Módulo 5 **Frecuencia modulada**

Cápsula 5.1 Frecuencia modulada (FM)

* Es una modulación analógica NO LINEAL.
* Pertenece a la familia de MODULACIONES DE ÁNGULO.

$$\Rightarrow s(t) = A_c \cos\left[\theta(t)\right]$$

ángulo que varía en función del mensaje $m(t)$

* FM : la frecuencia instantánea varía linealmente en función de $m(t)$ en torno a una frecuencia portadora.

FRECUENCIA INSTANTANEA:

$$f(t) = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta_t) - \theta(t)}{2\pi\Delta_t} \tag{5.1.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{5.1.2}$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = 2\pi \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = 2\pi \int_{0}^{t} f(\tau)d\tau + \theta_0 \tag{5.1.3}$$

$$\triangleq \theta_0 = 2\pi \int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau \tag{5.1.4}$$

Con ello, la definición formal de FM es:

$$f(t) \triangleq f_c + k_f m(t) \tag{5.1.5}$$

sensibilidad de frecuencia

Entonces:

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau \tag{5.1.6}$$

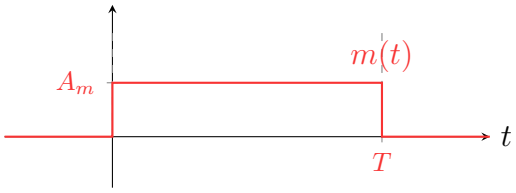
$$= 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{0}^{t} m(\tau)d\tau + \theta_0 \tag{5.1.7}$$

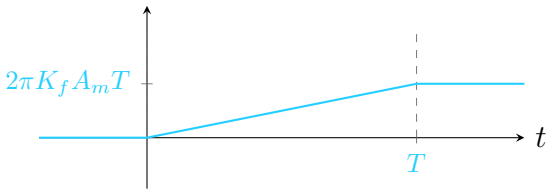
$$= \theta_0 = 2\pi \int_{-\infty}^{0} m(\tau)d\tau \tag{5.1.8}$$

Finalmente, la señal modulada en frecuencia que sale al aire es:

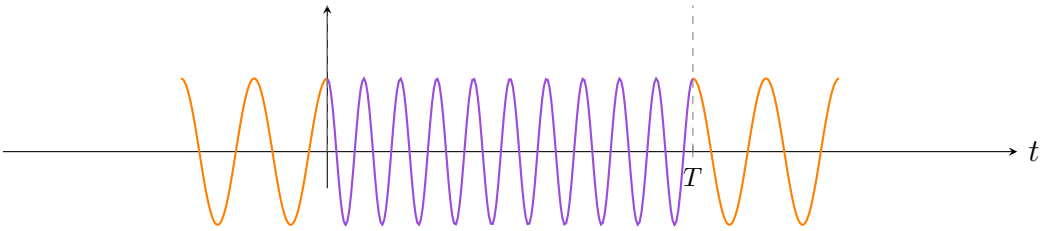
$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{0}^{t} m(\tau)d\tau + \theta_0\right] \tag{5.1.9}$$

Ejemplo:





$$s(t) = A_c \cos\left[\underbrace{2\pi f_c t + \overbrace{2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau}^{= 2\pi k_f A_m t \quad t \in [0,T]}}_{\theta(t) = 2\pi(f_c + k_f A_m)t} + \cancel{\theta_0}^{= 0}\right] \tag{5.1.10}$$



Notamos que la envolvente de FM es constante.

$\Rightarrow$ FM no es una modulación de amplitud.

$\Rightarrow$ El mensaje está en la frecuencia de una sinusoide portadora.

$\Rightarrow$ La potencia de FM es constante en el tiempo.

Cápsula 5.2 — Modulación FM de un tono puro

$$\text{Sup.} \quad m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) \tag{5.2.1}$$

$f_m \in$ frecuencia de audio $\approx [100, 20\text{k}]$ Hz

Entonces:

$$f(t) = f_c + \underbrace{k_f A_m}_{\triangleq \Delta_f \text{ DESVIACIÓN DE FRECUENCIA}} \cos(2\pi f_m t) \tag{5.2.2}$$

$\Rightarrow$ Es la máxima desviación de la frecuencia instantánea c/r a la frec. portadora

$$\theta(t) = 2\pi \int_0^t f(\zeta) d\zeta + \theta_0 \longleftarrow \text{Sup.} = 0 \tag{5.2.3}$$

$$= 2\pi f_c + \underbrace{\frac{\Delta_f}{f_m}}_{\triangleq \beta \text{ INDICE DE MODULACIÓN}} \operatorname{sen}(2\pi f_m t) \tag{5.2.4}$$

$= \dfrac{k_f A_m}{f_m}$

Así:

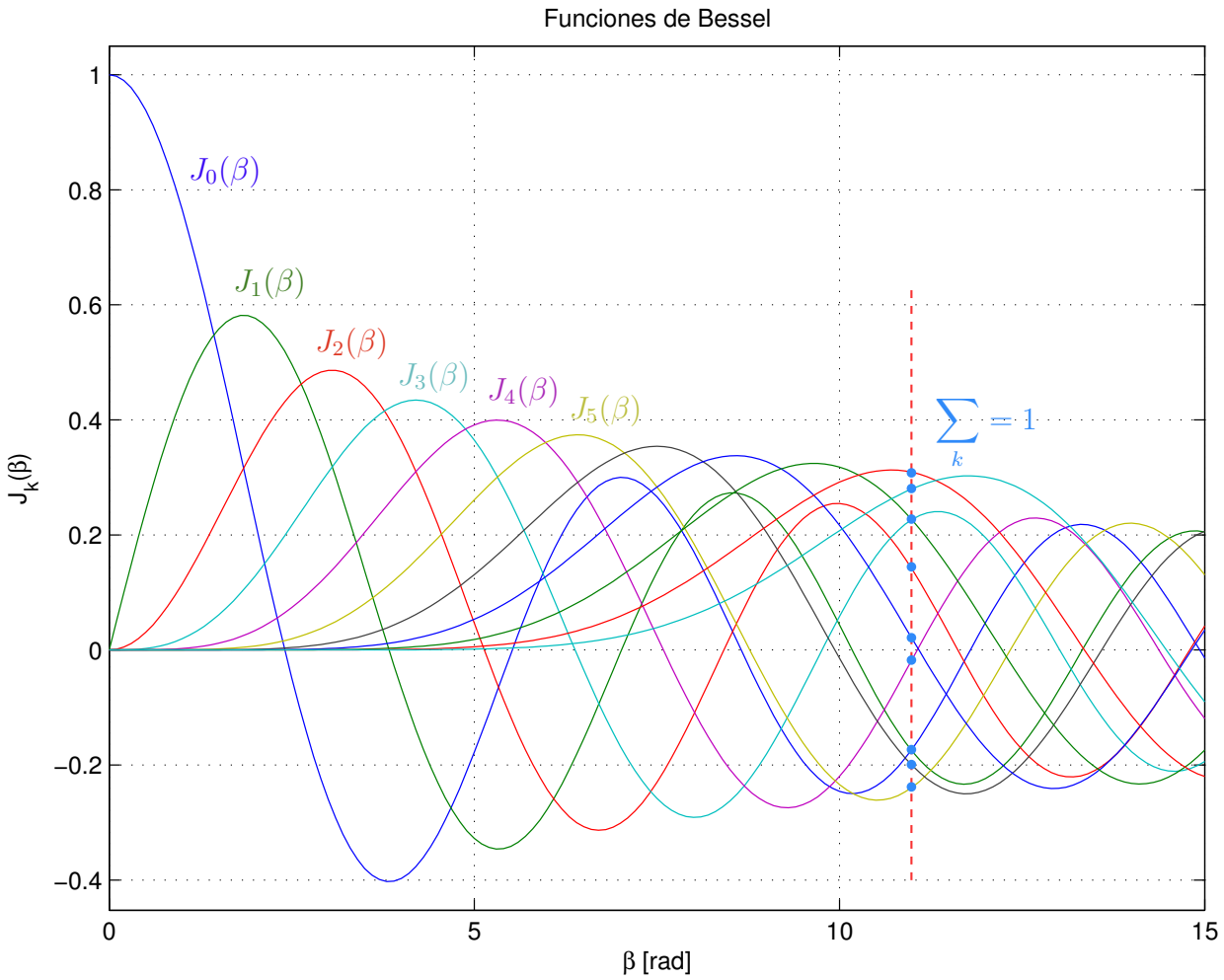
$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)] \tag{5.2.5}$$

$\beta = 0 \Rightarrow s(t)$ es una portadora pura

$$J_k(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{j}\beta\,\mathrm{sen}(x)-\mathrm{j}kx}dx \tag{5.3.1}$$

FUNCIÓN DE BESSEL 1ER TIPO, DE ORDEN k Y ARGUMENTO β.

$k \in \mathbb{Z}$ y $\beta \geq 0$



Propiedades de las funciones de Bessel:

1.- $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$

Si k es par: $J_{-k}(\beta) = J_k(\beta)$

Si k es impar: $J_{-k}(\beta) = -J_k(\beta)$

2.- $|J_k(\beta)| < 1$

3.- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) = 1$

4.- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = 1$

Cápsula 5.4 Análisis espectral de la modulación FM de un tono puro

Queremos obtener la transformada de Fourier de:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)\right] \tag{5.4.1}$$

$$= \frac{A_c}{2} e^{\mathrm{j}2\pi f_c t} \underbrace{e^{\mathrm{j}\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)}}_{\triangleq\ \tilde{s}(t)\ \text{es periodica! periodo } \frac{1}{f_m}} + \frac{A_c}{2} e^{-\mathrm{j}2\pi f_c t} \underbrace{e^{-\mathrm{j}\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)}}_{=\tilde{s}(-t)=\tilde{s}^*(t)} \tag{5.4.2}$$

Enfocándonos en $\tilde{s}(t)$:

$$\tilde{s}(t) = e^{\mathrm{j}\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)} \tag{5.4.3}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{j}2\pi k f_m t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{\mathrm{j}2\pi k f_m t} \tag{5.4.4}$$

Enfocándonos en c_k:

$$c_k = f_m \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \tilde{s}(t) e^{-\mathrm{j}2\pi k f_m t} dt \tag{5.4.5}$$

$$= f_m \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} e^{\mathrm{j}\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t) - \mathrm{j}2\pi k f_m t} dt \tag{5.4.6}$$

Cambio de variable $x \triangleq 2\pi f_m t$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{j}\beta \operatorname{sen}(x) - \mathrm{j}kx} dx \tag{5.4.7}$$

$$= J_k(\beta) \quad \text{FUNCIÓN DE BESSEL DEL 1ER TIPO, DE ORDEN } k \text{ Y ARGUMENTO } \beta. \tag{5.4.8}$$

Entonces, para (5.4.1) se obtiene:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} e^{\mathrm{j}2\pi f_c t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{\mathrm{j}2\pi k f_m t} + \frac{A_c}{2} e^{-\mathrm{j}2\pi f_c t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{-\mathrm{j}2\pi k f_m t} \tag{5.4.9}$$

$$= A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \frac{1}{2} \left[e^{\mathrm{j}2\pi f_c t + \mathrm{j}2\pi k f_m t} + e^{-\mathrm{j}2\pi f_c t - \mathrm{j}2\pi k f_m t} \right] \tag{5.4.10}$$

$$= A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos\left[2\pi (f_c + k f_m) t\right] \tag{5.4.11}$$

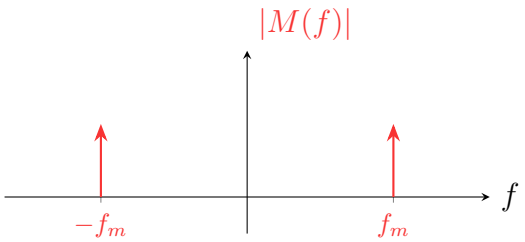
La expresión anterior es una forma completamente equivalente de (5.4.1). Tomando la transformada de Fourier:

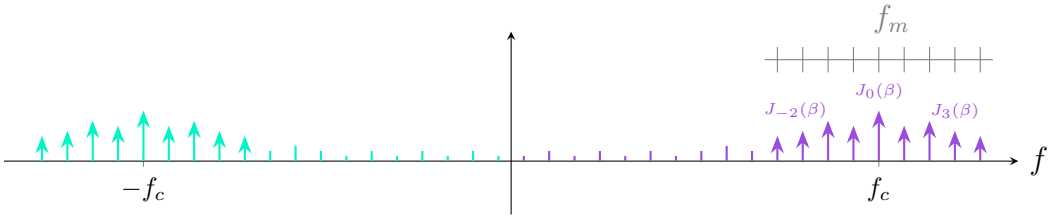
$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \left[\delta(f - f_c - k f_m) + \delta(f + f_c + k f_m)\right] \tag{5.4.12}$$

De (5.4.1)

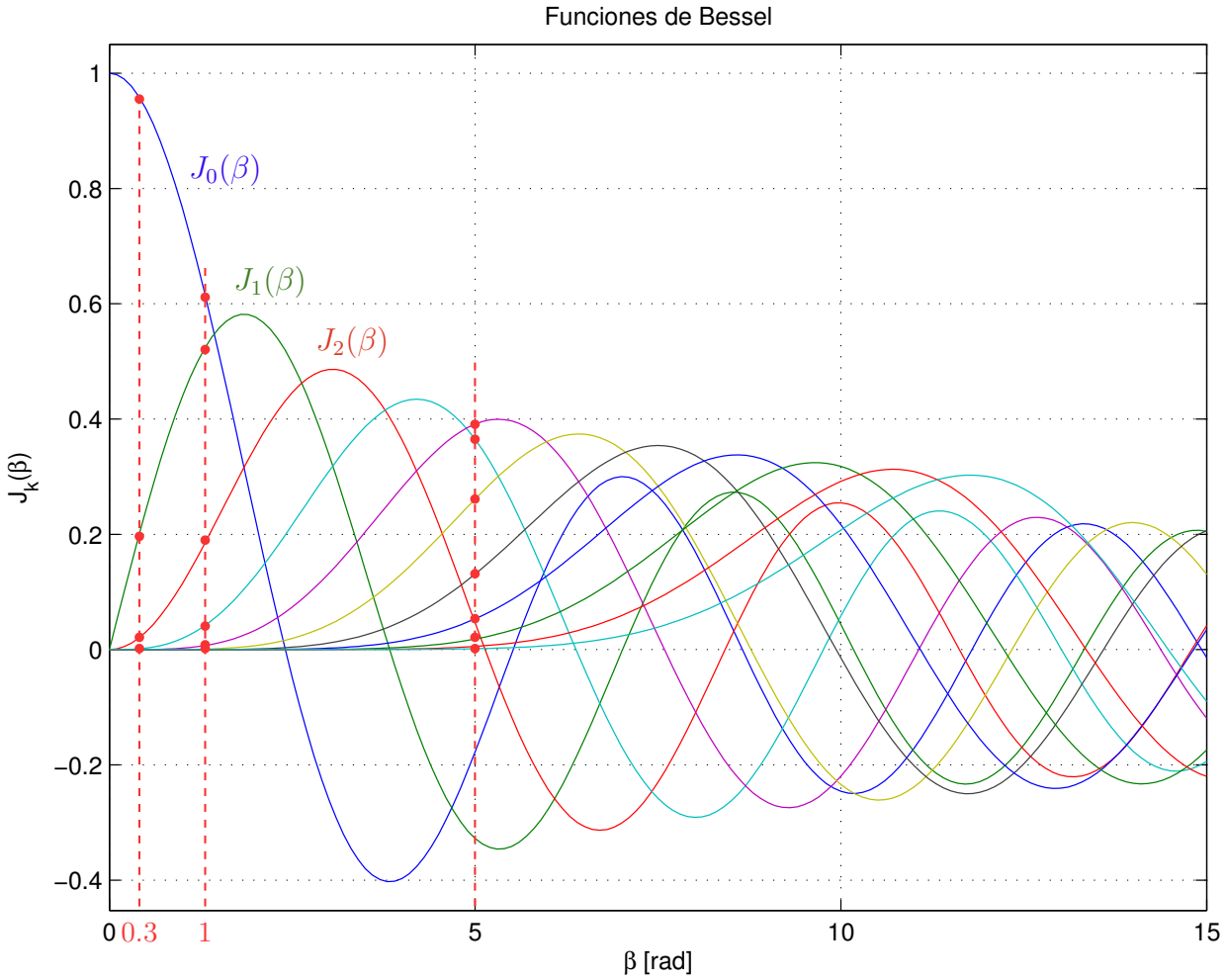
$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \left[\delta(f - f_c - k f_m) + \delta(f + f_c + k f_m)\right] \tag{5.5.1}$$

$$\beta = \frac{k_f A_m}{f_m}$$





© 2010–2025 Christian Oberli


Funciones de Bessel
$J_0(\beta)$
$J_1(\beta)$
$J_2(\beta)$
$J_k(\beta)$
β [rad]
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
0
0.3
1
5
10
15

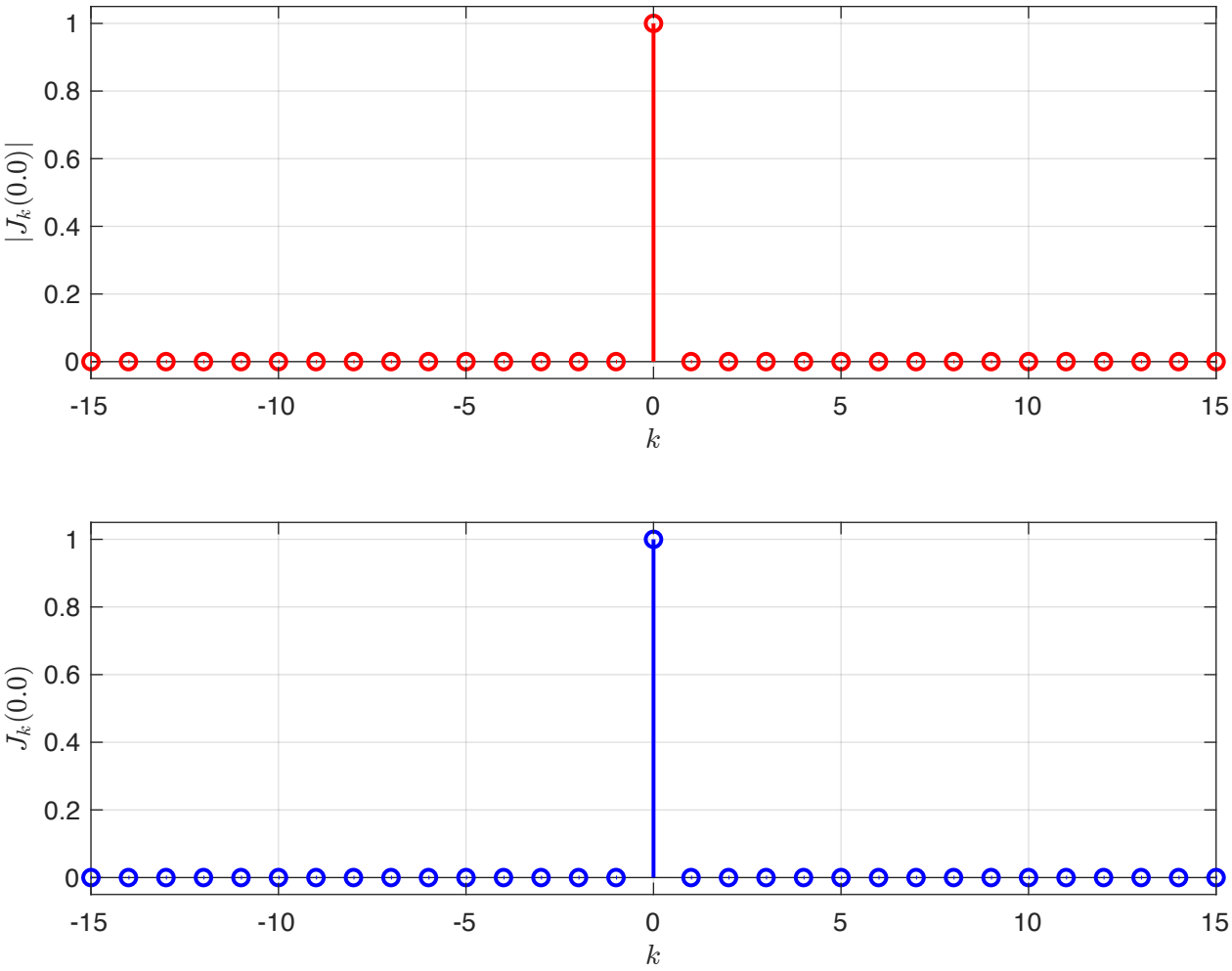


Figura 5.5.1: Lineas espectrales de la modulación FM de un tono puro con índice de modulación $\beta = 0$.

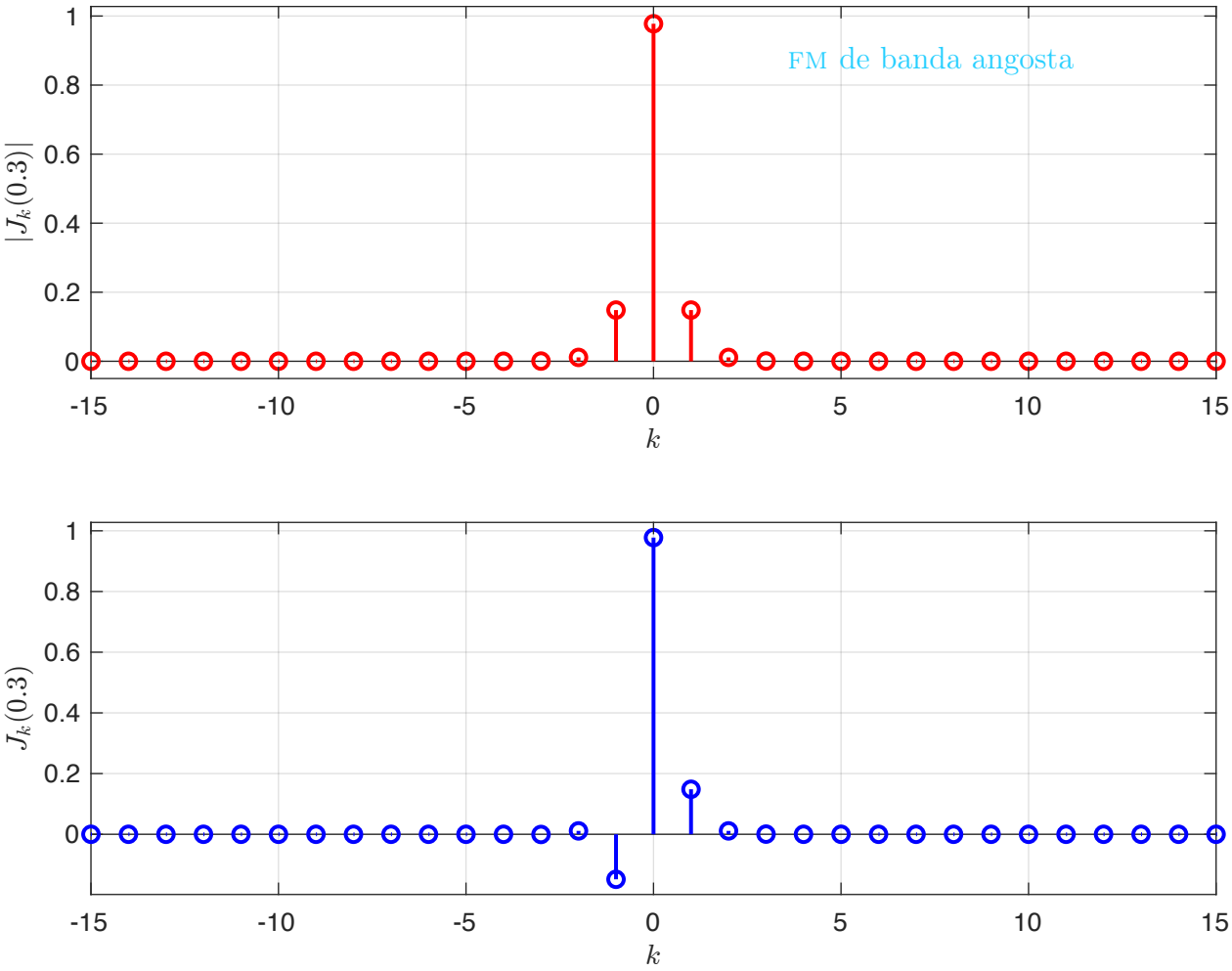


Figura 5.5.2: Lineas espectrales de la modulación FM de un tono puro con índice de modulación $\beta = 0{,}3$.

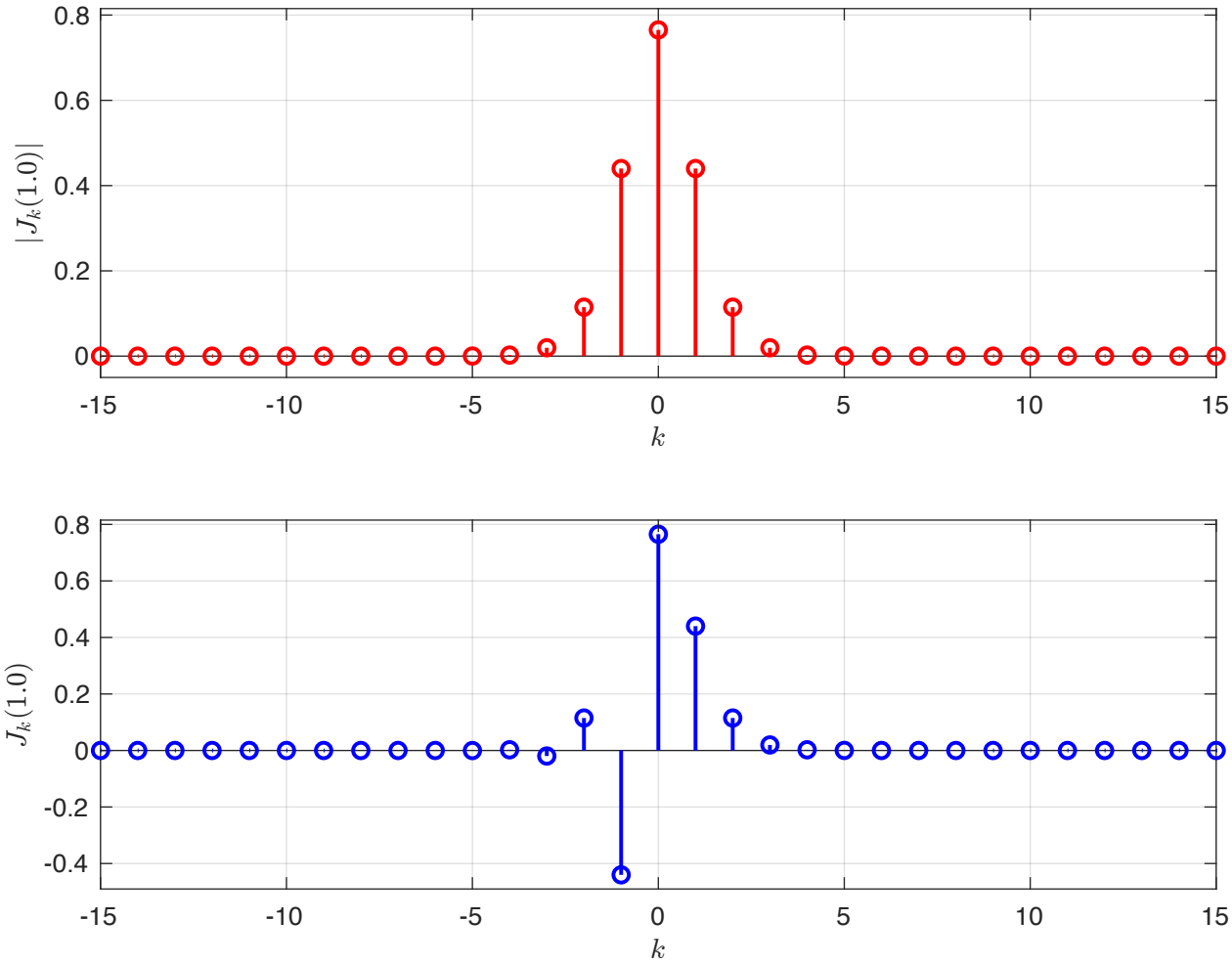


Figura 5.5.3: Lineas espectrales de la modulación FM de un tono puro con índice de modulación $\beta = 1{,}0$.

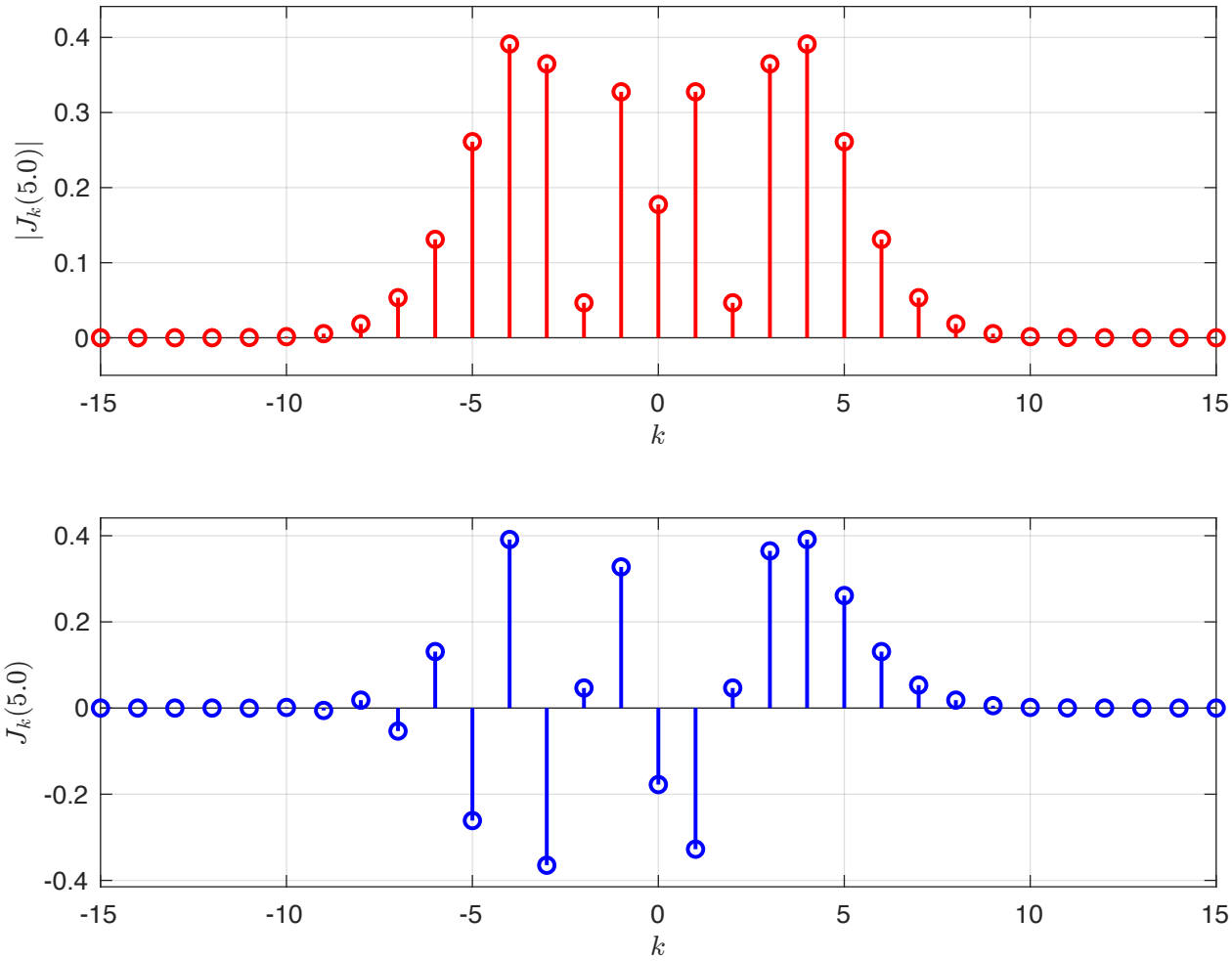


Figura 5.5.4: Lineas espectrales de la modulación FM de un tono puro con índice de modulación $\beta = 5{,}0$.

Cápsula 5.6 — Ancho de banda de FM

Observando las gráficas y animaciones de lineas espectrales con cuidado, vemos que:

1.- $A_m \uparrow \Rightarrow \Delta_f \uparrow \Rightarrow \beta \uparrow \Rightarrow \uparrow W_{\text{FM}}$

PARA β GRANDE ($> 0{,}3$) SE OBSERVA: $W_{\text{FM}} \approx 2\Delta_f$ (DOMINA Δ_f)

2.- β pequeño: Las lineas espectrales relevantes son únicamente $k = \{-1, 0, 1\}$

$$k \begin{cases} 1 \Rightarrow f = f_c + fm \\ 0 \Rightarrow f = f_c \\ -1 \Rightarrow f = f_c - fm \end{cases}$$

PARA β PEQUEÑO ($< 0{,}3$) SE OBSERVA: $W_{\text{FM}} \approx 2f_m$ (DOMINA f_m)

REGLA DE CARSON: El ancho de banda de la modulación FM de un tono puro puede ser aproximado por:

$$\begin{aligned} W_{\text{FM}} &\approx 2\Delta_f + 2f_m \\ &= 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \end{aligned} \qquad (5.6.1)$$

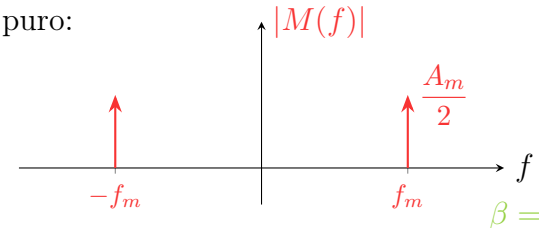
Domina con β grande

Domina con β pequeño

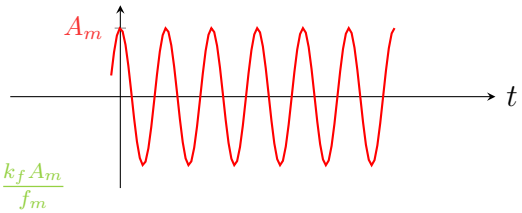
$$\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m}$$

Cápsula 5.7 Ancho de banda de modulaciones FM arbitrarias

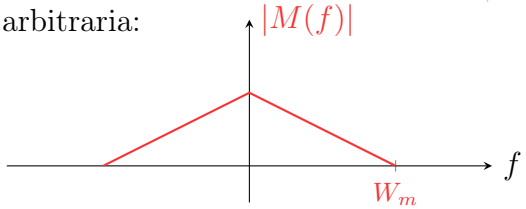
Tono puro:

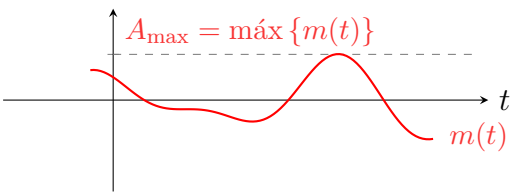


$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m}$



Señal arbitraria:





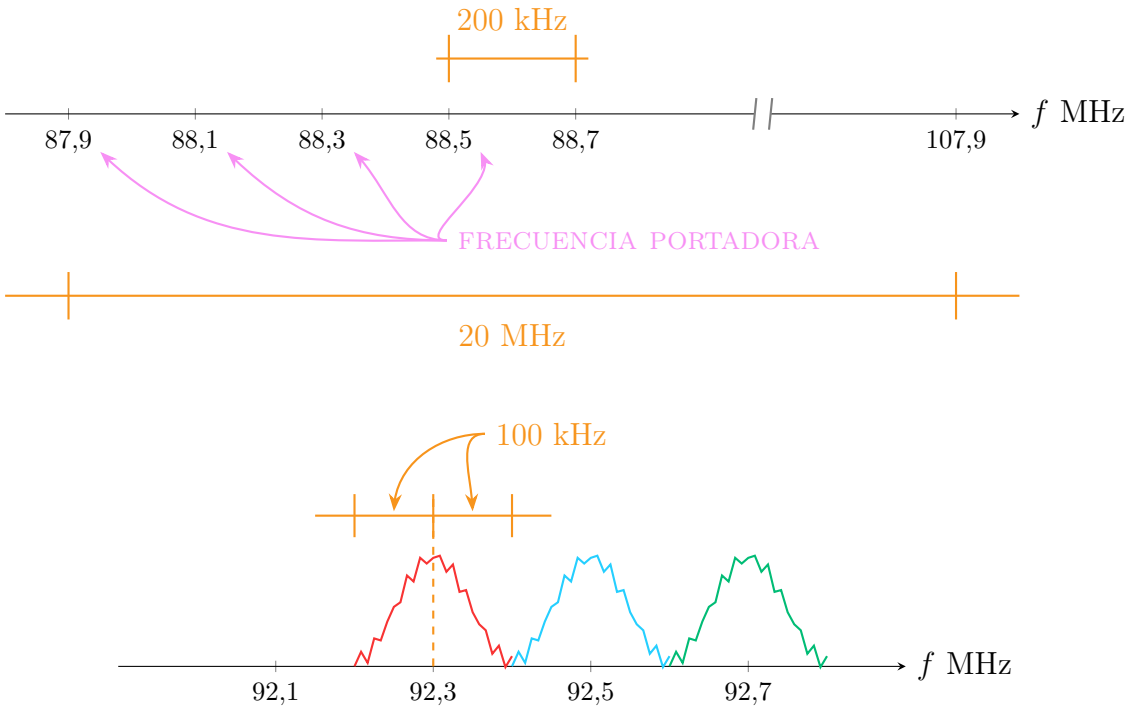
RAZÓN DE DESVIACIÓN $$D = \frac{\Delta_f}{W_m} = \frac{k_f A_{\text{MAX}}}{W_m}$$

REGLA DE CARSON GENERAL:

$$\begin{aligned} W_{\text{FM}} &\approx 2\Delta_f + 2W_m \\ &= 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{D}\right) \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Cápsula 5.8 Regla de Carson general

Banda de frecuencia del dial FM :



- Frecuencia portadora son múltiplos impares de 100 kHz.

- Ancho de banda asignado a cada emisora es 200 kHz.
- Banda FM tiene 20 MHz

  $\Rightarrow$ Tiene espacio para 100 emisoras.

Organismos reguladores:

Chile $\Rightarrow$ SUBTEL

EEUU $\Rightarrow$ FCC

Europa $\Rightarrow$ ETSI

UK $\Rightarrow$ OFCOM

Ej. $\Delta_f = 75$ kHz y $W_m = 15$ kHz $\Rightarrow D = \dfrac{\Delta_f}{W_m} = \dfrac{75 \text{ kHz}}{15 \text{ kHz}} = 5$

$$\Rightarrow W_{\text{FM}} = 2(\Delta_f + W_m) = 180 \text{ kHz} \tag{5.8.1}$$

Ej. $\Delta_f = 75$ kHz y $D = 5$

$$\Rightarrow W_{\text{FM}} = 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{D}\right) = 180 \text{ kHz} \tag{5.8.2}$$

Cápsula 5.9 — Criterio del 1 %

El criterio establece una metodología intuitiva para determinar el ancho de banda de la modulación FM de un tono puro.

Lo hace en base a una comparación entre la portadora no modulada ($\beta = 0$) con la modulación de interés ($\beta > 0$).

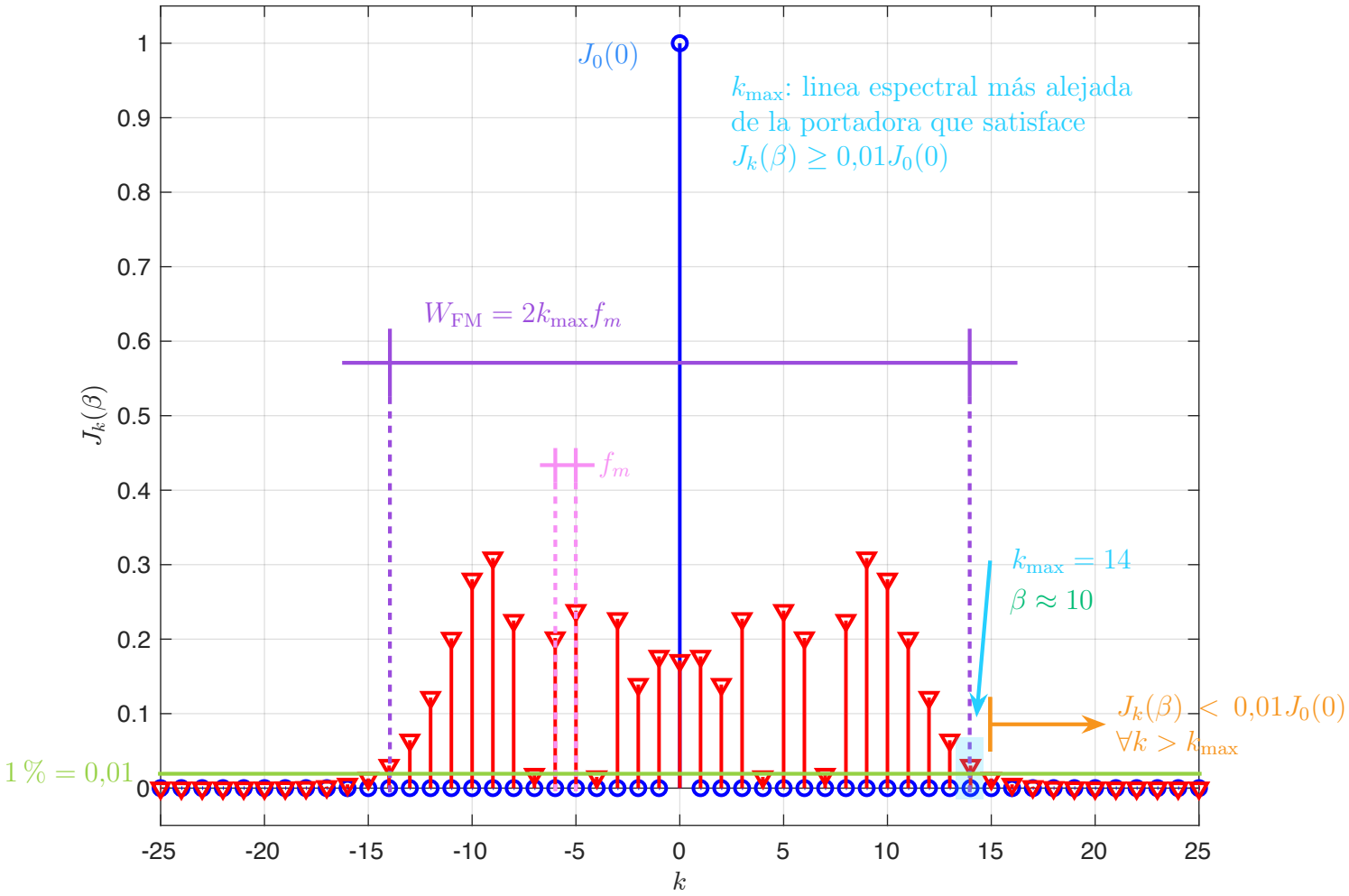


Figura 5.9.1: Ilustración del criterio del 1 %. Lineas espectrales de la modulación FM de un tono puro con $\beta > 0$ (en rojo) vs. espectro de portadora no modulada.

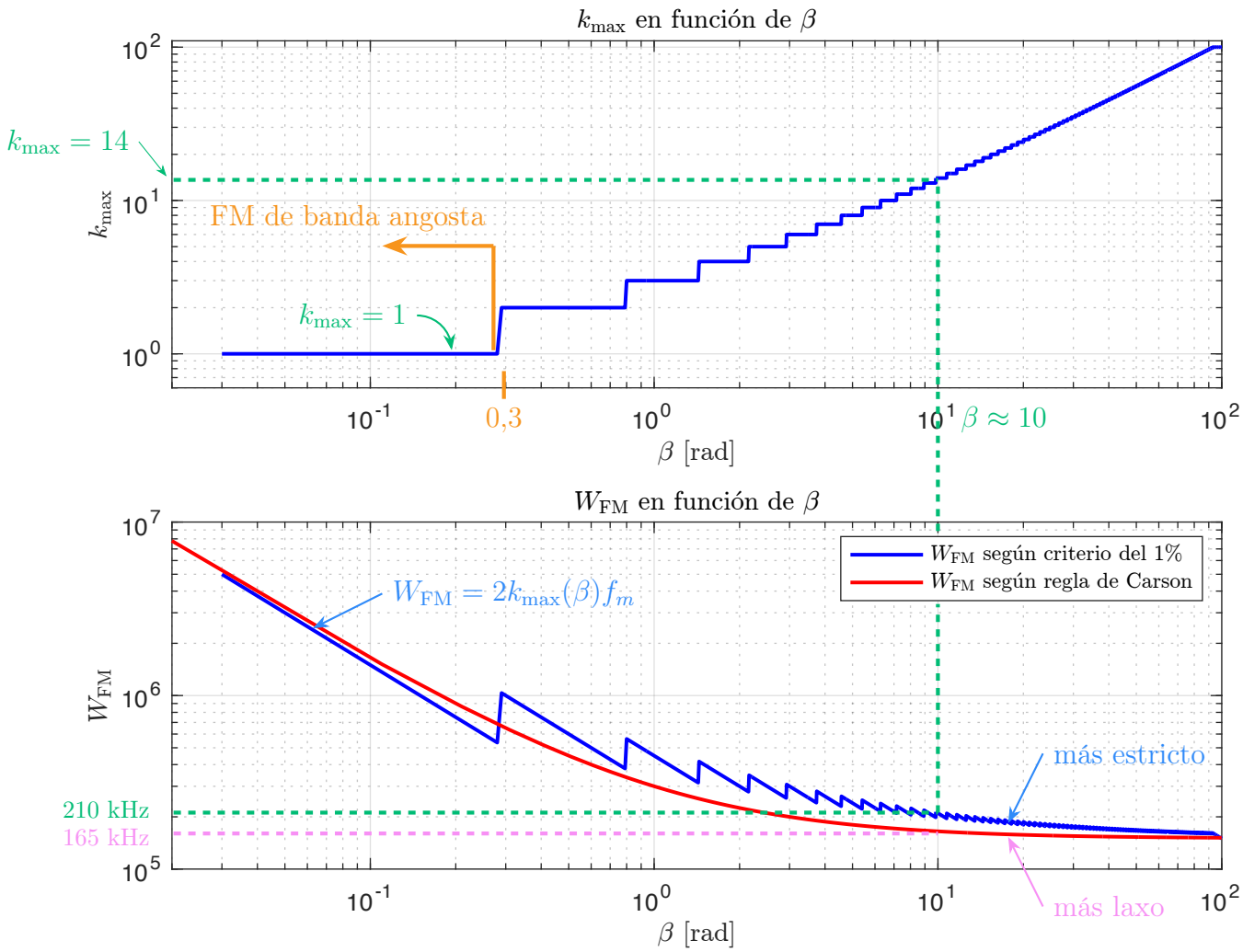


Figura 5.9.2: Regla de Carson (curva suave, gráfico inferior) vs. criterio del 1 % (curva dentada).

Ej. $\Delta_f = 75$ kHz y $k_{\max} = 14 \Leftrightarrow \beta = 10$

$$W_{\text{FM}} = 2k_{\max}(\beta) f_m \tag{5.9.1}$$

$$= 2k_{\max}(\beta) \frac{\Delta_f}{\beta} \tag{5.9.2}$$

$$2 \cdot 14 \cdot \frac{75 \text{ kHz}}{10} = 210 \text{ kHz} \tag{5.9.3}$$

Ej. El mismo caso con la Regla de Carson:

$$W_{\text{FM}} = 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \tag{5.9.4}$$

$$= 2 \cdot 75 \text{ kHz} \left(1 + \frac{1}{10}\right) \tag{5.9.5}$$

$$= 165 \text{ kHz} \tag{5.9.6}$$

Cápsula 5.10 **Curva universal**

Revisitemos el ejemplo con:

Ej. $\Delta_f = 75$ kHz y $\text{W}_m = 15$ kHz $\Rightarrow D = 5 \Rightarrow W_{\text{FM}} = 180$ kHz

Curva universal:

(a) Entrar por ① $\Leftrightarrow D = 5$

(b) Leer ② $\Leftrightarrow \dfrac{W_{\text{FM}}}{\Delta_f} = 3{,}2$

(c) $W_{\text{FM}} =$ ② $\cdot \Delta_f \Leftrightarrow W_{\text{FM}} = 3{,}2 \cdot 75 \text{ kHz} = 240 \text{ kHz}$

© 2010–2025 Christian Oberli