Módulo 7 **Ruido térmico**

Cápsula 7.1 Ruido térmico: Fenómeno físico

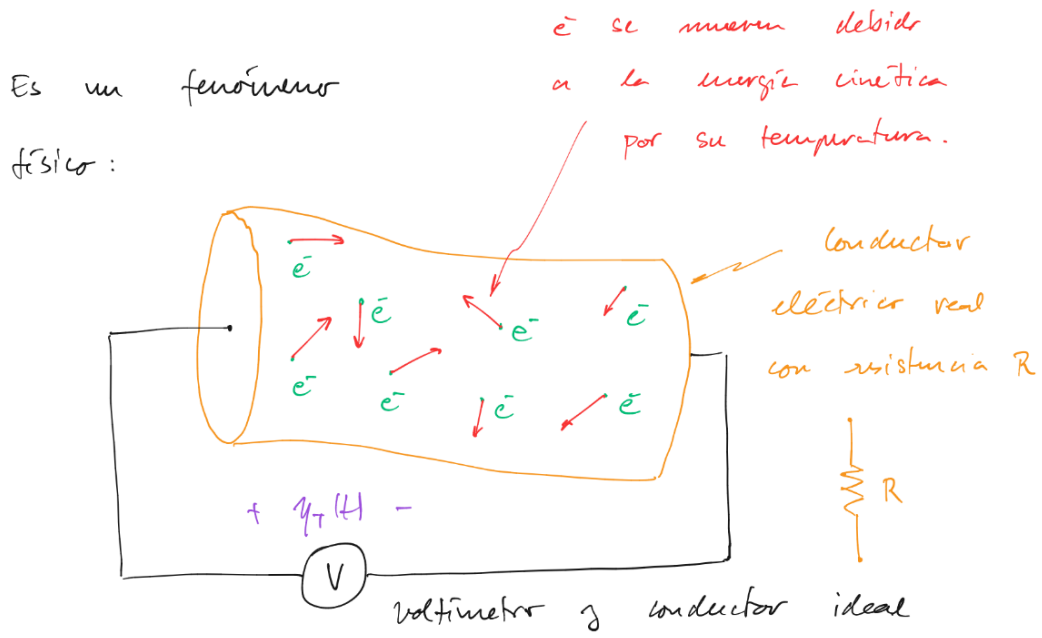


Figura 7.1.1: Ruido térmico como fenómeno físico.

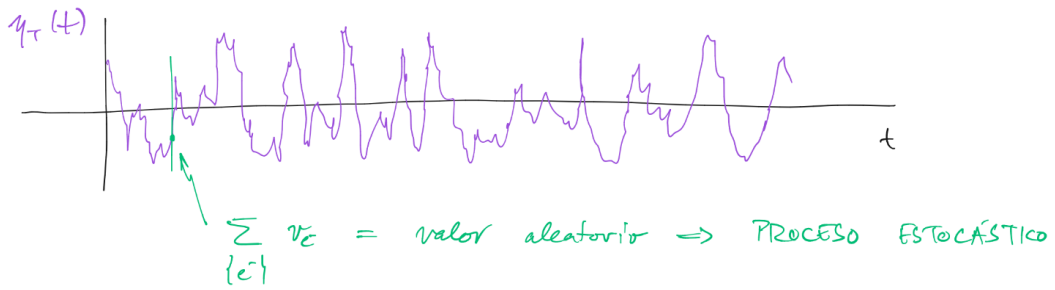


Figura 7.1.2: Fuente de ruido $\eta_T(t)$.

Invocando el teorema del límite central, podemos argumentar que:

$$\eta_T(t) \sim N(0, \sigma^2(T))$$

Es decir, $\eta_T(t)$ es un PROCESO ESTOCÁSTICO GAUSSIANO de media cero y varianza dependiente de la temperatura.

Cápsula 7.2 — Ruido térmico: Modelo físico

R es una resistencia real

- Tiene cargas libres que generan un voltaje aleatorio.
- Opone una resistencia a la corriente eléctrica.

Modelemos la R real mediante su equivalente de Thevenin:

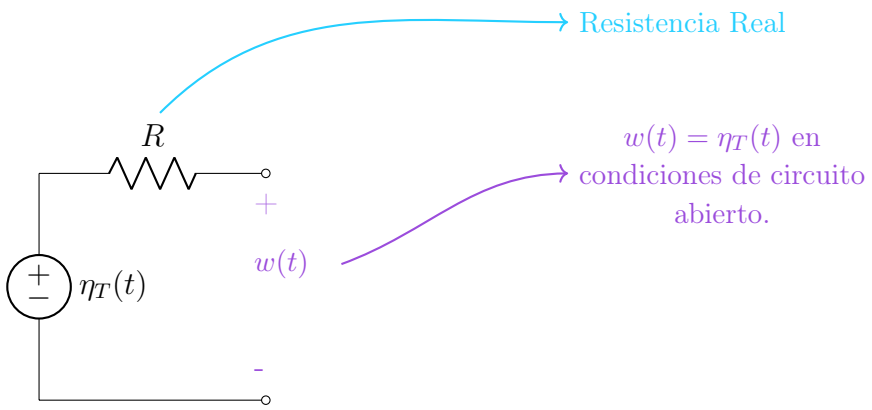


Figura 7.2.1: Equivalente de Thevenin ruido térmico circuito abierto.

Filtremos $w(t) \equiv \eta_T(t)$ (circuito abierto) con un filtro pasabanda de frecuencia central f y ancho de banda 1 Hz. Observemos el VALOR CUADRADO MEDIO del voltaje ($\triangleq E_{\eta_T}(f)$).

Entonces, se obtiene:

$$E_{\eta_T}(f) = \frac{2Rh|f|}{\exp\left(\frac{h|f|}{kT}\right) - 1} \quad \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}}\right] \tag{7.2.1}$$

cte Planck $= 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ [Js]

cte Boltzmann $= 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}]$

$T°$ en grados Kelvin

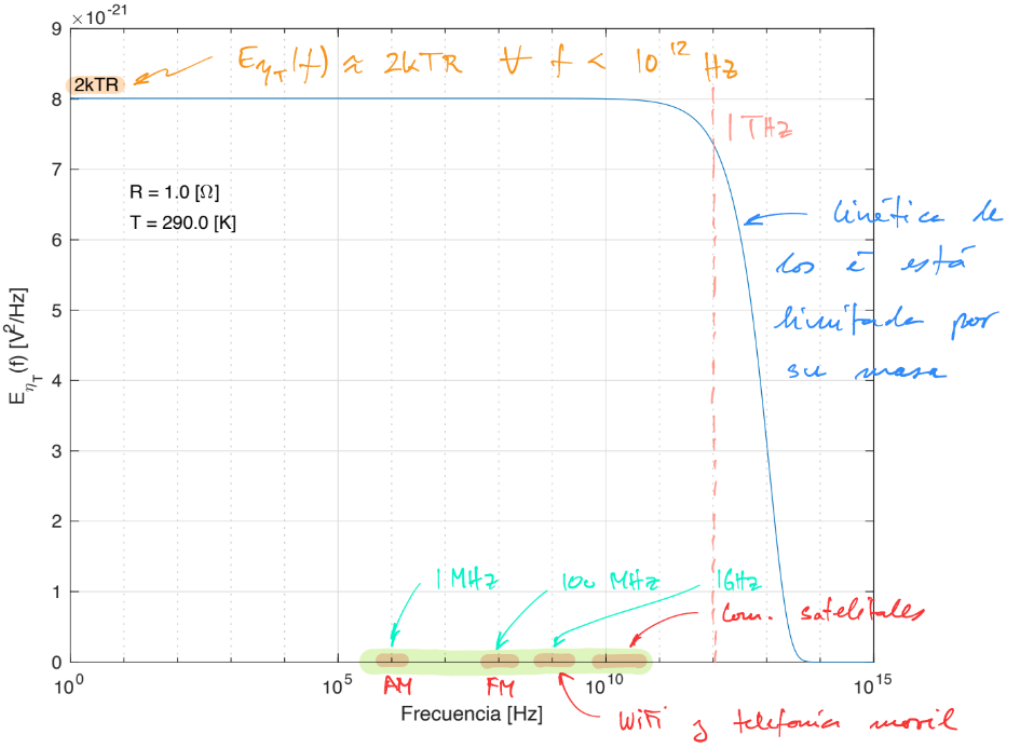


Figura 7.2.2: Valor cuadrado medio del voltaje $E_{\eta_T}(f)$.

Cápsula 7.3 Densidad espectral de potencia del ruido térmico

Asumiremos $E_{\eta_T}(f) = 2\ kTR = \text{cte} \quad \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}}\right]$

Equivalente de Thevenin de un resistor real (Figura 7.2.1):

En circuito abierto:

$$\begin{aligned} w(t) &= \eta_T(t) \\ E_w(f) &= E_{\eta_T}(f) = 2kTR \quad \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}}\right] \end{aligned}$$

Valor cuadrado medio del voltaje $w(t)$

Conectando una carga R_L al circuito anterior

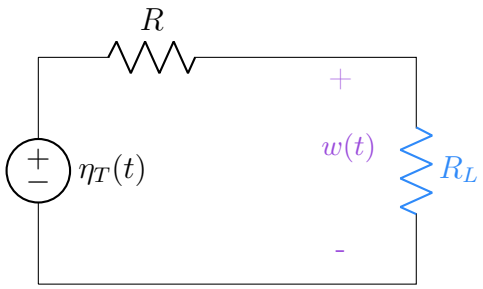


Figura 7.3.1: Equivalente de Thevenin ruido térmico con carga R_L.

$$\begin{aligned} w(t) &= \eta_T(t) \cdot \frac{R}{R_L + R} \\ E_w(f) &= E_{\eta_T}(f) \cdot \left(\frac{R_L}{R_L + R}\right)^2 = 2kTR\left(\frac{R_L}{R_L + R}\right)^2 \end{aligned}$$

La potencia disipada por la carga es:

$$P_L = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E_w(f)\ df}{R_L} = \frac{2kTR\left(\frac{R_L}{R_L+R}\right)^2}{R_L}\int_{-\infty}^{\infty} df \to \infty$$

Enfocándonos en una banda de ancho W en torno a alguna frecuencia central arbitraria f_c, la potencia disipada por la carga en esa banda es:

$$P_L(W) = 2 \cdot \frac{\int_{f_c-\frac{W}{2}}^{f_c+\frac{W}{2}} E_w(f)\ df}{R_L}$$

$\int E_w(f)\ df \longrightarrow \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}}\right] \cdot [\mathrm{Hz}]$

$R_L \longrightarrow [\Omega]$

$$P_L(W) = \frac{2}{R_L} \cdot W \cdot 2kTR \cdot \left(\frac{R_L}{R_L + R}\right)^2$$

Usando el Teorema de máxima transferencia de potencia (peor caso de transferencia de potencia del ruido térmico) : $R_L = R$.

Entonces,

$$\begin{aligned} P_L(W) &= \frac{2}{R} \cdot W \cdot 2kTR \cdot \left(\frac{R}{R+R}\right)^2 \\ &= kTW \quad [\text{W}] \end{aligned}$$

Se define:

$$\boxed{N_0 \triangleq kT \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{Hz}}\right]} \tag{7.3.1}$$

Entonces:

$$P_L(W) = \frac{N_0}{2} \cdot 2W$$

$\left[\frac{\text{W}}{\text{Hz}}\right]$ ← N_0 → [Hz]

N_0: Densidad espectral de potencia del ruido térmico presente en todos los componentes electrónicos.

$2W$: Ancho de banda completo considerado (freq. positivas y negativas)

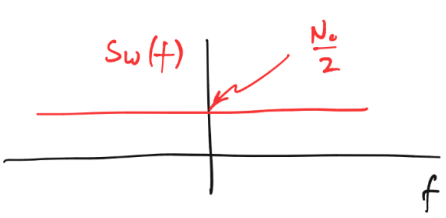
Con ello, la D.E.P de ruido térmico es:

$$\boxed{S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{Hz}}\right]} \tag{7.3.2}$$

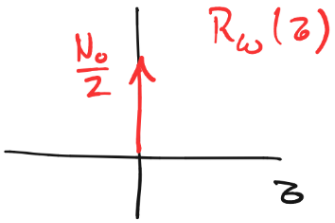
Cápsula 7.4 Observaciones sobre ruido térmico

1. Es un P.E. Gaussiano de media 0.

2. La densidad espectral de potencia y función de autocorrelación son las siguientes:



(a) Densidad espectral de potencia $S_w(f)$ de ruido blanco.



(b) Función de autocorrelación $R_w(\tau)$ de ruido blanco.

Figura 7.4.1: Densidad espectral de potencia y función de autocorrelación de ruido blanco.

Se desprende que:

(a) Es un proceso BLANCO.
$\implies$ tiene igual energía, en promedio, en todas las frecuencias.

(b) Tiene POTENCIA INFINITA.

RUIDO BLANCO GAUSSIANO
WHITE GAUSSIAN NOISE

3. $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ asume máxima transferencia de potencia. Esto se da cuando los componentes electrónicos se interconectan con impedancias adaptadas.

4. $R_w(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ implica que cualquier par de muestras de ruido blanco gaussiano son variables aleatorias independientes. (v.a. gaussianas descorrelacionadas son independientes).

   También implica que el ruido térmico tiene una capacidad de cambio instantáneo a un estado completamente diferente e independiente del estado original.

5.

$$
\begin{aligned}
N_0 = \; & kT \\
& \quad \rightarrow T = 17^\circ C = 290\ K \\
& \quad \rightarrow \text{cte. de Boltzman } 1{,}38 \cdot 10^{-23} \\
= \; & 4 \cdot 10^{-21} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{Hz}}\right] \\
= \; & -174 \quad \left[\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}}\right] \\
= \; & -204 \quad \left[\frac{\text{dBW}}{\text{Hz}}\right]
\end{aligned}
$$

6. En la práctica, considerando que $E_{\eta_T}(f)$ está acotado a frecuencias bajo 1 THz ($= 10^{12}$ Hz), la potencia total de ruido térmico en un conductor es aproximadamente:

$$\begin{aligned}
\int_{-10^{12}}^{10^{12}} \frac{4 \cdot 10^{-21}}{2}\, df &= 2 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 10^{-21} \\
&= 4 \cdot 10^{-9} \quad [\text{W}] \\
&= R_w(0) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_w(\tau) \text{ del ruido} \\ \text{real es “casi”} \\ \text{un impulso.} \end{array} \right. \\
&= \mathbb{E}\{w^2(t)\} \\
&\qquad \downarrow \mu = 0 \\
&= \text{Var}\{w(t)\} \\
&\implies w(t) \sim N\left(0, 4 \cdot 10^{-9}\right) = N(0, 4 \cdot 10^{-9}) \\
&\qquad \searrow \approx -84 \text{ dBW}
\end{aligned}$$

Cápsula 7.5 — Decibeles

“Decibel” dB:

$$10 \log_{10} \frac{P_a \text{ [W]}}{P_b \text{ [W]}}$$

→ Adimensional

dBW: dB de P_a con respecto a $P_b = 1$ W.

$$\begin{aligned}
10 \log_{10} \frac{P_a \text{ [W]}}{1 \text{ [W]}} &= 10 \log_{10} P_a - 10 \log_{10} 1 \quad (= 0) \\
&= \underbrace{10 \log_{10} P_a}_{\text{dBW}}
\end{aligned}$$

© 2010–2025 Christian Oberli

dBm: dB de P_a con respecto a $P_b = 1$ [mW] $= 10^{-3}$ [W].

$$\begin{aligned} 10\log_{10}\frac{P_a}{10^{-3}} &= 10\log_{10} P_a - 10\log_{10} 10^{-3} \\ &= 10\log_{10} P_a + \ 30\log_{10} 10 \quad (\log_{10} 10 = 1) \\ &= \underbrace{10\log_{10} P_a}_{\text{dBW}} + \underbrace{30}_{\to \text{dBW}} \\ &\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{dBm}} \end{aligned}$$

¿Y cuándo se usa $20\log_{10}(\cdot)$?

$\Longrightarrow$ Para razones de voltajes o corrientes.

$$\begin{aligned} \frac{V_a}{V_b} \quad \longrightarrow \quad 20\log_{10}\frac{V_a}{V_b} \quad &\longrightarrow \quad \text{dB} \\ &= 10\log_{10}\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^2 \\ &= 10\log_{10}\frac{V_a^2}{V_b^2} \\ &= 10\log_{10}\frac{\frac{V_a^2}{R}}{\frac{V_b^2}{R}} \quad \begin{cases} \triangleq P_a \\ \triangleq P_b \end{cases} \end{aligned}$$

Caso especial: factor 2 en dB:

$$\begin{aligned} P_a &= 2P_b \\ \Longrightarrow \ 10\log_{10}\frac{2P_b}{P_b} &= 10\log_{10} 2 \\ &= 3 \quad [\text{dB}] \end{aligned}$$

Cápsula 7.6 Ruido térmico en un receptor de comunicaciones

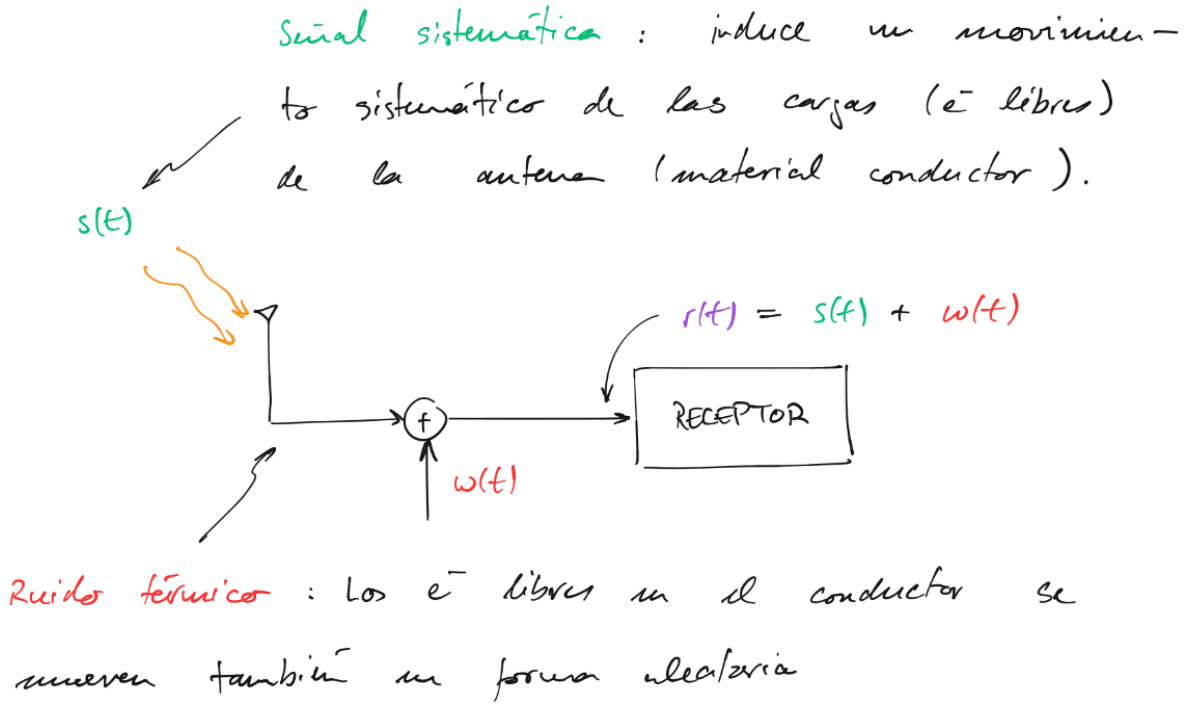


Figura 7.6.1: Diagrama de bloques receptor con ruido térmico.

El movimiento aleatorio actúa en SUPERPOSICIÓN con el movimiento sistemático.

AWGN: ADDITIVE WHITE GAUSSIAN NOISE

Modelo para la señal recibida

$$r(t) = s(t) + w(t)$$

Dominio del tiempo:

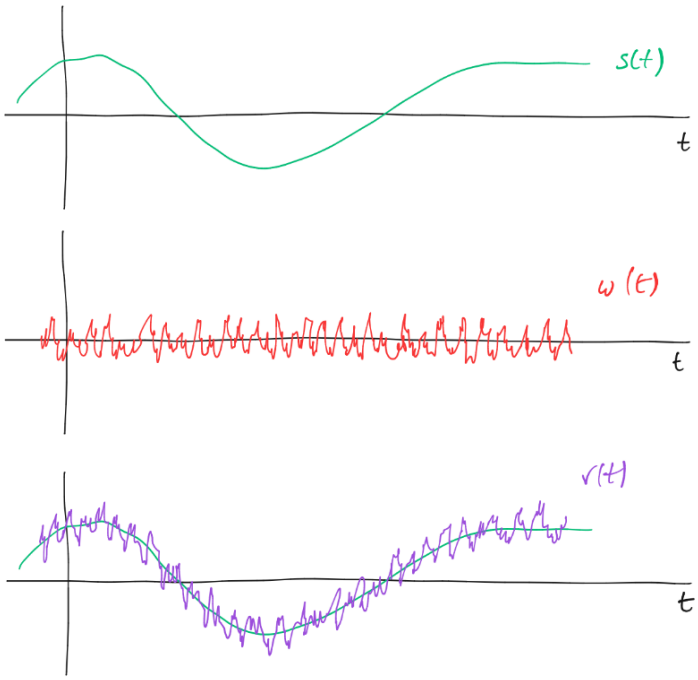


Figura 7.6.2: Señal sistemática $s(t)$, de ruido $w(t)$ y recibida $r(t)$ en el dominio del tiempo.

Dominio de la frecuencia

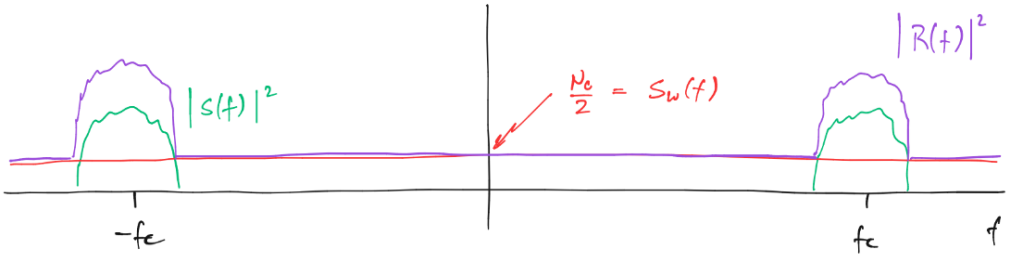


Figura 7.6.3: Señal sistemática $s(t)$, de ruido $w(t)$ y recibida $r(t)$ en el dominio de la frecuencia.

Cápsula 7.7 — Potencia de la señal recibida

Consideremos una comunicación inalámbrica. La señal modulada $s(t)$ se debilita con la distancia al transmisor en proporción a $\frac{1}{d^\alpha}$ con $\alpha \in [2, 6]$.

$$P_s(d) = k \cdot d^{-\alpha} \quad [\text{W}]$$
$$\Leftrightarrow P_s(d) \quad [\text{dBW}] = 10 \log_{10}(k) - 10\alpha \underbrace{\log_{10}(d)}_{D}$$

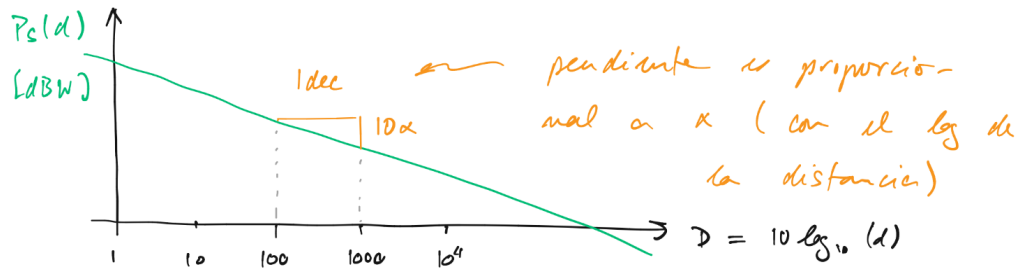


Figura 7.7.1: Potencia de la señal recibida $P_s(d)$.

Ej. WiFi

$$
\begin{aligned}
10 \log_{10}(k) &= -63 \quad [\text{dBW}] \\
\alpha &= 3 \\
\Rightarrow \quad P_s(d) &= -63 - 30 \log_{10}(d)
\end{aligned}
$$

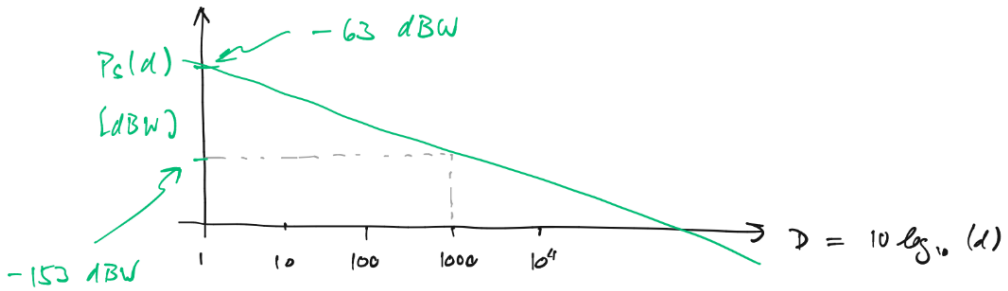


Figura 7.7.2: Potencia de la señal recibida $P_s(d)$, ejemplo 1.

¿Hay una distancia máxima o potencia mínima a la cual se puede detectar o demodular una señal recibida?

$\Longrightarrow$ Depende de la potencia del ruido térmico en el receptor.

Cápsula 7.8	**Potencia del ruido térmico en un receptor**

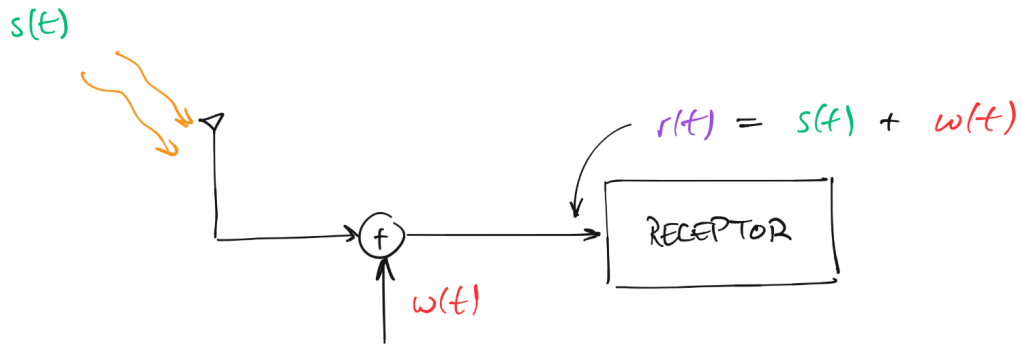


Figura 7.8.1: Diagrama de bloques señal recibida en receptor.

La potencia del ruido térmico (P_w) es ∞:

$$P_w = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f)\, df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df \to \infty$$

$\Longrightarrow$ Una señal $s(t)$ recibida es imperceptible.

Idea: Filtrar en torno a la señal deseada para limitar la potencia del ruido.

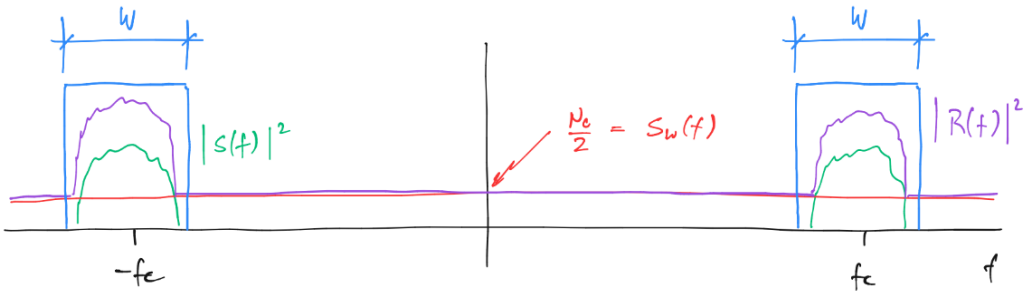


Figura 7.8.2: Espectro de la señal recibida filtrada.

Receptor con BPF:

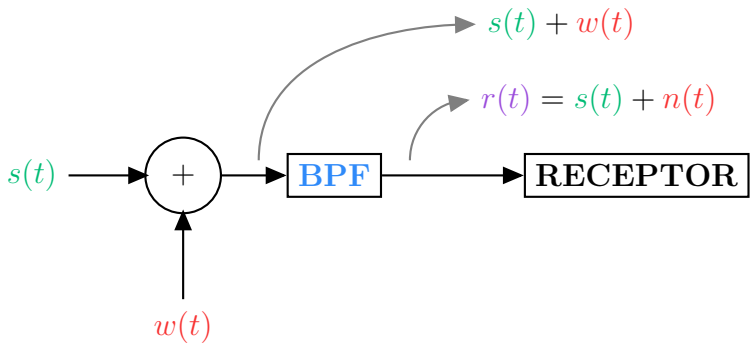


Figura 7.8.3: Diagrama de bloques receptor con BPF.

$$\begin{aligned} P_n(W) &= 2\int_{f_c-\frac{W}{2}}^{f_c+\frac{W}{2}} \frac{N_0}{2}\, df \\ &= N_0 \cdot W \quad [\text{W}] \end{aligned}$$

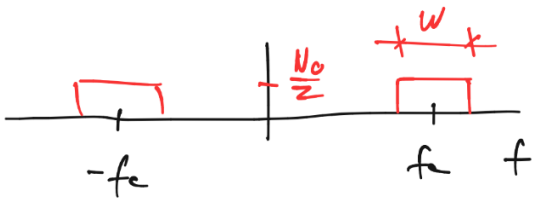


Figura 7.8.4: Ruido filtrado $n(t)$.

$n(t)$: no es blanco, pero tiene potencia finita.

Piso de ruido (noise floor): Es la potencia del ruido térmico en la anda de interés en la entrada del receptor de comunicaciones después de filtrar.

$$\Leftrightarrow P_n(w) = N_0 W \quad [\text{W}]$$

Ej. WiFi. $W = 20$ MHz

$$\begin{aligned} P_m(20\text{ MHz}) &= N_0 \cdot W \\ &= 4 \cdot 10^{-21} \cdot 20 \cdot 10^6 \quad [\text{W}] \\ &= 8 \cdot 10^{-21} \cdot 10^7 \\ &= 2^3 \cdot 10^{-14} \quad /10\log_{10}(\cdot) \\ &= -140 + 3{,}3 \quad [\text{dBW}] \\ &= -131 \quad [\text{dBW}] \quad \text{(piso de ruido de WiFi)} \end{aligned}$$

Cápsula 7.9 Razón señal a ruido de la señal recibida

Inglés: Signal to noise ratio (SNR).

Es la razón entre la potencia de la señal recibida ($P_s(d)$) y la potencia del ruido térmico ($P_n(W)$).

$$\text{SNR} = \frac{P_s(d)}{P_n(W)} \quad [\text{adimensional}]$$

En dB:

$$\text{SNR} = 10\log_{10}(P_s(d)) - 10\log_{10}(P_n(W))$$

Consideremos la SNR en la entrada del receptor AWGN: Ya hemos visto que $P_w = \infty$, por lo tanto SNR $\to 0$.

$\Leftrightarrow s(t)$ es imperceptible.

Analicemos el caso con filtro BPF:

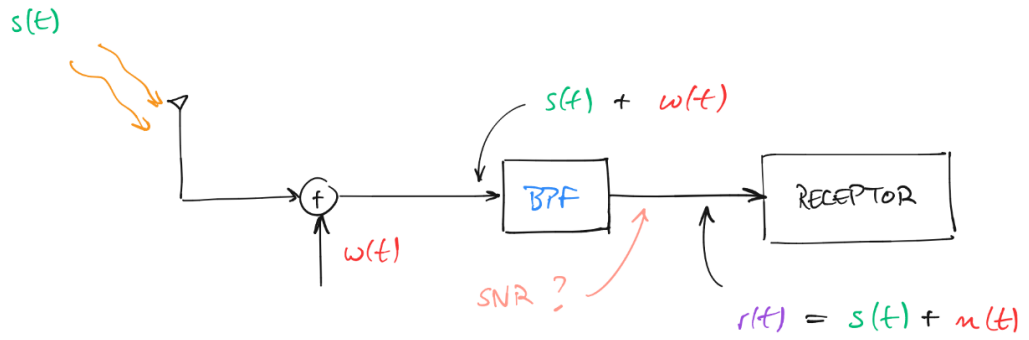


Figura 7.9.1: SNR receptor con BPF.

Visto: $P_n(W) = N_0 W$

$$\implies \text{SNR} = \frac{P_s(d)}{N_0 W} = \text{finito}$$

Superponiendo ambas potencias:

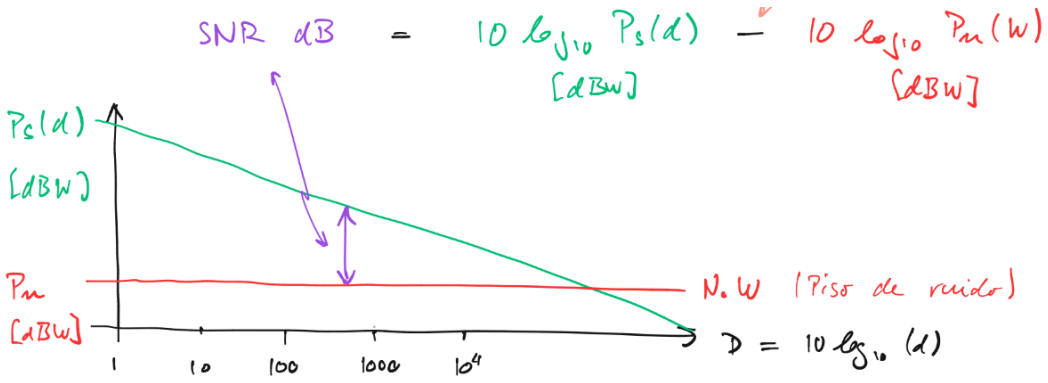


Figura 7.9.2: Potencia de señal $P_s(d)$ y potencia de ruido P_n.

$P_s(d)$ se va acercando al piso de ruido conforme la distancia del receptor al transmisor crece. La comunicación deja de ser posible cuando la SNR se vuelve insuficiente (SNR $\approx$ 5 dB a 15 dB).

$\Leftrightarrow$ ALCANCE/COBERTURA.

Ej. WiFi

$$\begin{aligned} P_s(d) &= -63 - 30\log_{10}(d) \\ P_n(20\text{ MHz}) &= -131 \quad \text{dBW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \text{SNR} &= -63 - 30\log_{10}(d) - (-131) \\ &= 68 - 30\log_{10}(d) \quad (*) \end{aligned}$$

(cociente)

$$\begin{aligned} \text{Si } d = 50\text{ m} &\Longrightarrow 10\log_{10}(d) = 10\log_{10}(100 \cdot \frac{1}{2}) = 20 - 3 = 17 \\ &\Longrightarrow \text{SNR}(d = 50\text{ m}) = 68 - 3 \cdot 17 = 17 \quad \text{dB} \quad (*) \end{aligned}$$

(*) EN LA ENTRADA DEL RECEPTOR.

Cápsula 7.10 — Amplificadores de bajo ruido

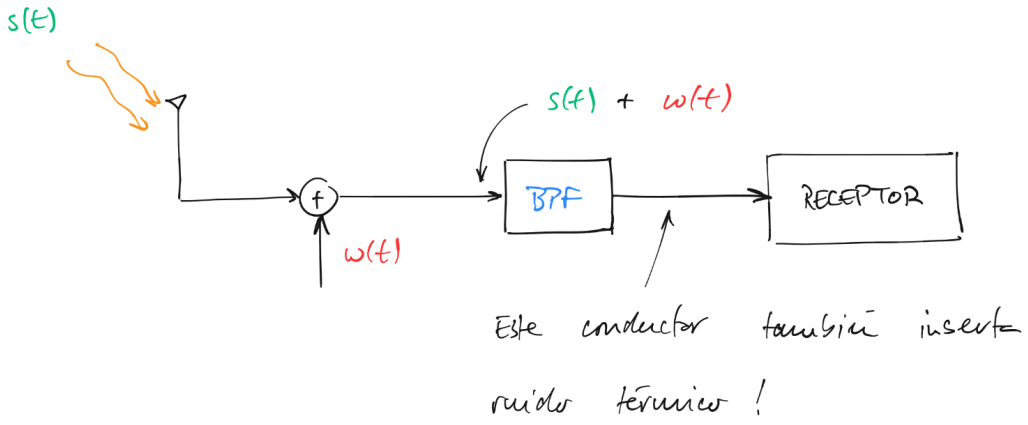


Figura 7.10.1: Diagrama de receptor con BPF.

En la práctica, el problema se resuelve amplificadores LOW NOISE AMPLIFIER (LNA).

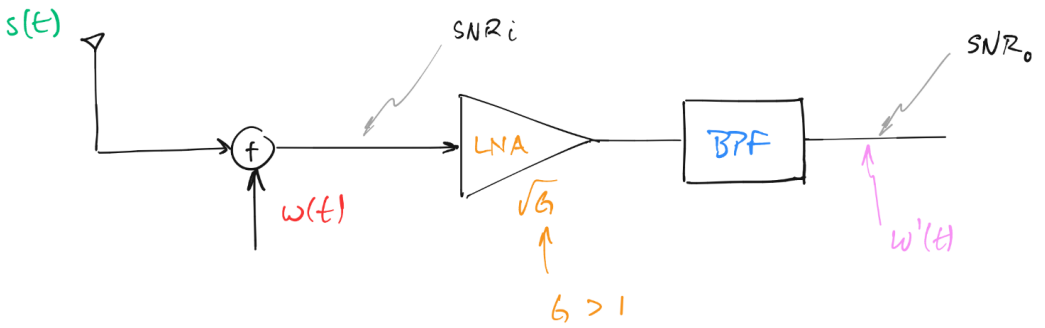
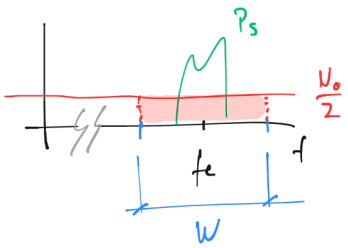
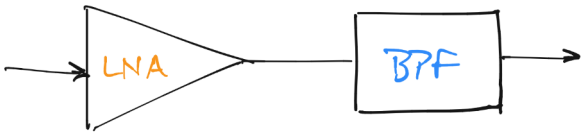


Figura 7.10.2: Diagrama del receptor con LNA + BPF.

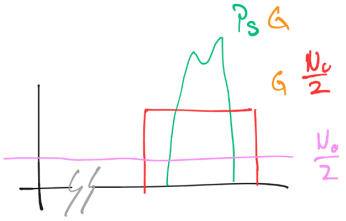
Comparemos SNR_i y SNR_o en la banda de interés ($\Leftrightarrow$ en la pasabanda del BPF).



(a) Densidad espectral de potencia de la señal y ruido antes del LNA.



(b) Banco LNA + BPF.



(c) Densidad espectral de potencia de la señal y ruido a la salida del BPF.

Figura 7.10.3: Densidad espectral de potencia a la entrada y salida del banco de LNA+BPF.

$$\text{SNR}_i = \frac{P_s}{N_0 W}$$

$$\text{SNR}_o = \frac{P_s G}{G N_0 W + N_0 W} = \frac{P_s}{N_0 W} \cdot \frac{G}{G+1}$$

Vemos que:

$$\text{SNR}_o = \underbrace{\frac{G}{1+G}}_{<1}\text{SNR}_i \quad \text{(en la banda de interés)}$$

$\Longrightarrow$ la SNR se degrada por el banco de LNAs + BFPs.

¡Es inevitable!

Cápsula 7.11 — Figura de ruido del receptor

En general, se usan N etapas de amplificación y filtrado en serie. Ello, porque los LNA tienen poca ganancia.

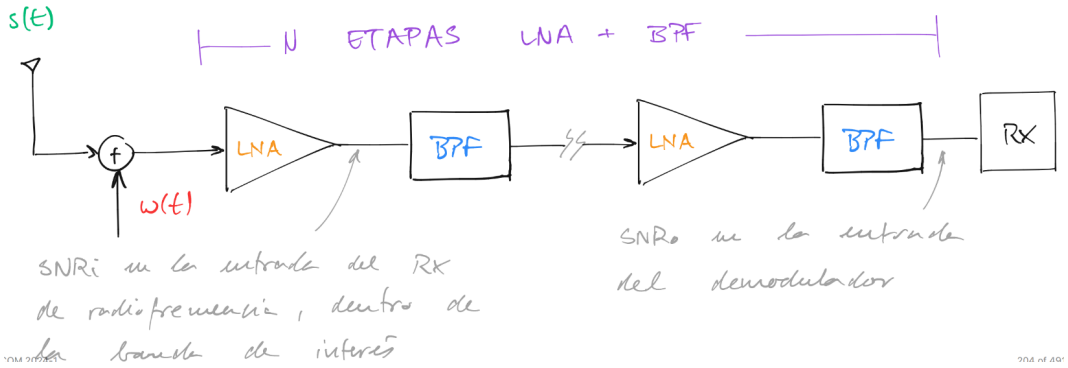


Figura 7.11.1: Diagrama receptor con N etapas LNA + BPF.

Figura de ruido del receptor (receiver noise figure):

$$\text{NF} \triangleq \frac{\text{SNR}_i}{\text{SNR}_o} = \left(\frac{1+G}{G}\right)^N = \left(1+\frac{1}{G}\right)^N$$

En nuestro ejemplo (altamente simplificado) :

$$\text{SNR}_i = \frac{P_s}{N_0 W}$$

$$\text{SNR}_o = \frac{G^N P_s}{G^N N_0 W + G^{N-1} N_0 W + \ldots + G N_0 W + N_0 W}$$

$$\text{NF} = \frac{\text{SNR}_i}{\text{SNR}_o} = 1 + \frac{1}{G} + \frac{1}{G^2} + \ldots + \frac{1}{G^N}$$

1. Si, hay degradación de la SNR a lo largo del banco de LNAs + BPFs. ($\Leftrightarrow$ NF).

2. Pero, la degradación de SNR tiene rendimiento decrecientes con el número de etapas (N).

   $\Longrightarrow$ Llega un momento en que la inserción de nuevo ruido, entre la última etapa de amplificación y el demodulador, es de potencia despreciable con respecto a la potencia de la señal amplificada. En ese momento, la SNR en la practica no se degrada.

Ej.

$$\begin{aligned} G &= 8 = 2^3 \Leftrightarrow G = 9 \quad \text{dB} \\ N &= 10 \\ \text{NF} &= \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{10} = \left(\frac{9}{8}\right)^{10} \end{aligned}$$

En dB:

$$\begin{aligned} \text{NF} &= 10[\underbrace{\log_{10}(9)}_{0{,}95} - \underbrace{\log_{10}(8)}_{0{,}9}] \\ &= 5 \quad \text{dB} \end{aligned}$$