Módulo 14 — **Modulación M-aria de pasabanda**

Cápsula 14.1 — **QPSK : Quadrature Phase-Shift Keying**

$$s_i(t) = (-1)^{b_I}\sqrt{\frac{E_s}{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)\cos(2\pi f_c t) - (-1)^{b_Q}\sqrt{\frac{E_s}{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)\operatorname{sen}(2\pi f_c t) \quad (14.1.1)$$

$i \in [0,1,2,3]$

$\Rightarrow$ QPSK es una modulación 4-aria. Tiene energía E_s por símbolo.

$$\text{Mensaje: } b_n = \{\underset{\uparrow\uparrow\; b_I\,b_Q}{\overset{s_3(t)}{1,\,0}}\,,\ \underset{\uparrow\uparrow\; b_I\,b_Q}{\overset{s_1(t)}{1,\,1}}\,,\ \underset{\uparrow\uparrow\; b_I\,b_Q}{\overset{s_0(t)}{0,\,1}}\,,\ \underset{\uparrow\uparrow\; b_I\,b_Q}{\overset{s_2(t)}{0,\,0}}\}$$

Reescribiendo la señal QPSK levemente y destacando los términos en colores:

$$\begin{aligned} s_i(t) = &\sqrt{E_s}\frac{(-1)^{b_I}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t) \\ &- \sqrt{E_s}\frac{(-1)^{b_Q}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)\sqrt{2}\operatorname{sen}(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (14.1.2)$$

Por otro lado:

$$\sqrt{2}\cos\left(2\pi f_c t + \theta\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta\right)\cos\left(2\pi f_c t\right) - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\theta\right)\mathrm{sen}\left(2\pi f_c t\right) \tag{14.1.3}$$

Vemos que QPSK puede ser escrito equivalentemente como:

$$\begin{aligned} s_i(t) = &\sqrt{E_s}\cos\left(\theta\right)\frac{1}{\sqrt{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)\sqrt{2}\cos\left(2\pi f_c t\right) \\ &- \sqrt{E_s}\,\mathrm{sen}\left(\theta\right)\frac{1}{\sqrt{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(2\pi f_c t\right) \end{aligned} \tag{14.1.4}$$

Con $\theta = \{45°, 135°, 225°, 315°\}$
$\qquad\qquad\quad 00 \quad 10 \quad 11 \quad 01$

$$= \sqrt{E_s}\left[\sqrt{2}\cos\left(2\pi f_c t + \theta\right)\right]\frac{1}{\sqrt{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right) \tag{14.1.5}$$

$\Rightarrow$ La portadora de QPSK puede tomar 4 fases distintas según los 4 símbolos posibles.

Cápsula 14.2 Envolvente compleja y diagrama de señales de QPSK

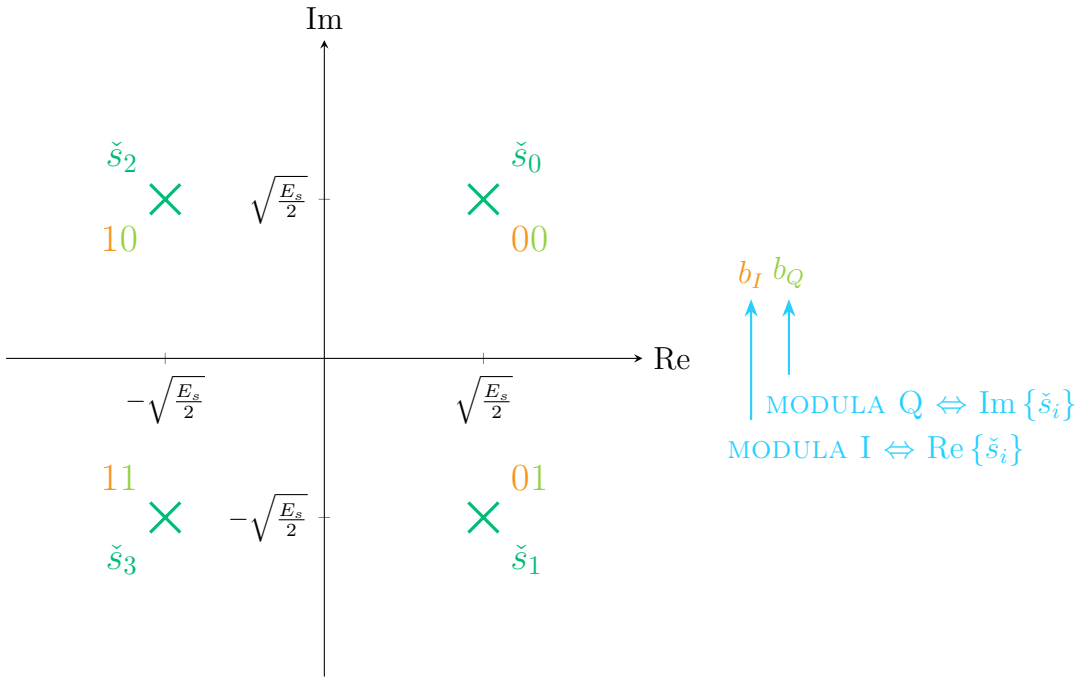
A partir de la forma canónica podemos ver directamente de (14.1.2):

$$\tilde{s}_i(t) = \underbrace{\sqrt{E_s}\left[\frac{(-1)^{b_I}}{\sqrt{2}} + \mathrm{j}\frac{(-1)^{b_Q}}{\sqrt{2}}\right]}_{\tilde{s}_i}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}}\sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)}_{\varphi(t)} \tag{14.2.1}$$

$$= \sqrt{E_s}e^{\mathrm{j}\theta_i}\,\varphi(t) \tag{14.2.2}$$

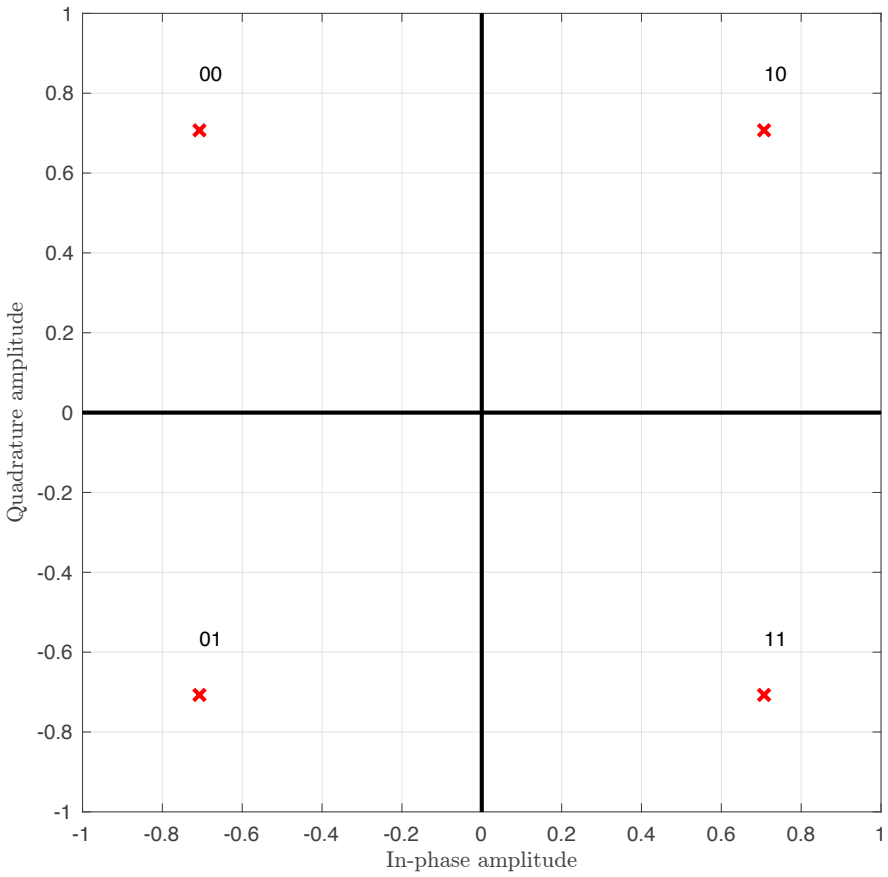
$\theta_i = \{45°, 135°, 225°, 315°\}$
$\quad\;\; 00 \quad 10 \quad 11 \quad 01$

Visualización en el diagrama de señales:

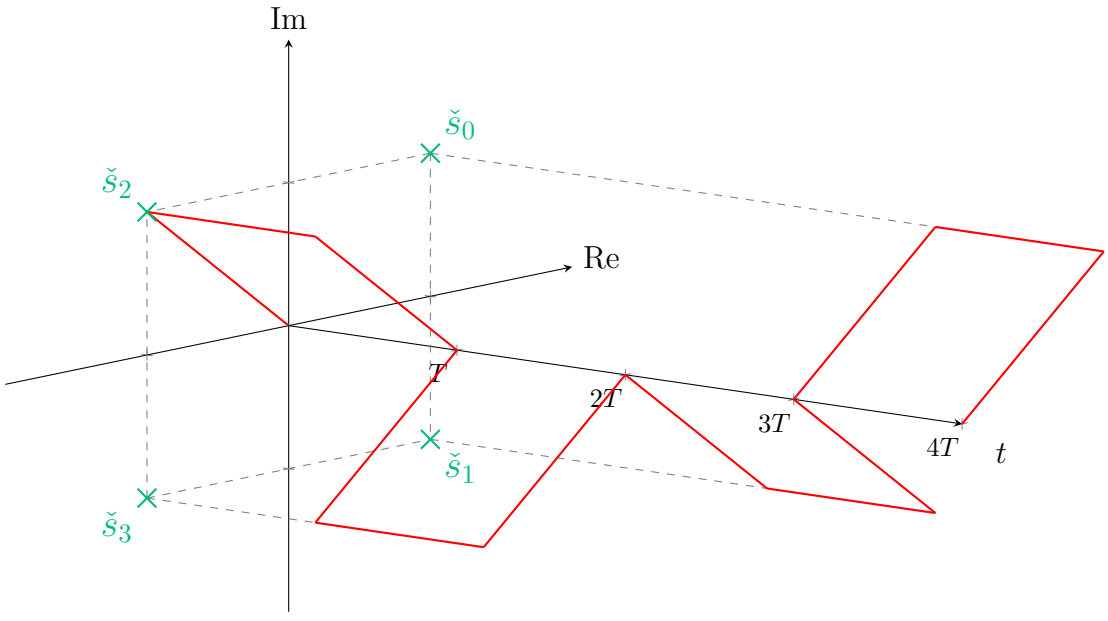


$$\tilde{s}_0 = \sqrt{\frac{E_s}{2}}\,(1+\mathrm{j}) \qquad \tilde{s}_1 = \sqrt{\frac{E_s}{2}}\,(1-\mathrm{j}) = -\mathrm{j}\tilde{s}_0$$

$$\tilde{s}_2 = \sqrt{\frac{E_s}{2}}\,(-1+\mathrm{j}) = \mathrm{j}\tilde{s}_0 \qquad \tilde{s}_3 = \sqrt{\frac{E_s}{2}}\,(-1-\mathrm{j}) = -\tilde{s}_0$$



Visualización de $\tilde{s}_i(t)$:



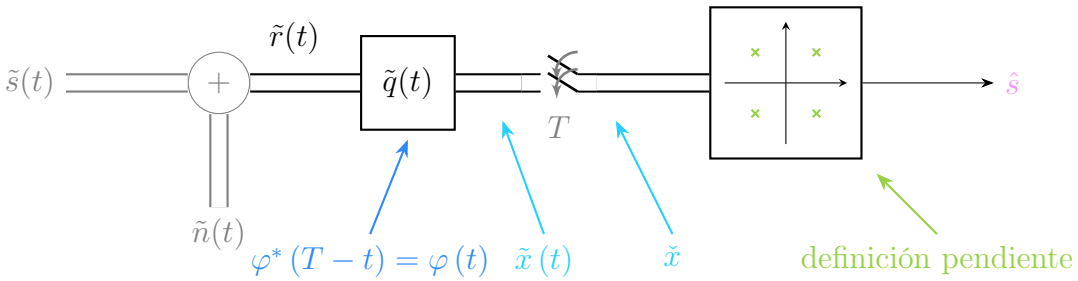
Cápsula 14.3 Receptor óptimo para QPSK y variable de decisión

El receptor óptimo de QPSK es el receptor de M ramas visto en modulación M-aria de banda base.

$\Rightarrow$ Cada una de las 4 señales QPSK (de pasabanda) tiene su propio F.A.

Al igual que con BPSK, y por los mismos motivos, es conveniente implementar los F.A. mediante equivalentes de banda base. Hemos visto que todos los $\tilde{s}_i(t)$ son linealmente dependientes entre si ($\in \mathbb{C}$).

$\Rightarrow$ Basta un único F.A. al pulso base y el análisis de $\check{x}$ es idéntico a BPSK.



$$\check{x} = [\tilde{s}_i(t) + \tilde{n}(t)] * \tilde{q}(t)\Big|_{t=T} \tag{14.3.1}$$

$$= [\tilde{s}_i(t) * \tilde{q}(t) + \tilde{n}(t) * \tilde{q}(t)]\Big|_{t=T} \tag{14.3.2}$$

$$= \int_0^T \check{s}_i \tilde{\varphi}(\tau)\, \tilde{q}(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau\Big|_{t=T} + \int_0^T \tilde{n}(\tau)\, \tilde{q}(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau\Big|_{t=T} \tag{14.3.3}$$

$$= \check{s}_i \int_0^T \tilde{\varphi}(\tau)\, \tilde{\varphi}^*(T-t+\tau)\, \mathrm{d}\tau\Big|_{t=T} + \int_0^T \tilde{n}(\tau)\, \tilde{\varphi}^*(T-t+\tau)\, \mathrm{d}\tau\Big|_{t=T} \tag{14.3.4}$$

$$= \check{s}_i + \int_0^T [n_x(\tau) + \mathrm{j} n_y(\tau)]\, \tilde{\varphi}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{14.3.5}$$

$$= \check{s}_i + \int_0^T n_x(\tau)\, \tilde{\varphi}^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \mathrm{j} \int_0^T n_y(\tau)\, \tilde{\varphi}^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{14.3.6}$$

$$= \check{s}_i + n_x + \mathrm{j} n_y \tag{14.3.7}$$

$$= \check{s}_i + n \tag{14.3.8}$$

$n \sim N_c(0, N_0)$

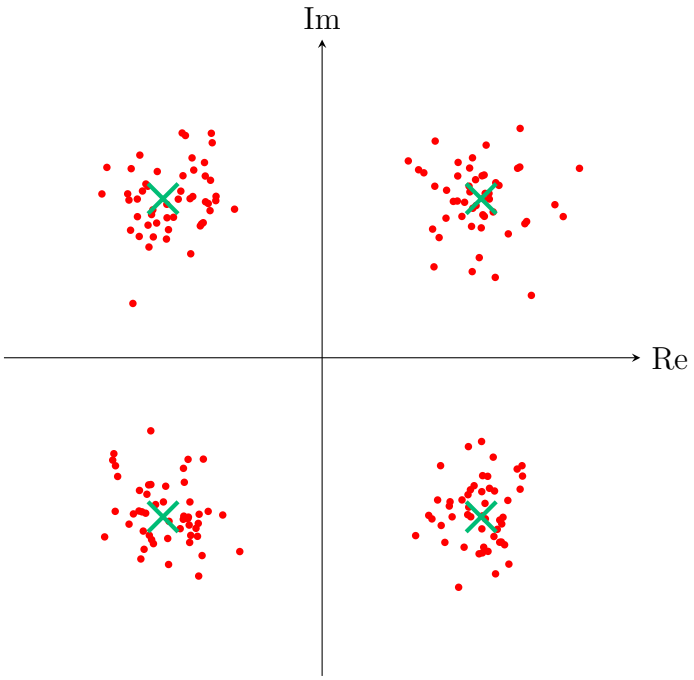
$n_x \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$

$n_y \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$

con n_x y n_y iid.

$i \in [0, 1, 2, 3]$

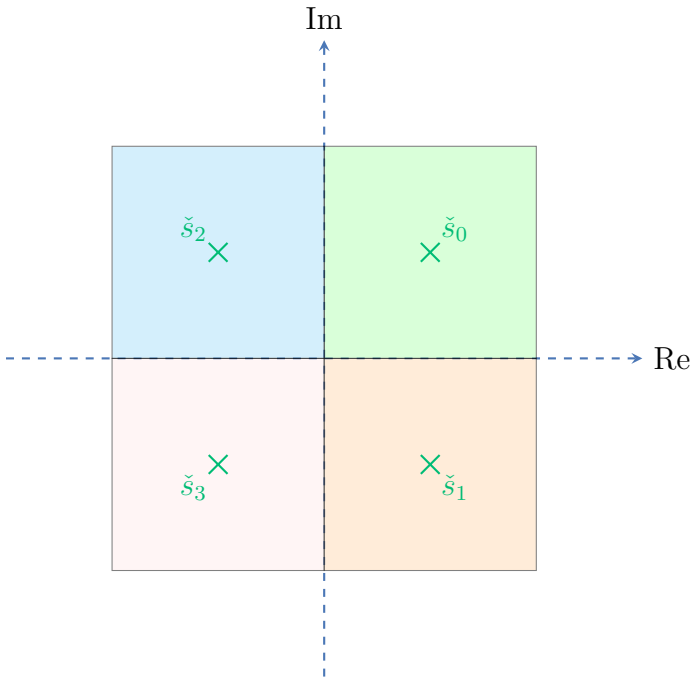
Asi, $\check{x}$ en el espacio de señales:



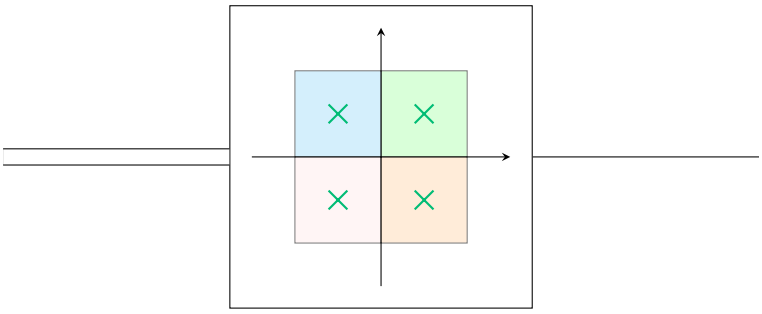
Cápsula 14.4 **Eventos de error y regiones de decisión en QPSK**

1. El ruido $\check{n}$ más probable entre las 4 alternativas es siempre el que corresponde a su realización mas pequeña (mín$\{\|\check{n}\|\}$).

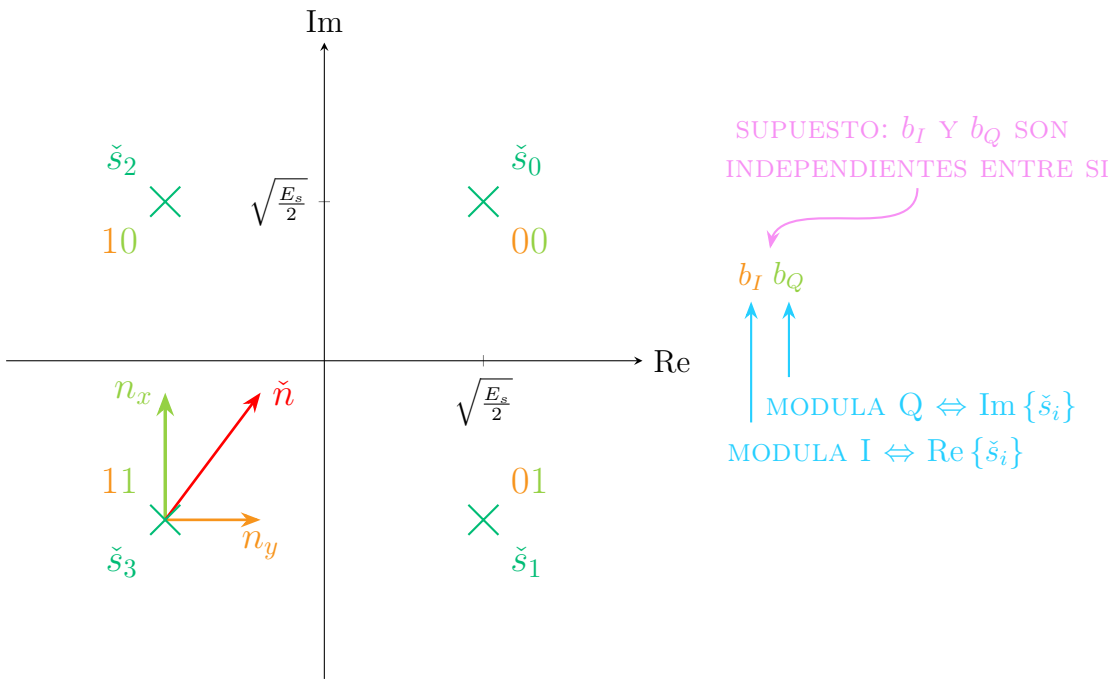
   $\Rightarrow$ Ello determina las REGIONES DE DECISIÓN



DISPOSITIVO DE DECISIÓN DE QPSK



2.



El ruido en fase (n_x) sólo puede generar un error en b_I. A su vez, El ruido en cuadratura (n_y) sólo puede generar un error en b_Q.

$\Rightarrow$ dado que n_x y n_y son estadísticamente independientes, y así también b_I y b_Q, resulta que EVENTOS DE ERROR en b_I (debido a n_x) son ESTADÍSTICAMENTE INDEPENDIENTES de los eventos de error en b_Q (debido a n_y).

La independencia implica que no hay información (correlación estadística) de n_x y b_I en fase que pueda ser usada para tomar una mejor decisión ($\downarrow P_e$) en cuadratura, y vice versa.

3. QPSK es una modulación M-aria.

   $\Rightarrow$ Debemos determinar una P_s.

Cápsula 14.5 — Probabilidad de error de QPSK

De las observaciones anteriores:

$$P_s^{(\text{QPSK})} = 1 - P_c \tag{14.5.1}$$

EVENTOS DE ERROR I/Q SON INDEPENDIENTES. ($\Rightarrow$ VER OBS.)

$$= 1 - P_c^{(\text{I})} P_c^{(\text{Q})} \tag{14.5.2}$$

$$= 1 - \left(1 - P_b^{(\text{I})}\right)\left(1 - P_b^{(\text{Q})}\right) \tag{14.5.3}$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\frac{E_s}{2}}{N_0}}\right)\right]^2 \tag{14.5.4}$$

Recordando que:

$$E_s = 2E_b \tag{14.5.5}$$

$$P_b = \frac{1}{2}P_s \tag{14.5.6}$$

$\log_2 4 = 2$

Obtenemos que la probabilidad de error de bit de QPSK es:

$$\boxed{P_b^{(\text{QPSK})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)\right]^2} \tag{14.5.7}$$

Desarollando el cuadrado de la expresión anterior obtenemos:

$$P_b^{(\text{QPSK})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{erfc}^2\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)\right] \tag{14.5.8}$$

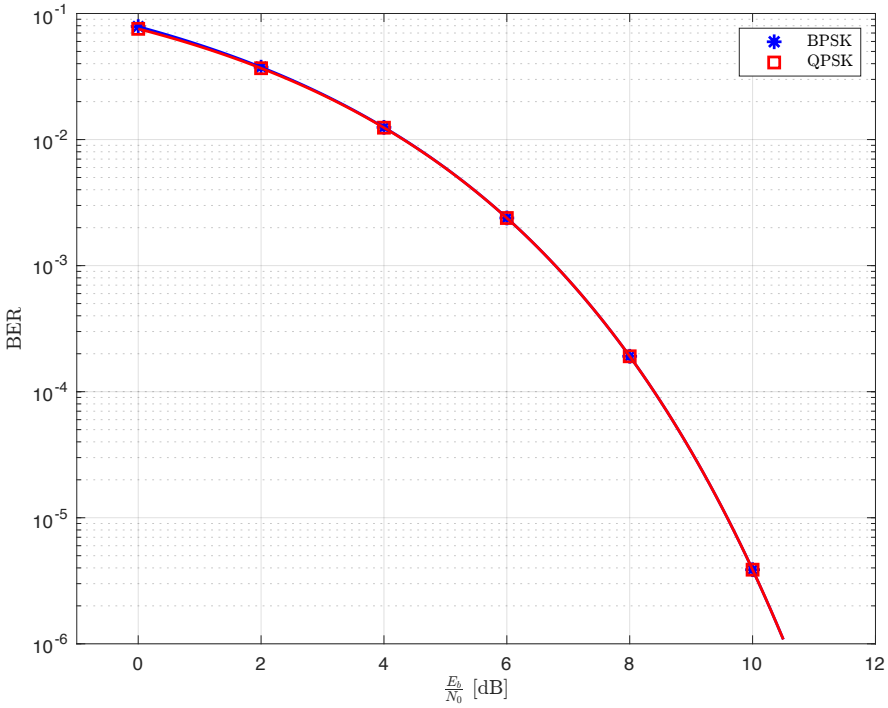
DESPRECIABLE EN LA PRÁCTICA PARA $P_b < 0{,}1$

$$\approx \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{14.5.9}$$

$$= P_b^{(\text{BPSK})} \tag{14.5.10}$$

El desempeño de QPSK es igual al de BPSK pero la tasa de bits de QPSK es el doble!

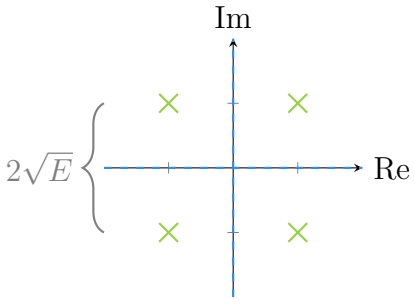
$\Leftrightarrow \uparrow \eta_w$ (en un factor 2!)



Cápsula 14.6 Análisis comparativo de variantes de QPSK

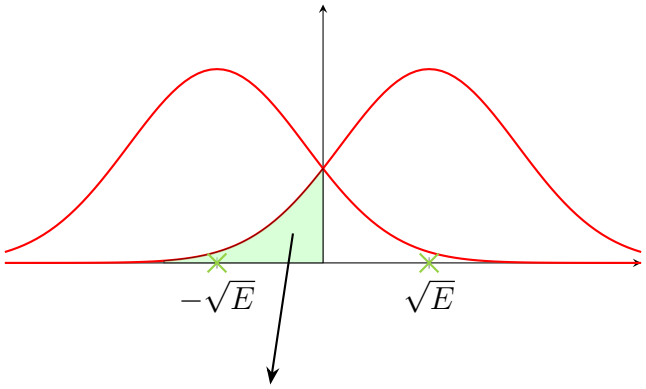
Analizaremos tres casos:

- Caso A:



$$P_s = 1 - (1 - P_b)^2 \tag{14.6.1}$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)\right]^2 \tag{14.6.2}$$



$$P\left(D1|0\right) = P_b \tag{14.6.3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{0-\sqrt{E}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \tag{14.6.4}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \tag{14.6.5}$$

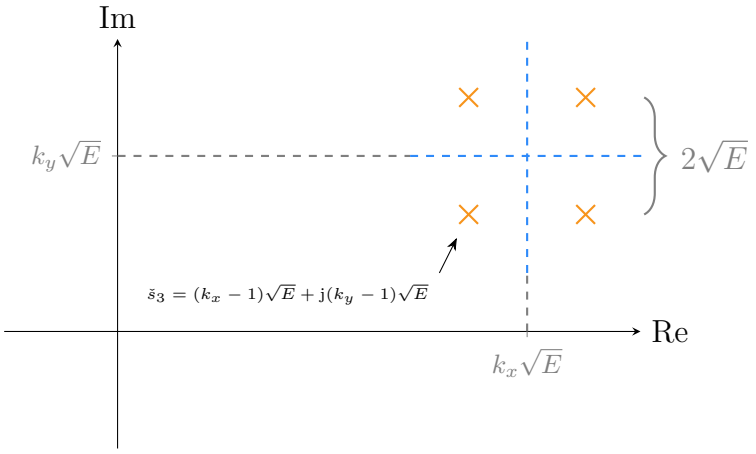
Aplicado específicamente al caso A:

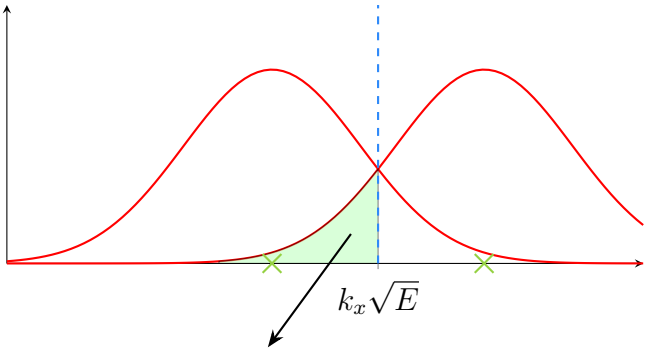
$$E_s^{(\mathrm{A})} = \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{E}\right)^2 + \left(\sqrt{E}\right)^2\right] 4 \tag{14.6.6}$$

$$= 2E = 2E_b \tag{14.6.7}$$

$$\Rightarrow E_s^{(\mathrm{A})} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)\right]^2 \tag{14.6.8}$$

- Caso B:





$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

En cuadratura vale los mismo.

Entonces:

$$\Rightarrow P_s^{(\mathrm{B})} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)\right]^2 \tag{14.6.9}$$

En este caso B:

$$\begin{aligned} E_s^{(\mathrm{B})} = \frac{1}{4}\Big\{ & \left[(k_x-1)\sqrt{E}\right]^2 + \left[(k_y-1)\sqrt{E}\right]^2 \\ & + \left[(k_x+1)\sqrt{E}\right]^2 + \left[(k_y-1)\sqrt{E}\right]^2 \\ & + \left[(k_x+1)\sqrt{E}\right]^2 + \left[(k_y+1)\sqrt{E}\right]^2 \\ & + \left[(k_x-1)\sqrt{E}\right]^2 + \left[(k_y+1)\sqrt{E}\right]^2 \Big\} \end{aligned} \tag{14.6.10}$$

CHEQUEO DE SANIDAD: $k_x = k_y = 0 \Leftrightarrow$ CASO A $\Rightarrow E_s^{(\mathrm{B})} = 2E$

$$= \left(k_x^2 + k_y^2 + 2\right) E = 2E_b \tag{14.6.11}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2E_b}{k_x^2 + k_y^2 + 2} \tag{14.6.12}$$

Resulta entonces:

$$\Rightarrow E_s^{(\mathrm{B})} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\underbrace{\left(k_x^2 + k_y^2\right)}_{>0 \text{ SIEMPRE!}} + 2)\, N_0}}\right)\right]^2 \tag{14.6.13}$$

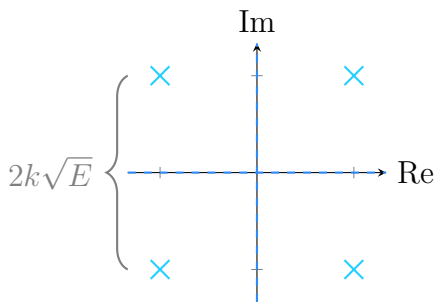
$\Rightarrow k_x^2 + k_y^2 > 0$, lo que implica que siempre castiga la SNR hacia la baja $\Rightarrow P_s^{(\mathrm{B})} \geq P_s^{(\mathrm{A})}$.

$\Rightarrow$ El mejor caso es $k_x = k_y = 0$, lo que implica que que:

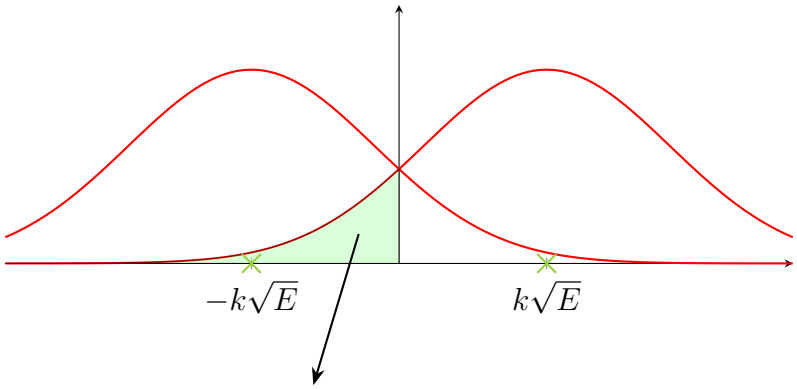
$$P_s^{(\mathrm{A})} = \max_{k_x k_y}\left\{P_s^{(\mathrm{B})}\right\} \tag{14.6.14}$$

El caso A logra una P_s dada con el mínimo gasto energético por bit posible.

- Caso C:



Es similar al caso A pero con $\sqrt{E} := k\sqrt{E}$.



$$P\left(D1|0\right) = P_b \tag{14.6.15}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{0 - k\sqrt{E}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \tag{14.6.16}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{k^2 E}{N_0}}\right) \tag{14.6.17}$$

APARENTE BENEFICIA LA SNR

$$\Rightarrow P_s^{(\mathrm{C})} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{k^2 E}{N_0}}\right)\right]^2 \tag{14.6.18}$$

Pero:

$$E_s^{(\mathrm{C})} = \frac{1}{4}\left[\left(k\sqrt{E}\right)^2 + \left(k\sqrt{E}\right)^2\right] 4 \tag{14.6.19}$$

$$= 2k^2E = 2E_b \tag{14.6.20}$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_b}{k^2} \tag{14.6.21}$$

$$\Rightarrow P_s^{(\mathrm{C})} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)\right]^2 \tag{14.6.22}$$

$$= P_s^{(\mathrm{A})} \tag{14.6.23}$$

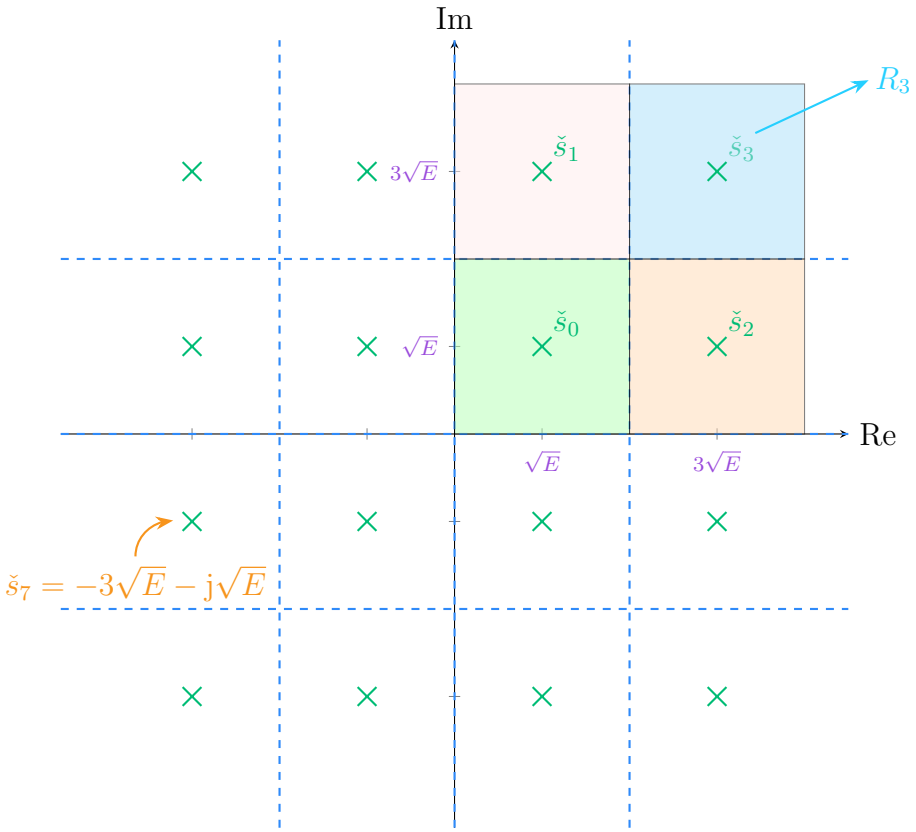
¿Por qué ocurre esto?

$\Rightarrow$ El factor k no cambió la geometría de la modulación, por lo que su desempeño vs. SNR $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ no cambia. k solo redefinió el significado de E vs. E_b.

Cápsula 14.7 M-QAM (M-ary Quadrature Amplitud Modulation

4-QAM $\Leftrightarrow$ QPSK

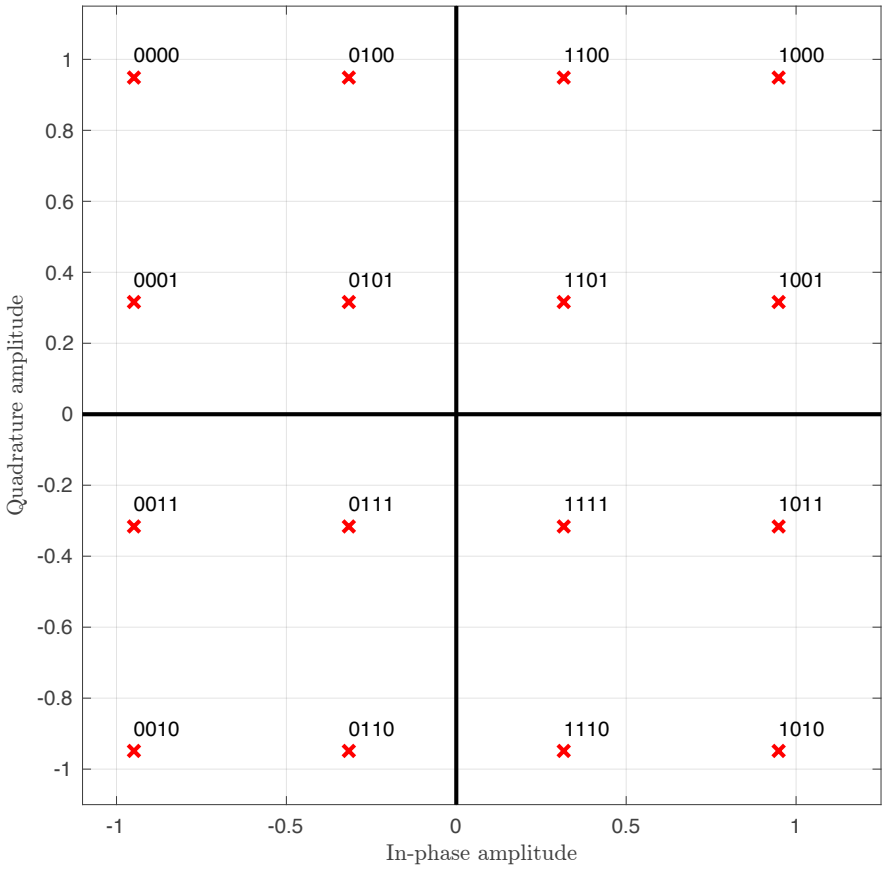
16-QAM

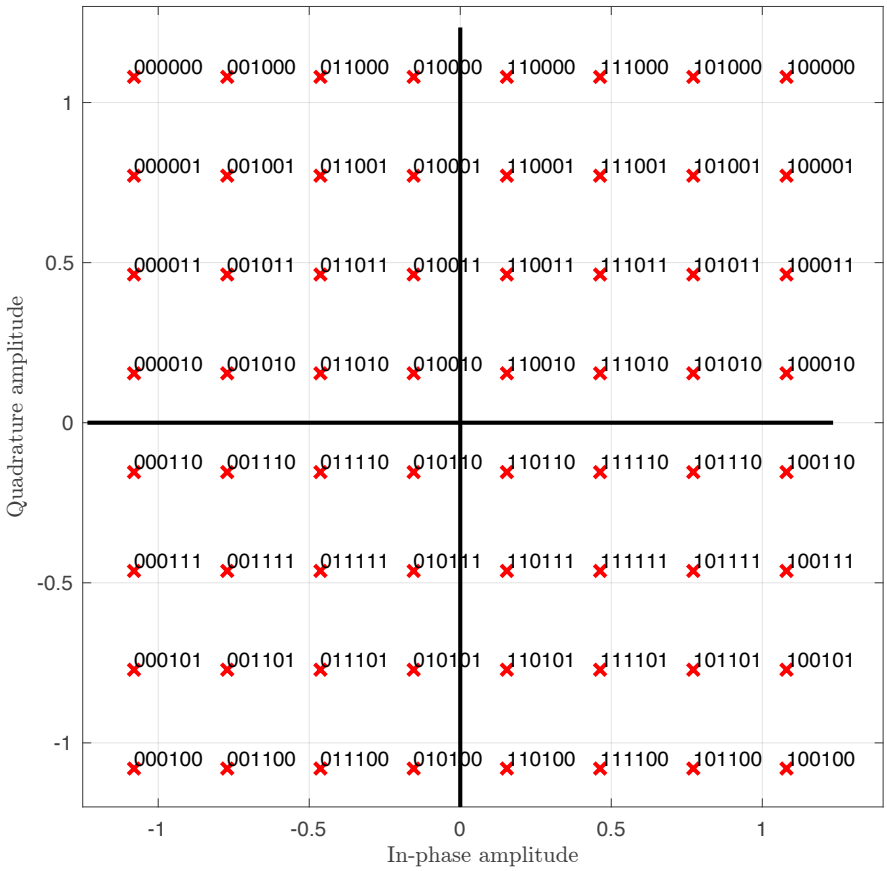


Donde por ejemplo:

$$\tilde{s}_7(t) = \left(-3\sqrt{E} - \mathrm{j}\sqrt{E}\right)\varphi(t)$$

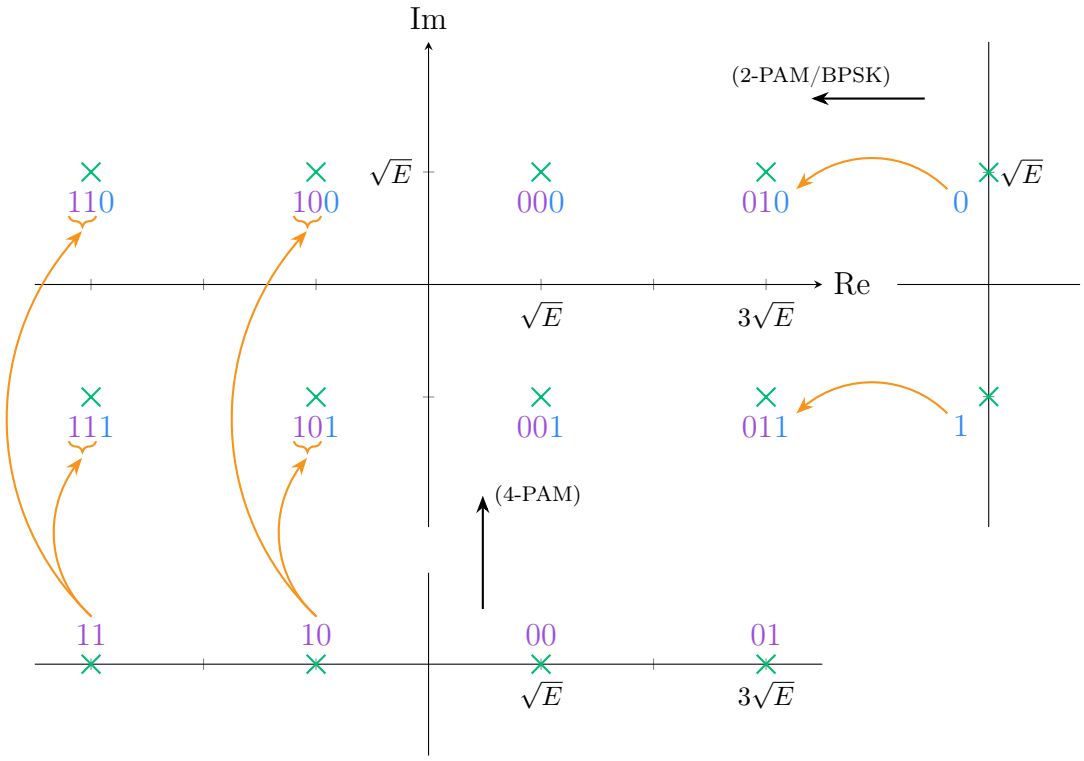
$$s_7(t) = -3\sqrt{E}\varphi(t)\sqrt{2}\cos\left(2\pi f_c t\right) + \sqrt{E}\varphi(t)\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(2\pi f_c t\right)$$


0000
0100
1100
1000
0001
0101
1101
1001
0011
0111
1111
1011
0010
0110
1110
1010
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
Quadrature amplitude
In-phase amplitude



Cápsula 14.8 Probabilidad de error de M-QAM

Nos basaremos en el ejemplo de 8-QAM.



Usando la codificación de Gray y el mismo enfoque de QPSK :

$$
\begin{aligned}
P_s^{(\text{8-QAM})} &= 1 - P_c^{(\text{8-QAM})} && (14.8.1)\\
&= 1 - P_c^{(\text{8-QAM,I})} P_c^{(\text{8-QAM,Q})} && (14.8.2)\\
&= 1 - \left(1 - P_b^{(\text{4-PAM})}\right)\left(1 - P_b^{(\text{BPSK})}\right) && (14.8.3)\\
& && (14.8.4)
\end{aligned}
$$

(2-PAM)

Habíamos encontrado para M-PAM:

Ojo con E_s!

$$P_s^{(\text{M-PAM})} = \frac{M-1}{M}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3\,E_s}{(M^2-1)\,N_0}}\right) \tag{14.8.5}$$

$$M=4: \quad P_s^{(\text{4-PAM})} = \frac{3}{4}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s^{(\text{4-PAM})}}{5N_0}}\right) \tag{14.8.6}$$

$$M=2: \quad P_s^{(\text{BPSK})} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s^{(\text{BPSK})}}{N_0}}\right) \tag{14.8.7}$$

$$M=4: \quad E_s^{(\text{4-PAM})} = \frac{1}{4}\left[2\left(\sqrt{E}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{E}\right)^2\right] \tag{14.8.8}$$

$$= \frac{1}{4}20E = 5E \tag{14.8.9}$$

$$M=2: \quad E_s^{(\text{BPSK})} = \frac{1}{2}2\left(\sqrt{E}\right)^2 = E \tag{14.8.10}$$

$$\Rightarrow P_s^{(\text{8-QAM})} = 1-\left(1-\frac{3}{4}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)\right) \tag{14.8.11}$$

Finalmente, hay que reemplazar E por $E_s^{(\text{8-QAM})}$:

$$E_s^{(\text{8-QAM})} = \frac{1}{8}\left\{4\left[\left(\sqrt{E}\right)^2+\left(\sqrt{E}\right)^2\right]+4\left[\left(3\sqrt{E}\right)^2+\left(\sqrt{E}\right)^2\right]\right\} \tag{14.8.12}$$

$$= \frac{1}{8}(8E+40E) = 6E \triangleq E_s \tag{14.8.13}$$

Así:

$$P_s^{(\text{8-QAM})} = 1-\left[1-\frac{3}{4}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{6N_0}}\right)\right]\left[1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{6N_0}}\right)\right] \tag{14.8.14}$$

Además:

$$E_b = \frac{E_s}{3} \tag{14.8.15}$$

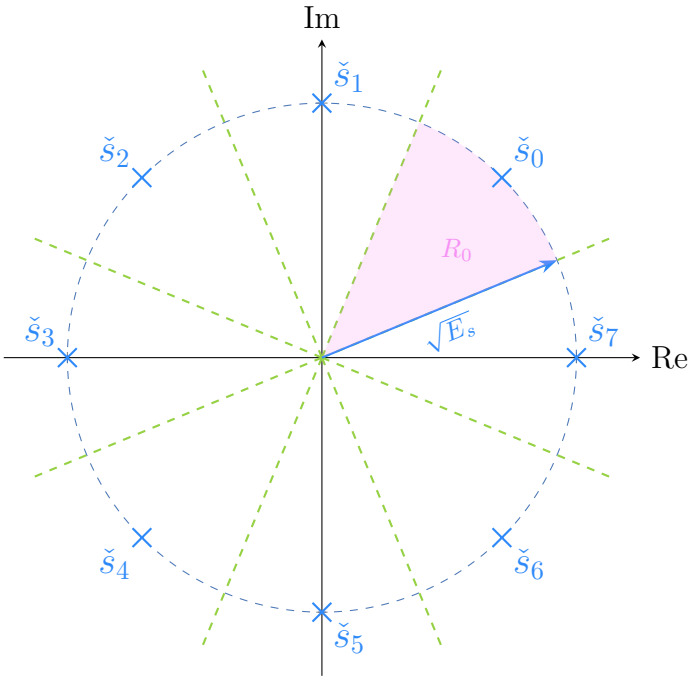
$$P_b = \frac{1}{3}P_s \tag{14.8.16}$$

$\log_2 8 = 3$

Cápsula 14.9 M-PSK

Números M-arios grandes son de poco interes($\uparrow P_e$) la ventaja de M-PSK es que es una modulación de envolvente constante $\Rightarrow$ El amplificador de potencia para la TX puede operar en la zona no-linal(saturación de la amplificación).

$\Rightarrow$ Esto es energéticamente eficiente.



Por ello, M-PSK es popular para comunicaciones satelitales en el enlace satélite - tierra, por ejemplo: TV satelital.

- Geoestacionarios (Lejos 32k km)
- Iluminar continente completo

$\Rightarrow$ Potencia TX es relativamente alta. Energía disponible debe ser aprovechada al máximo.