Módulo 12 — Representación equivalente de banda base

Cápsula 12.1 — Transformada de Hilbert

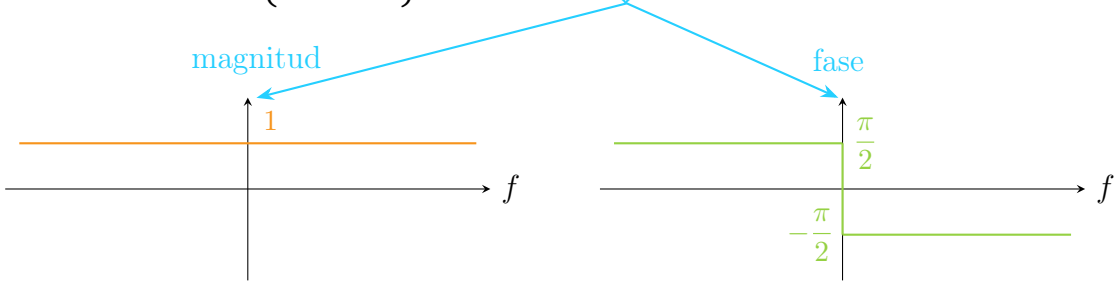
$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau \tag{12.1.1}$$

$$= s(t) * \frac{1}{\pi t} \tag{12.1.2}$$

Condición: $s(t)$ debe ser Fourier-transformable.

Algunas características de la $\mathcal{H}\{\cdot\}$:

1. $\mathcal{H}\{\cdot\}$ es de $t \to t$.
2. $\mathcal{H}\{\cdot\}$ es una operación lineal.
3. $\mathcal{F}\{\mathcal{H}\{s(t)\}\} = \mathcal{F}\left\{s(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} = S(f) \cdot \underbrace{[-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,(f)]}$

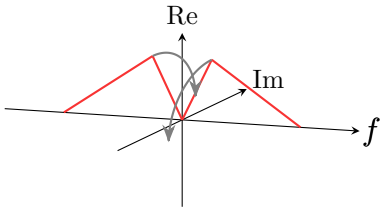


Es decir, la $\mathcal{H}\{\cdot\}$ es un filtro LIT que:

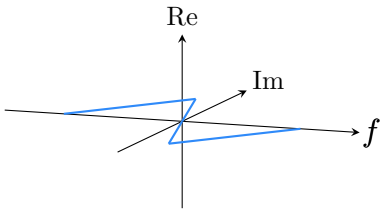
(a) no altera el espectro de magnitud
$\Leftrightarrow$ "filtro pasa todo", y

(b) adelanta (atrasa) la fase de frecuencias negativas (positivas) en $\frac{\pi}{2}$ rad.

$s(t) \in \mathbb{R}$



$\hat{s}(t) \in \mathbb{R}$



4. $|S(f)| = |\hat{S}(f)|$ (de 3a)
5. $\mathcal{H}\{\hat{s}(t)\} = \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{s(t)\}\} = -s(t)$

$\Rightarrow$ Transformada inversa de Hilbert

$$\mathcal{H}^{-1}\{\hat{s}(t)\} = -\mathcal{H}\{\hat{s}(t)\} \tag{12.1.3}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{s}(\tau)}{t-\tau}d\tau \tag{12.1.4}$$

$$= -\frac{1}{\pi t} * \hat{s}(t) \tag{12.1.5}$$

Ejemplo:

$$s(t) = \cos(2\pi f_c t) \tag{12.1.6}$$

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right] \tag{12.1.7}$$

$$\hat{S}(f) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(f)\cdot S(f) \tag{12.1.8}$$

$$= -\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right]\mathrm{sgn}(f) \tag{12.1.9}$$

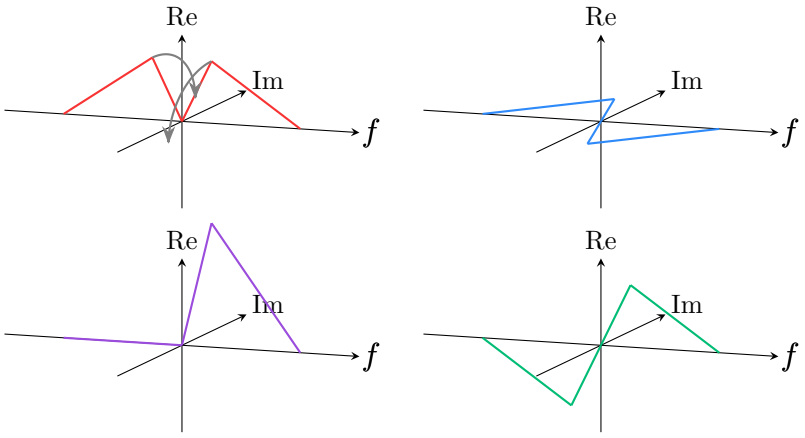
($\cdot 1$ en $f = f_c$, $\cdot(-1)$ en $f = -f_c$)

$$= -\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\delta(f-f_c) - \delta(f+f_c)\right] \tag{12.1.10}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{S(f)}\} = \mathrm{sen}(2\pi f_c t) = \hat{s}(t) \tag{12.1.11}$$

Cápsula 12.2 — Pre-envolvente positiva

$$\underset{\in \mathbb{C}}{s_+(t)} = \underset{\in \mathbb{R}}{s(t)} + \mathrm{j}\underset{\in \mathbb{R}}{\hat{s}(t)} \tag{12.2.1}$$

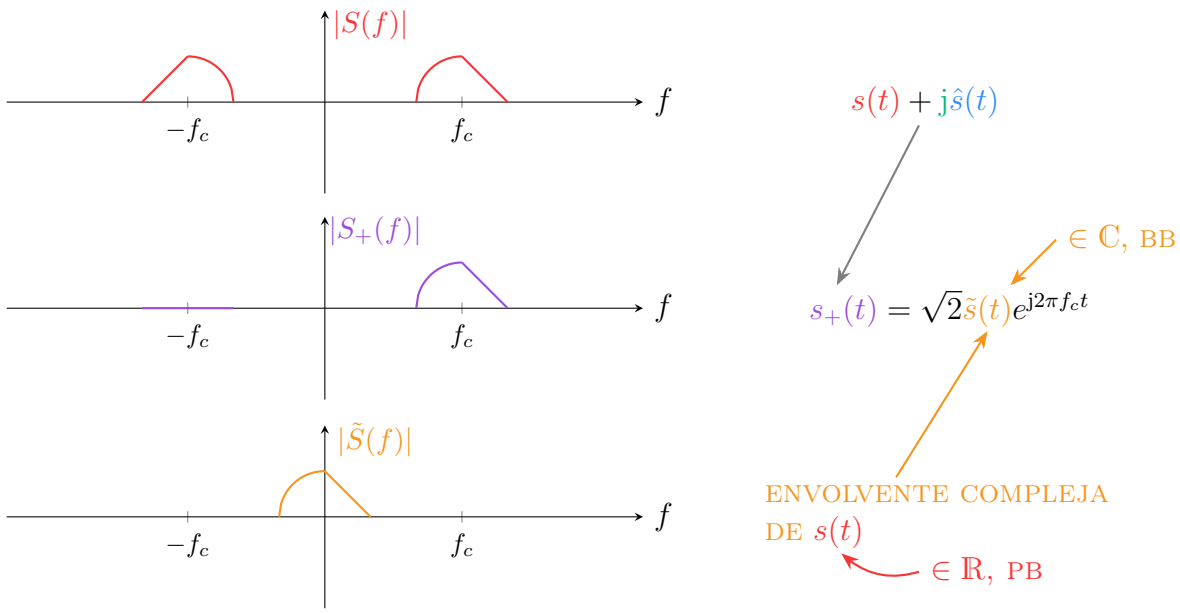


$$s_+(t) = \begin{cases} 0 & f < 0 \\ S(f) & f = 0 \\ 2S(f) & f > 0 \end{cases} \tag{12.2.2}$$

OBSERVACIÓN CLAVE: Siempre es posible recuperar la señal original $s(t)$ a partir de su pre-envolvente positiva $s_+(t)$ simplemente como:

$$s(t) = \mathrm{Re}\{s_+(t)\} \tag{12.2.3}$$

En adelante, asumiremos que $s(t)$ es una señal de PASABANDA REAL.



$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\tilde{s}(t)e^{\mathrm{j}2\pi f_c t}\right\} \tag{12.3.1}$$

Esta es la relación fundamental entre una señal real de pasabanda y su envolvente compleja (de pasa banda). El factor $\sqrt{2}$ no aparece en todos los textos, pero nosotros lo usamos para que $\tilde{s}(t)$ tenga la misma energía que $s(t)$.

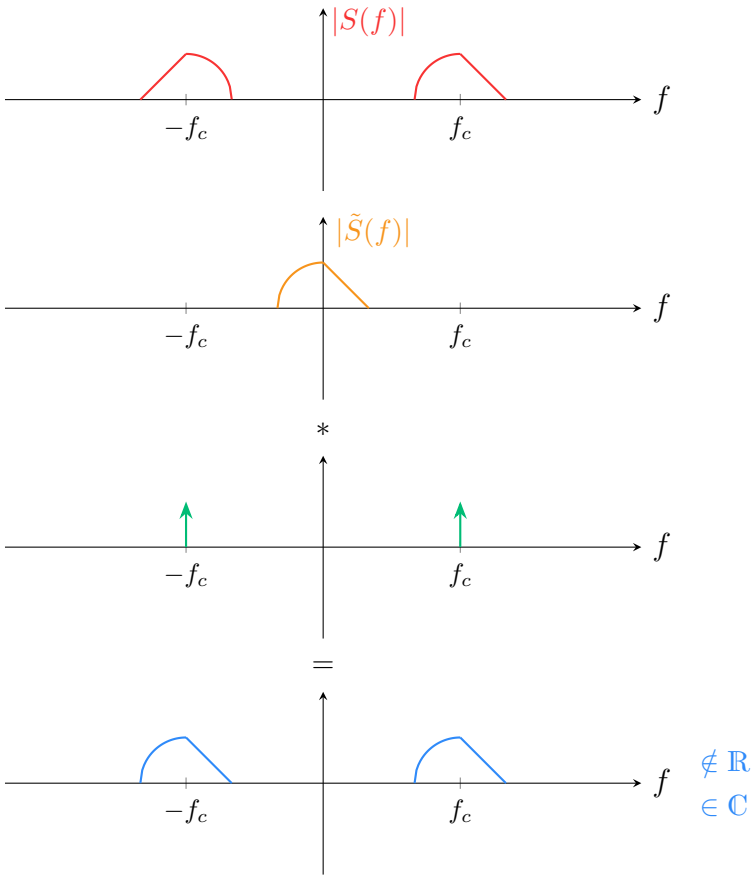
$$\tilde{s}(t) \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{s}(t) = s_I(t) + \mathrm{j}s_Q(t) \tag{12.3.2}$$

$\in \mathbb{C}$ $\in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$

$s_I(t)$: COMPONENTE EN FASE

$s_Q(t)$: COMPONENTE EN CUADRATURA

Ojo: la traslación espectral tradicional mediante producto con $\cos(2\pi f_c t)$ no genera el mismo resultado:



Cápsula 12.4 — Conversores de radiofrecuencia

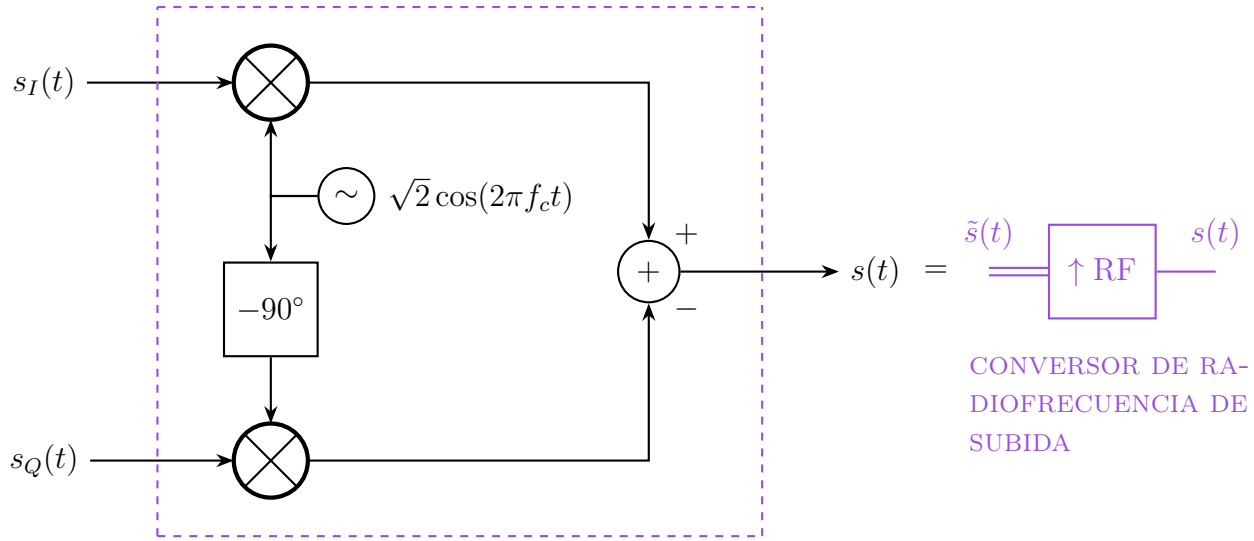
Desarrollemos la relación entre $s(t)$ y $\tilde{s}(t)$:

$$s(t) = \operatorname{Re}\left\{\sqrt{2}\tilde{s}(t)e^{\mathrm{j}2\pi f_c t}\right\} \tag{12.4.1}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\sqrt{2}[s_I(t) + \mathrm{j}s_Q(t)][\cos(2\pi f_c t) + \mathrm{j}\operatorname{sen}(2\pi f_c t)]\right\} \tag{12.4.2}$$

$$= \sqrt{2}s_I(t)\cos(2\pi f_c t) - \sqrt{2}s_Q(t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t) \tag{12.4.3}$$

Esta representación se conoce como la FORMA CANÓNICA.

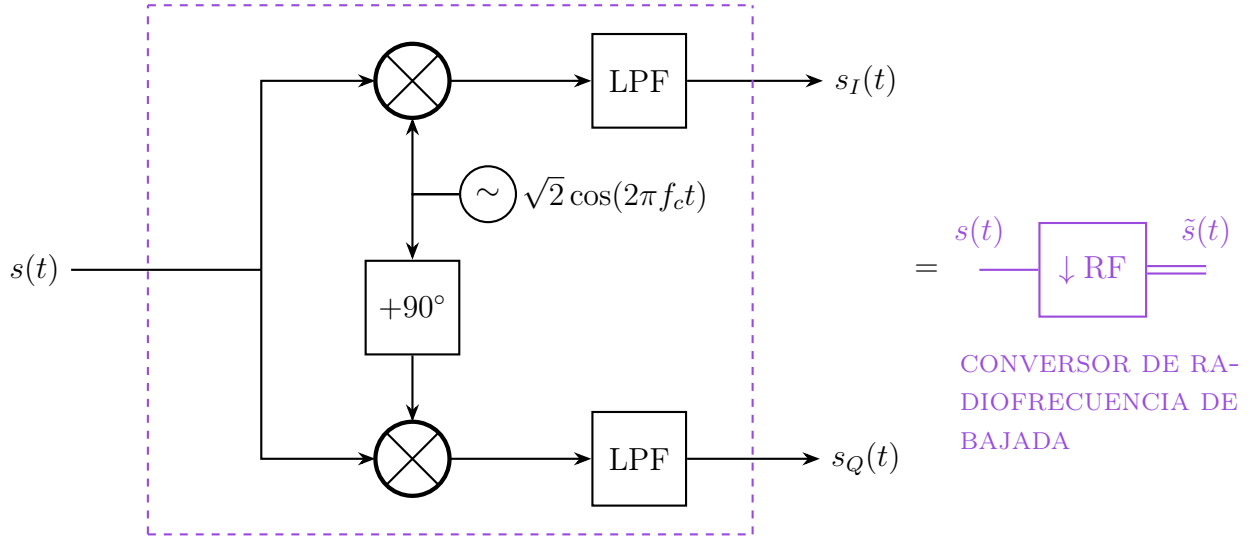


Usando la forma canónica, calculamos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}s(t)\cos(2\pi f_c t) &= && (12.4.4)\\
&= 2s_I(t)\cos^2(2\pi f_c t) - 2s_Q(t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) && (12.4.5)\\
&= s_I(t) + s_I(t)\cos(4\pi f_c t) - s_Q(t)\operatorname{sen}(4\pi f_c t) && (12.4.6)
\end{aligned}$$

De igual forma:

$$\begin{aligned}
-\sqrt{2}s(t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t) &= && (12.4.7)\\
&= -2s_I(t)\cos(2\pi f_c t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t) + 2s_Q(t)\operatorname{sen}^2(2\pi f_c t) && (12.4.8)\\
&= s_Q(t) - s_I(t)\operatorname{sen}(4\pi f_c t) - s_Q(t)\cos(4\pi f_c t) && (12.4.9)
\end{aligned}$$



Importante:



Estos conversores siempre asumen y necesitan que:

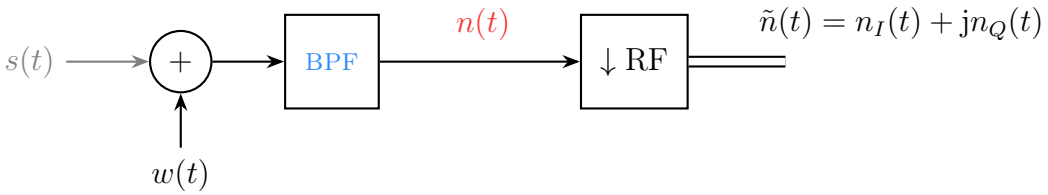
- $s(t) \in \mathbb{R}$ y de pasabanda.
- $\tilde{s}(t)$ puede ser $\in \mathbb{C}$, pero debe ser de banda base.

La relación entre ambas es uno-a-uno.

Cápsula 12.5 — Ruido de banda angosta

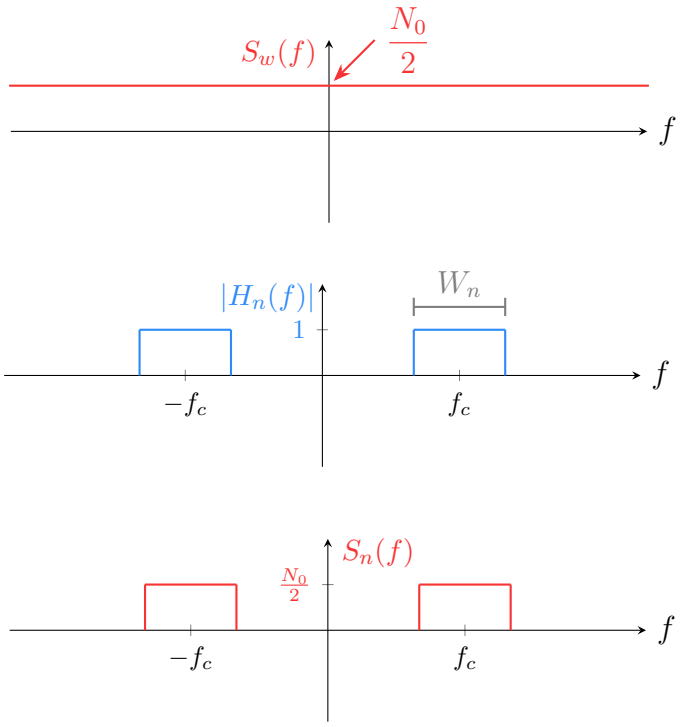
¿Qué pasa si la entrada al ↓RF es AWGN?

$\Rightarrow$ es necesario filtrar el AWGN



BPF: Filtro limitador de la potencia del ruido. Debe tener un ancho de banda mayor que el de la señal $\Rightarrow W_n$
$n(t)$: RUIDO DE BANDA ANGOSTA

Si el BPF es ideal (plano en la pasabanda y 0 en la rechazabanda), entonces $n(t)$ se conoce como RUIDO BLANCO DE PASABANDA.



$S_w(f)$ implica que $w(t)$ tiene potencia infinita



$W_n \gg$ ancho de banda de la señal

$$S_n(f) = |H_n(f)|^2 S_w(f)$$

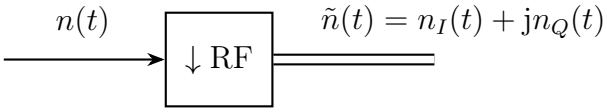
$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df \\ &= 2W_n \frac{N_0}{2} \\ &= W_n N_0 \end{aligned}$$

El ruido de banda angosta $n(t)$:

1. Tiene potencia finita
2. Es de pasabanda
3. Si $w(t)$ es PEG $\Rightarrow$ $n(t)$ también es PEG.
4. Si $n(t)$ es blanco de pasabanda, entonces su potencia es $P_n = W_n N_0$.
5. Puede ser alimentado a $\downarrow$RF, resultando $\tilde{n}(t)$, conocido como RUIDO BLANCO EQUIVALENTE DE BANDA BASE.

Cápsula 12.6 — Tres propiedades fundamentales de $\tilde{n}(t)$

Queremos estudiar la siguiente conversión mejor:



(a) De un P.E. $\in \mathbb{R}$ $n(t)$ aparecen 2 P.E. $\in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $n_I(t)$ y $n_Q(t)$.

(b) La conversión RF$\downarrow$ y $\uparrow$ es uno-a-uno.
$\Rightarrow$ $\tilde{n}(t)$ es una representación equivalente de $n(t)$ $\Rightarrow$ $\tilde{n}(t)$ no puede ganar grados de libertad con respecto a $n(t)$.

Concluimos que $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son P.E. interdependientes de alguna forma. Esta interdependencia tiene 3 propiedades esenciales [Haykin]:

1.- si $n(t)$ tiene media cero, entonces $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ también tienen media cero.

2.- si $n(t)$ es un P.E. Gaussiano, entonces $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son P.E. conjuntamente gaussianos.

3.- si $n(t)$ es un P.E. gaussiano estacionario, entonces $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son conjuntamente gaussianos y conjuntamente estacionarios.

Aqui, conjuntamente se refiere a que K_I muestras del proceso $n_I(t)$ y K_Q muestras de $n_Q(t)$ tienen una densidad de probabilidad multivariada conjunta que describe la dependencia (no-independencia) estadística entre las $K_I + K_Q$ variables aleatorias.

© 2010–2025 Christian Oberli

Cápsula 12.7 — Colorarios de las 3 propiedades de $\tilde{n}(t)$

4.- $R_{n_I}(\tau) = R_{n_Q}(\tau)$ (ambas $\in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ tienen igual potencia.

5.- $R_{n_I n_Q}(\tau) = -R_{n_Q n_I}(\tau)$ (ambas $\in \mathbb{R}$)

$E\{n_I(t)n_Q(t+\tau)\}$ $\quad$ $E\{n_Q(t)n_I(t+\tau)\}$

Dado que las funciones de correlación cruzada son impares, resulta:

$$R_{n_I n_Q}(0) = R_{n_Q n_I}(0) = 0 \tag{12.7.1}$$

Dado que $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son P.E. Gaussianos, correlación cero entre muestras de ellos implica independencia: $\Leftrightarrow$ $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son independientes.

6.- $R_{\tilde{n}}(\tau) = 2R_{n_I}(\tau) - \mathrm{j}2R_{n_I n_Q}(\tau)$

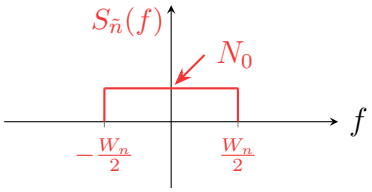
$$R_{\tilde{n}}(0) = 2R_{n_I}(0) - \mathrm{j}2\cancel{R_{n_I n_Q}(0)} \quad (= 0 \text{ (prop. 5)}) \tag{12.7.2}$$

$$= 2R_{n_I}(0) \tag{12.7.3}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{n}(t)$ tiene el doble de la potencia que $n_I(t)$ y $n_Q(t)$. Estas se reparten la potencia de $\tilde{n}(t)$ en partes iguales.

7.- Si $n(t)$ es ruido blanco de pasabanda, entonces:

$$S_{\tilde{n}}(f) = N_0 \sqcap \left(\frac{f}{W_n}\right) \tag{12.7.4}$$



Obs: ambos P.E. $n(t)$ y $\tilde{n}(t)$ tienen la misma potencia.

8.- Considerando ruido blanco de pasabanda (prop. 7):

$$R_{\tilde{n}}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{N_0 \sqcap\left(\frac{f}{W_n}\right)\right\} \tag{12.7.5}$$

$$= N_0 W_n \operatorname{sinc}(W_n\tau) \tag{12.7.6}$$

Vemos que $R_{\tilde{n}}(\tau)$ es real puro, De la prop. 6 se infiere que:

(a) $R_{n_I n_Q}(\tau) \equiv 0 \equiv R_{n_Q n_I}(\tau)$ ← prop. 5

(b) $R_{n_I}(\tau) = \dfrac{N_0 W_n}{2}\operatorname{sinc}(W_n\tau) = R_{n_Q}(\tau)$ ← prop. 4

(c) $R_{n_I}(0) = R_{n_Q}(0) = \dfrac{N_0 W_n}{2}$

9.- Bajo los supuestos que:

(a) $n(t)$ es ruido blanco de pasabanda.

(b) W_n es "tan grande" que tiene "aspecto blanco" frente a la señal o banda de interés.

$R_{\tilde{n}} = \mathcal{F}^{-1}\{S_{\tilde{n}}\} \approx N_0\delta(\tau)$

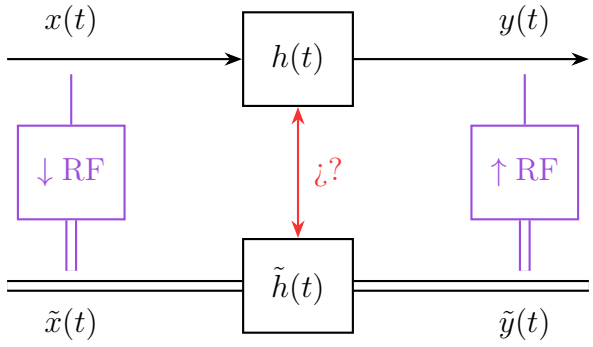
10.- De las props. 4, 6, 8 y 9 resulta:

$R_{n_I}(\tau) = R_{n_Q}(\tau) = N_0\delta(\tau)$

Bajo las condiciones enunciadas en la prop. 9.

Cápsula 12.8 — Representación equivalente de filtros

Hemos visto como representar equivalentemente señales deterministas y estocásticas de pasabanda en banda base y surge la pregunta: ¿Qué ocurre con la representación equivalente de filtros?



¿Cuál es (si es que existe) el $\tilde{h}(t)$ que logra hacer equivalentes estas dos operaciones de filtrado?

$$y(t) = h(t) * x(t) \tag{12.8.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{12.8.2}$$

Paso trivial porque:
$x(t) \in \mathbb{R}$
$h(t) \in \mathbb{R}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{h(\tau)\}\,\mathrm{Re}\{x^*(t-\tau)\}d\tau \tag{12.8.3}$$

$h_+(\tau) = h(\tau) + \mathrm{j}\hat{h}(\tau)$
igual para $x_+^*(t-\tau)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{h_+(\tau)\}\,\mathrm{Re}\{x_+^*(t-\tau)\}d\tau \tag{12.8.4}$$

Propiedad de la pre-envolvente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{h_+(\tau)\}\,\mathrm{Re}\{x_+^*(\tau)\}d\tau = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_+(\tau)\}x_+^*(\tau)d\tau\right\} \tag{12.8.5}$$

Aplicando esto a (12.8.4):

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_+(\tau)x_+^*(t-\tau)d\tau\right\} \tag{12.8.6}$$

Si para FILTROS definimos:

$$h(t) = \mathrm{Re}\{h_+(t)\} \triangleq \mathrm{Re}\{2\tilde{h}(t)e^{\mathrm{j}2\pi f_c t}\} \tag{12.8.7}$$

ahora factor 2 en vez de $\sqrt{2}$

Entonces:

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} 2\tilde{h}(t)e^{\mathrm{j}2\pi f_c\tau}\sqrt{2}\tilde{x}(t-\tau)e^{\mathrm{j}2\pi f_c(t-\tau)}d\tau\right\} \tag{12.8.8}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}\tilde{x}(t-\tau)d\tau}\, e^{\mathrm{j}2\pi f_c t}\right\} \tag{12.8.9}$$

$= \tilde{x}(t) * \tilde{h}(t) = \tilde{y}(t)$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\tilde{y}\,e^{\mathrm{j}2\pi f_c t}\right\} \tag{12.8.10}$$

La convolución entre envolventes complejas de señal y respuesta al impulso del filtro es una operación uno-a-uno (no ambigua) de su operación equivalente de pasabanda.