $$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{E_0}} \tilde{s}_0^*(T-t) \tag{13.4.3}$$

(conj. si importa porque $\tilde{s}_0(t) \in \mathbb{C}$; $\tilde{s}_0^*(T-t) \in \mathbb{C}$)

(conj. no importa porque $\varphi(t) \in \mathbb{R}$)

$$= \varphi^*(T-t) \tag{13.4.4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right) \tag{13.4.5}$$

Notamos que $\tilde{q}(t)$ no contiene a f_c, ejemplificado en BPSK, pero válido en general.

$\Longrightarrow$ Su implementación es única, sin consideración por el canal de pasabanda (f_c) que utilice la transmisión.

Más aún, $\tilde{q}(t)$ ahora es una señal de banda base.

$\Longrightarrow$ Su implementación digital es viable. Frecuencia de muestreo $\geq \frac{2}{T}$

$\Longrightarrow$ Receptor fraccionado.

La frec. portadora (f_c), y la señal portadora en general, están completamente contenidas en el conversor $\downarrow$ RF.

Cápsula 13.5 Variables aleatorias gaussianas complejas

Definamos una variable aleatoria compleja

$$z = x + jy \tag{13.5.1}$$

con

$$x, y \sim N(0, \sigma^2) \quad \in \mathbb{R} \tag{13.5.2}$$

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{13.5.3}$$

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{13.5.4}$$

y con:

$$\mathrm{Cov}\{x, y\} = \mathbb{E}\{xy\} = 0 \tag{13.5.5}$$

$$\tag{13.5.6}$$

$\Leftrightarrow$ x e y son independientes.

z así definida es una VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA COMPLEJA CIRCULARMENTE SIMÉTRICA. Es un caso especial de una v.a. gaussiana compleja.

La funcion de densidad de probabilidad de z esta dada por:

$$P_z(z) = \frac{1}{\pi\sigma_z^2} \exp\left\{-\frac{zz^*}{\sigma_z^2}\right\} \tag{13.5.7}$$

con

$$\sigma_z^2 = \mathrm{Var}\{z\} = \mathbb{E}\{zz^*\} \tag{13.5.8}$$

$$= \mathbb{E}\{(x + jy)(x - jy)\} \tag{13.5.9}$$

$$= \mathbb{E}\{x^2\} + \mathbb{E}\{y^2\} \tag{13.5.10}$$

$$= 2\sigma^2 \tag{13.5.11}$$

Notando que:

$$\mathbb{E}\{z\} = \mathbb{E}\{x + jy\} \tag{13.5.12}$$

$$= \mathbb{E}\{x\} + j\mathbb{E}\{y\} \tag{13.5.13}$$

$$= 0 \tag{13.5.14}$$

Entonces:

$$p_z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x+jy)(x-jy)}{2\sigma^2}\right\} \tag{13.5.15}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{13.5.16}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{13.5.17}$$

$$= p_x(x) \cdot p_y(y) \tag{13.5.18}$$

Como era de esperarse por ser x e y independientes. La función de densidad de probabilidad de z es a la vez la f.d.p. bivariada de x e y.

Notamos que $p_z(z)$ solo depende de $|z|^2$.

$\implies$ $p_z(z)$ tiene simetría circular.

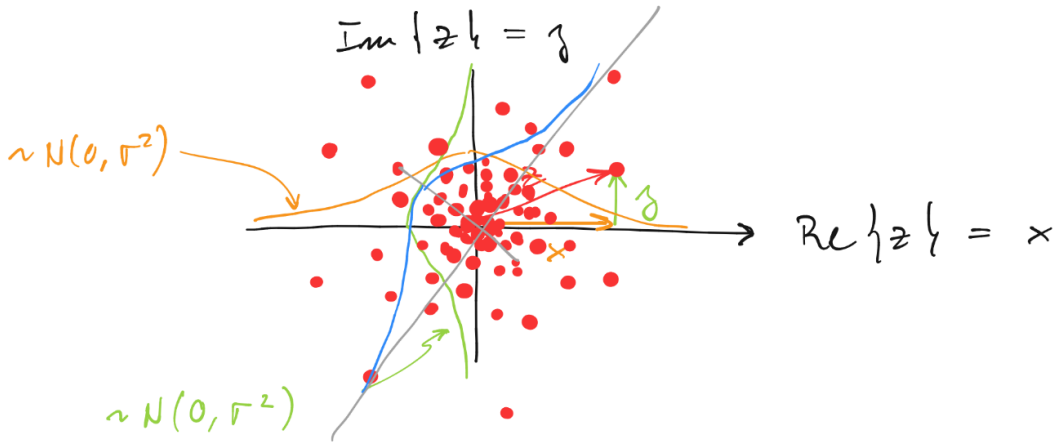


Figura 13.5.1: Función de densidad de z en el plano complejo.

Cápsula 13.6	**Analisis de la variable de decision**

$$\check{x} = [\tilde{s}(t) + \tilde{n}(t)] * \tilde{q}(t)\Big|_{t=T} \tag{13.6.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\tau)\tilde{q}(t-\tau)\,d\tau\Big|_{t=T} + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(\tau)\tilde{q}(t-\tau)\,d\tau\Big|_{t=T} \tag{13.6.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \check{s}_i\varphi(\tau)\varphi^*(T-t+\tau)\,d\tau\Big|_{t=T} + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(\tau)\varphi^*(T-t+\tau)\,d\tau\Big|_{t=T} \tag{13.6.3}$$

$$= \check{s}_i \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau \tag{13.6.4}$$

$$= \check{s}_i + \check{n} \tag{13.6.5}$$

$$\check{n} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau \tag{13.6.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n_I(\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n_Q(\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau \tag{13.6.7}$$

Se puede mostrar que (propuesto):

(a) $\mathbb{E}\{n_x\} = \mathbb{E}\{n_y\} = 0$

(b) $\mathrm{Var}\{n_x\} = \mathrm{Var}\{n_y\} = \frac{N_0}{2}$

(c) $\mathrm{Cov}\{n_x, n_y\} = 0$

Por lo anterior, $\check{n}$ es una VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA COMPLEJA CIRCULARMENTE SIMÉTRICA. $\sim N_c(0, N_0)$.

Ello implica:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{\check{n}\} = 0 \\ \mathrm{Var}\{\check{n}\} = N_0 \end{cases}$$

Dado que $\check{x} = \check{s}_i + \check{n}$, podemos graficar el diagrama de señales de BPSK bajo ruido como sigue:

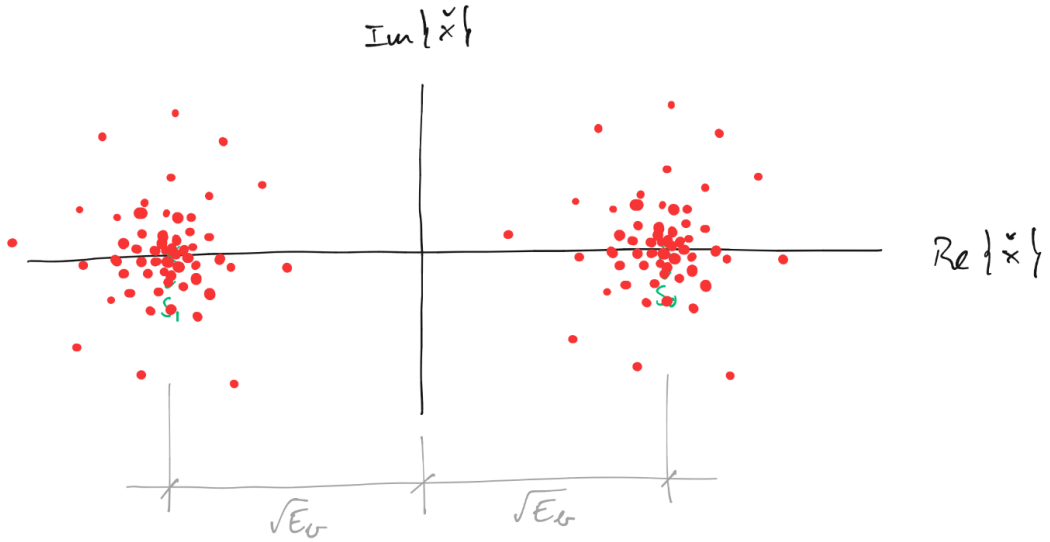


Figura 13.6.1: Diagrama de señal con ruido AWGN para BPSK.

Cápsula 13.7 — Probabilidad de error de bit de BPSK

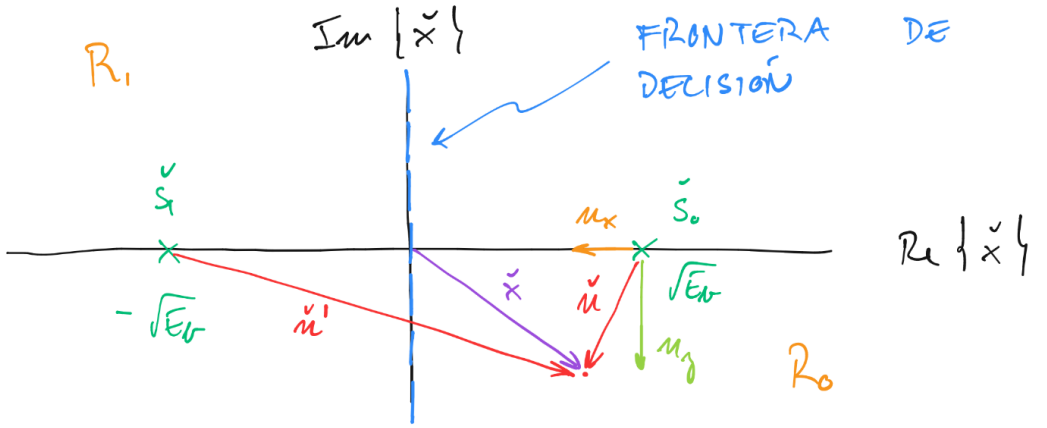


Figura 13.7.1: Diagrama de señal de BPSK y frontera de decisión.

¿Dado un $\check{x}$ observado, cuál es el símbolo más probable de haber sido transmitido?

$\Longrightarrow$ Aquel con la menor magnitud de ruido $|\check{n}|$, ya que $\check{n}$ es circularmente simétrica ("sombrero mexicano").

$\Longrightarrow$ Valores pequeños son más probables.

Si $\check{x}$ es más cercano a $\check{s}_0$, entonces es más probable que $\check{s}_0$ haya sido transmitido.

La FRONTERA DE DECISIÓN divide al plano complejo en todos los puntos más cercanos a $\check{s}_0$ y $\check{s}_1$, respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad que $\check{x}$ esté en la REGIÓN DE DECISIÓN opuesta a la transmitida?

Ninguna realización del ruido en cuadratura n_y es capaz de llevar a $\check{x}$ a la región de decisión incorrecta.

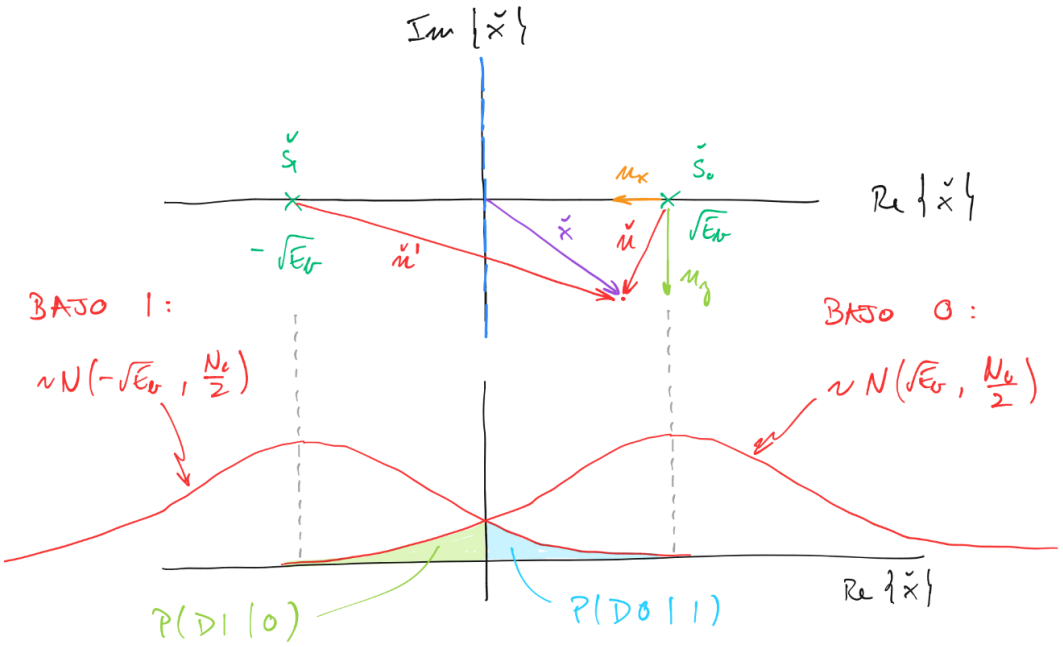


Figura 13.7.2: Diagrama de señal de BPSK y función de densidad de probabilidad de n_x.

$$P(D1|0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{0-\sqrt{E_b}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \tag{13.7.1}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{13.7.2}$$

$$= P(D0|1) \tag{13.7.3}$$

$$= P_b^{\text{BPSK}} \tag{13.7.4}$$

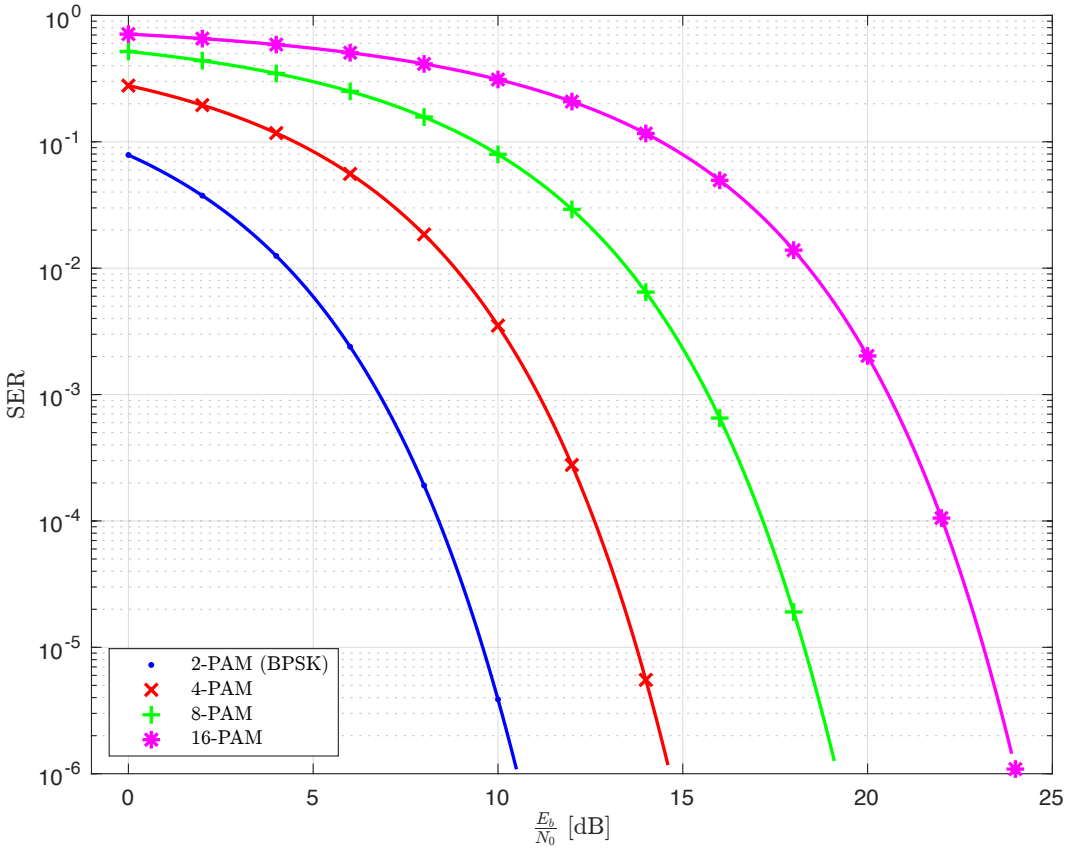


Figura 13.7.3: Probabilidad de error de símbolo para modulaciones M-PAM bajo AWGN.