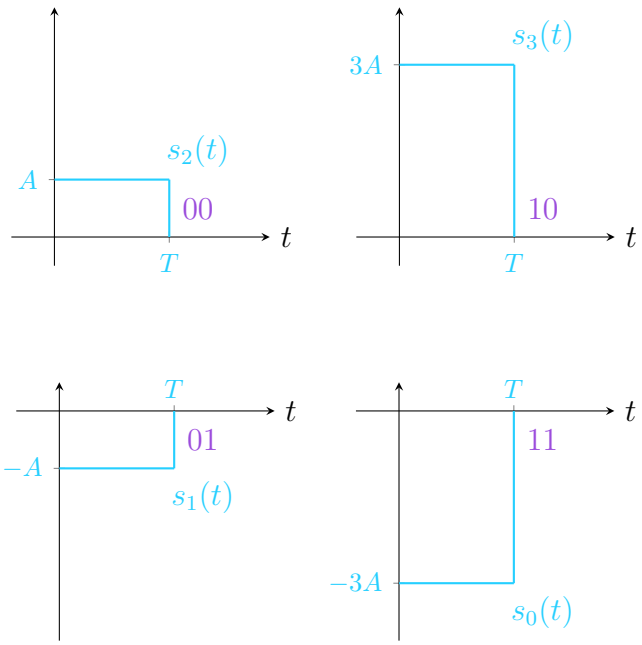
Módulo 11 **Modulación M-aria de banda base (track standard)**

Cápsula 11.1 Modulación M-aria



Esto es una modulación 4-aria

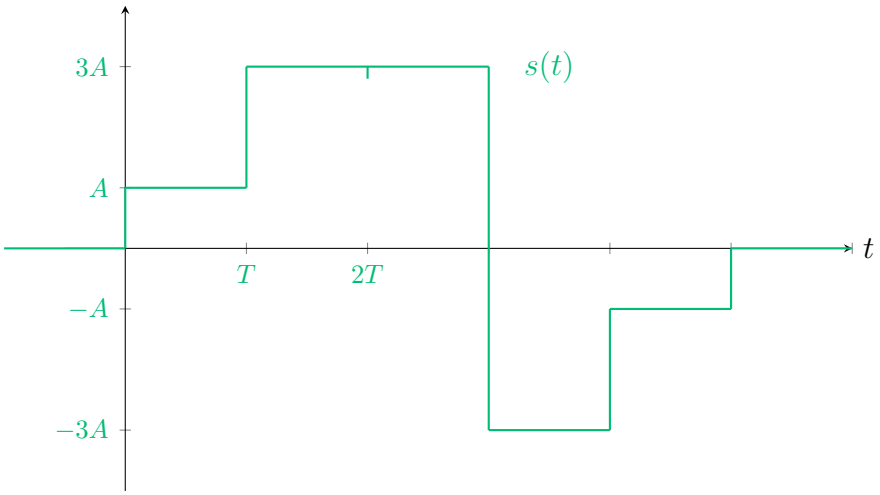
M: NÚMERO M-ARIO

MENSAJE

$$\{b_n\} = \{\ \underbrace{0,0}_{s_2(t)}\ ,\ \underbrace{1,0}_{s_3(t)}\ ,\ \underbrace{1,0}_{s_3(t)}\ ,\ \underbrace{1,1}_{s_0(t)}\ ,\ \underbrace{0,1}_{s_1(t)}\ \}$$

SÍMBOLO m
$m \in [0, ..., M-1]$

Agrupando de a 2 bits hay 4 símbolos posibles. La señal transmitida (modulada 4-aria) para el mensaje de ejemplo anterior es:



En general, cada uno de los M símbolos representa a una cantidad de $\log_2(M)$ bits.

Observaciones importantes:

1. M en general es una potencia de 2 ($\Rightarrow$ $\log_2(M) \in \mathbb{N}$)
2. Dado un tiempo de símbolo T (constante), entonces: $M \uparrow \Leftrightarrow \uparrow \log_2(M)$
   $\Rightarrow \uparrow$ la tasa de bits de transmisión.
3. Cualquier combinación de M señales diferentes es válida (aunque no necesariamente "buena").

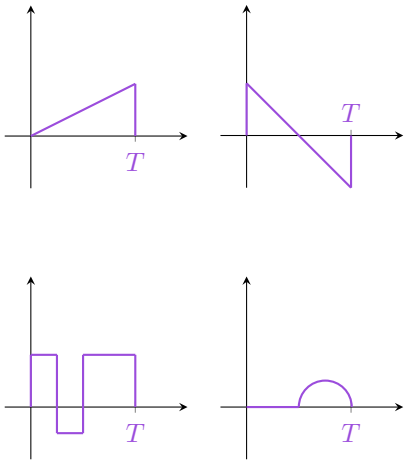
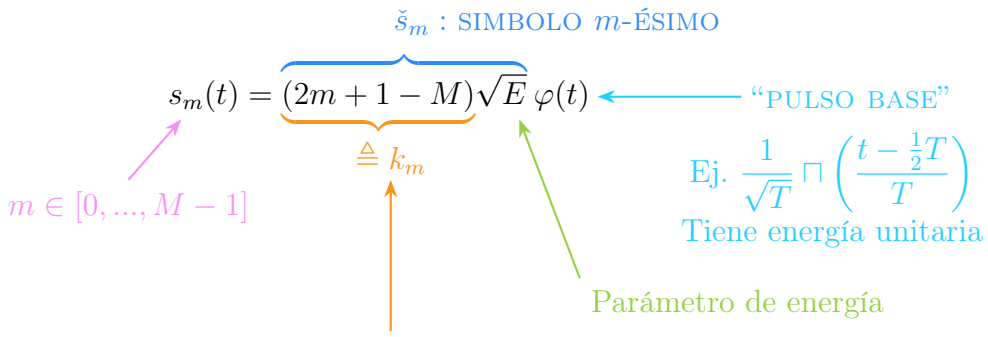


Figura 11.1.1: Ejemplo de modulación "no tan buena".

Cápsula 11.2 Modulación M-PAM (Pulse Amplitude Modulation)



$M = 2: \quad k_m = \{\pm 1\} \Leftrightarrow$ NRZ (2-PAM)
$M = 4: \quad k_m = \{\pm 3, \pm 1\}$
$M = 8: \quad k_m = \{\pm 7, \pm 5, \pm 3, \pm 1\}$

ENERGÍA MEDIA POR SÍMBOLO: E_s

$$
\begin{aligned}
E_s &= \sum_{m=0}^{M-1} p_m E_m && \text{(válido en general)} \\
&= \frac{1}{M} \sum_m \int_0^T s_m^2(t)dt \\
&= \frac{1}{M} \sum_m \check{s}_m^2 \underbrace{\int_0^T \varphi(t)dt}_{=1} \\
&= \frac{1}{M} \sum_m \check{s}_m^2 && \text{(bastante general)} \\
&= \frac{E}{M} \sum_m (2m+1-M)^2 && \text{(específico de } M\text{-PAM)} \\
&= \ldots = \frac{E}{3}(M^2-1)
\end{aligned}
$$

© 2010–2025 Christian Oberli

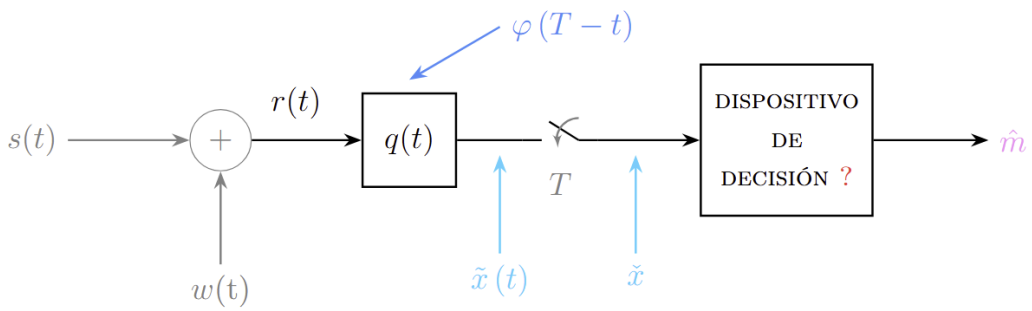
Cápsula 11.3 Honors?

Cápsula 11.4 Receptor M-ario simplificado y diagrama de señales

En el caso de M-PAM notamos que:

$$s_m(t) = k_m\sqrt{E}\,\varphi(t). \tag{11.4.1}$$

Por ello, $x_m(t)$ y $\check{x}_m$ pueden ser descritos como múltiplos de la salida $x(t)$ y $\check{x}$ de un F.A. normalizado.



Para determinar $q(t)$ podemos normalizar cualquier $s_m(t)$ (y resulta el mismo F.A.):

$$q(t) = \frac{s_m(T-t)}{\sqrt{\int_0^T s_m^2(T-t)dt}} = \frac{\check{s}_m\varphi(t)}{\sqrt{\check{s}_m^2\int_0^T \varphi(t)dt}} \tag{11.4.2}$$

$$= \varphi(T-t) \tag{11.4.3}$$

¿Cómo se puede usar $\check{x}$ para tomar la decisión M-aria de qué símbolo M-PAM fue transmitido?

$\check{x}$ a la salida del muestreador es:

$$\check{x} = [s(t) + w(t)] * q(t)\Big|_{t=T} \tag{11.4.4}$$

$$= \check{s}_i \varphi(t) * q(t)\Big|_{t=T} + w(t) * q(t)\Big|_{t=T} \tag{11.4.5}$$

$$= \check{s}_i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\varphi(T - t + \tau)d\tau\Big|_{t=T} + \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varphi(T - t + \tau)d\tau\Big|_{t=T} \tag{11.4.6}$$

$$= \check{s}_i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{11.4.7}$$

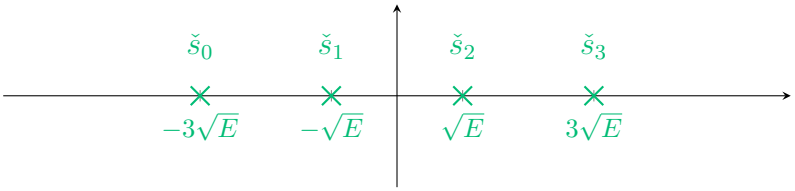
$$\check{x} = \check{s}_i + \check{w} \longrightarrow \check{w} \sim N\left(0, \tfrac{N_0}{2}\right) \tag{11.4.8}$$

$= 1$

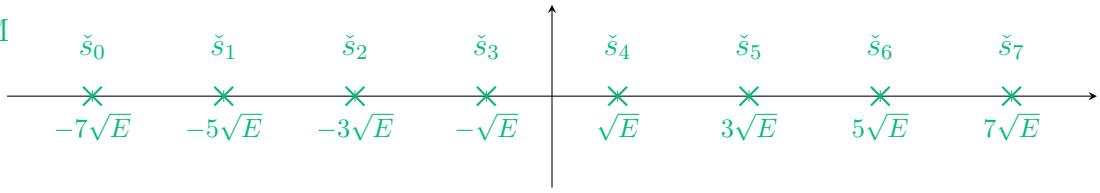
Amplitud del símbolo que fue transmitido $\Leftrightarrow (2i + 1 - M)$

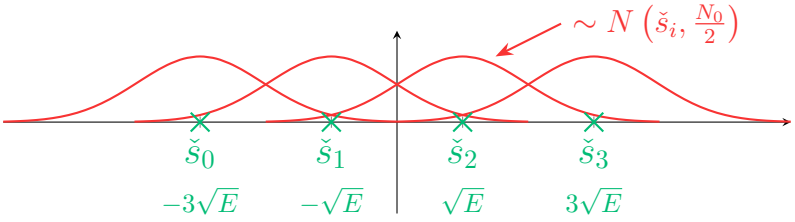
DIAGRAMA DE SEÑALES:

4-PAM



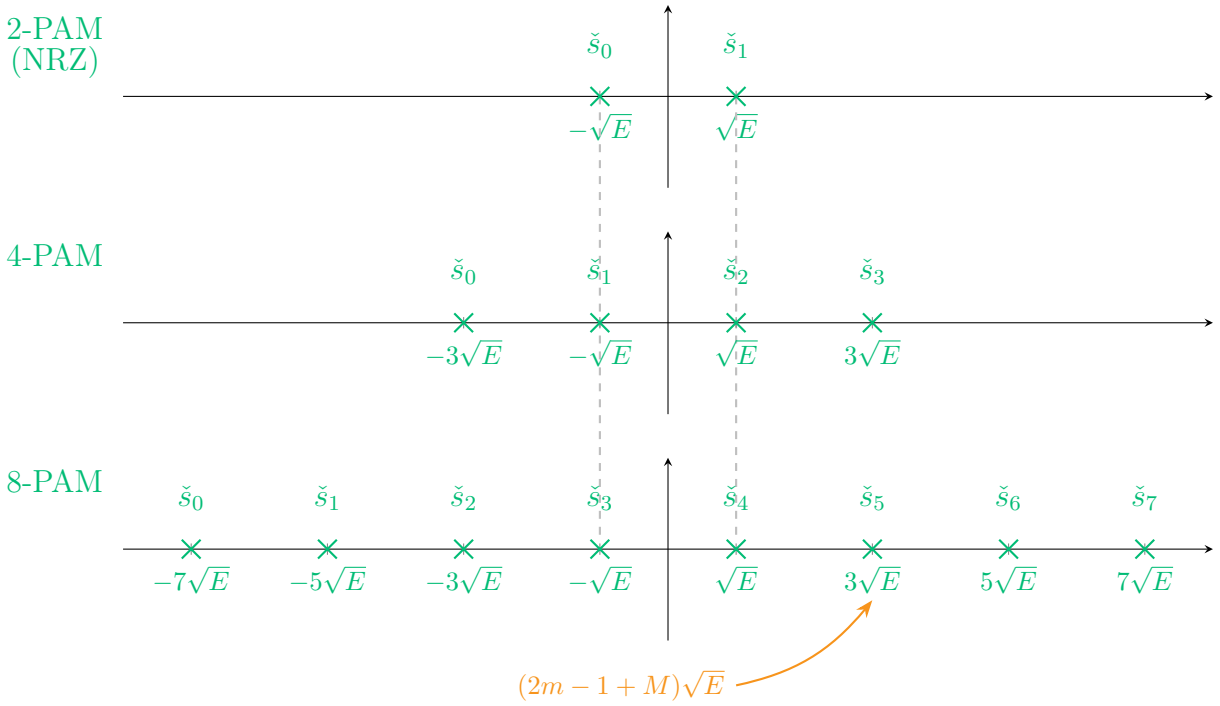
8-PAM





Cápsula 11.5 — Honors?

Cápsula 11.6 — Energía media por símbolo



Habiamos visto:

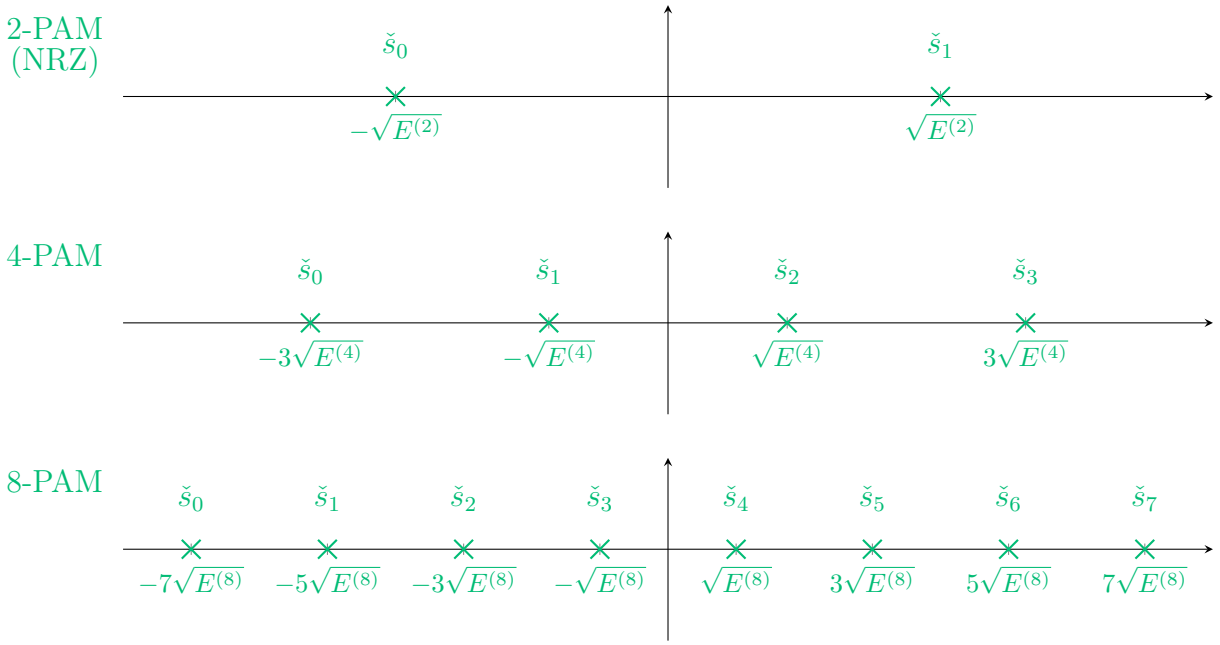
$\uparrow M \Rightarrow \uparrow E_s$ y $\uparrow \log_2(M) \Rightarrow \uparrow$ tasa de bits (a T cte)

Para mantenter E_s constante cuando varía M, hay que redefinir E para cada cada M:

$$E = \frac{3E_s}{M^2 - 1} \tag{11.6.1}$$

Entonces: $\uparrow$M $\Rightarrow \downarrow E$

Así, a mismo E_s:



Cápsula 11.7 — Energía media por bit (E_b) vs. E_s vs. M

Pese a la normalización de energía por símbolo de la cápsula anterior, es deseable, en la práctica, que cada bit reciba la misma cantidad de energía, sin importar el número M-ario utilizado.

Por ello, E_s correspondientes a distintos M aún no son comparables porque representan cantidades distintas de información (bits de mensaje).

$$E_s = \log_2(M) E_b \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_b = \frac{E_s}{\log_2(M)}} \tag{11.7.1}$$

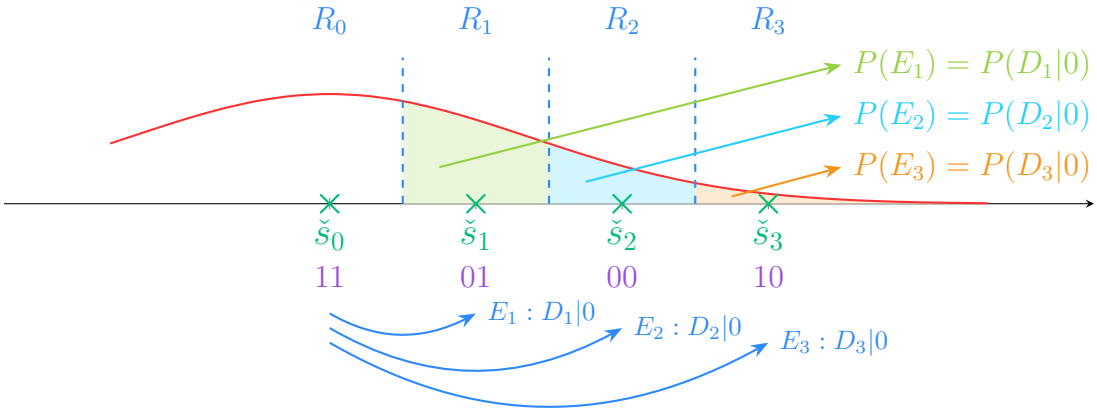
Así, para M-PAM:

$$E = \frac{3E_s}{M^2 - 1} = \frac{3\log_2(M)}{M^2 - 1} E_b \tag{11.7.2}$$

La expresión anterior:

- Es una condición esencial (pero no suficiente) para poder comparar modulaciones M-PAM con distintos valores de M.
- E_b es parejo (igual) $\forall M$, pero ello no implica una tasa de bits constante.

Cápsula 11.8 — Eventos de error y codificación Gray



OBSERVACIÓN CLAVE: Errores de símbolo adyacentes tienen mayor probabilidad ⇒ CODIFICACIÓN GRAY

CÓDIGO GRAY: Asocia $\log_2(M)$-tuplas a símbolos de tal forma que símbolo vecinos (adyacentes) sólo difieran en 1 bit. ⇒ Minimiza la probabilidad de error de bit.

En comunicaciones M-arias:

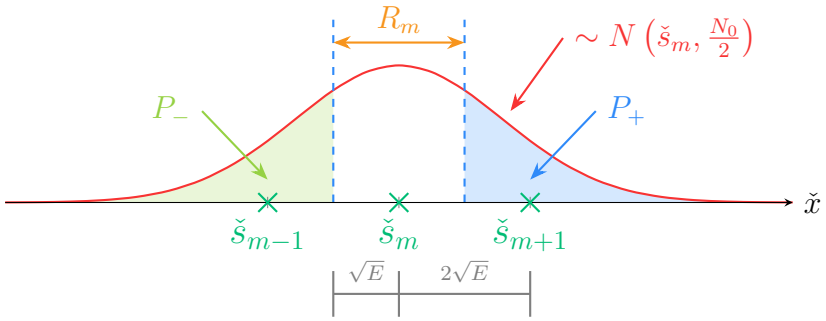
1. Los errores son errores de símbolo, no de bit.
2. Hay distintos tipos de error de símbolo, y sus probabilidades son en general distintas.
3. Un error de símbolo puede representar entre uno y $\log_2(M)$ bits erróneos.
4. La probabilidad de error que se calcula es una PROBABILIDAD DE ERROR DE SÍMBOLO (P_s) y no de bit (P_b). (Conocido P_s se puede determinar P_b.)

Cápsula 11.9 Probabilidad de error de símbolo de M-PAM

$$P_s = \sum_{m=0}^{M-1} P(\check{x} \notin R_m | \check{s}_m) \cdot p_m \tag{11.9.1}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P(\check{x} \notin R_m | \check{s}_m) \tag{11.9.2}$$

Aplicado al caso M-PAM:



En M-PAM:

$$P(\check{x} \notin R_m | \check{s}_m) = \begin{cases} P_+ & \text{si} \quad m = 0 \\ P_+ + P_- & \text{si} \quad m \in [1, ..., M-2] \\ P_- & \text{si} \quad m = M-1 \end{cases} \tag{11.9.3}$$

Entonces, de (11.9.2):

$$P_s = \frac{1}{M} \left[P_+ + (M-2)(P_+ + P_-) + P_- \right] \tag{11.9.4}$$

$$= \frac{M-1}{M}(P_+ + P_-) < \frac{2(M-1)}{M} P_- \tag{11.9.5}$$

$$= \frac{2(M-1)}{M} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{0 - \sqrt{E}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}} \right) \right] \tag{11.9.6}$$

$$= \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \tag{11.9.7}$$

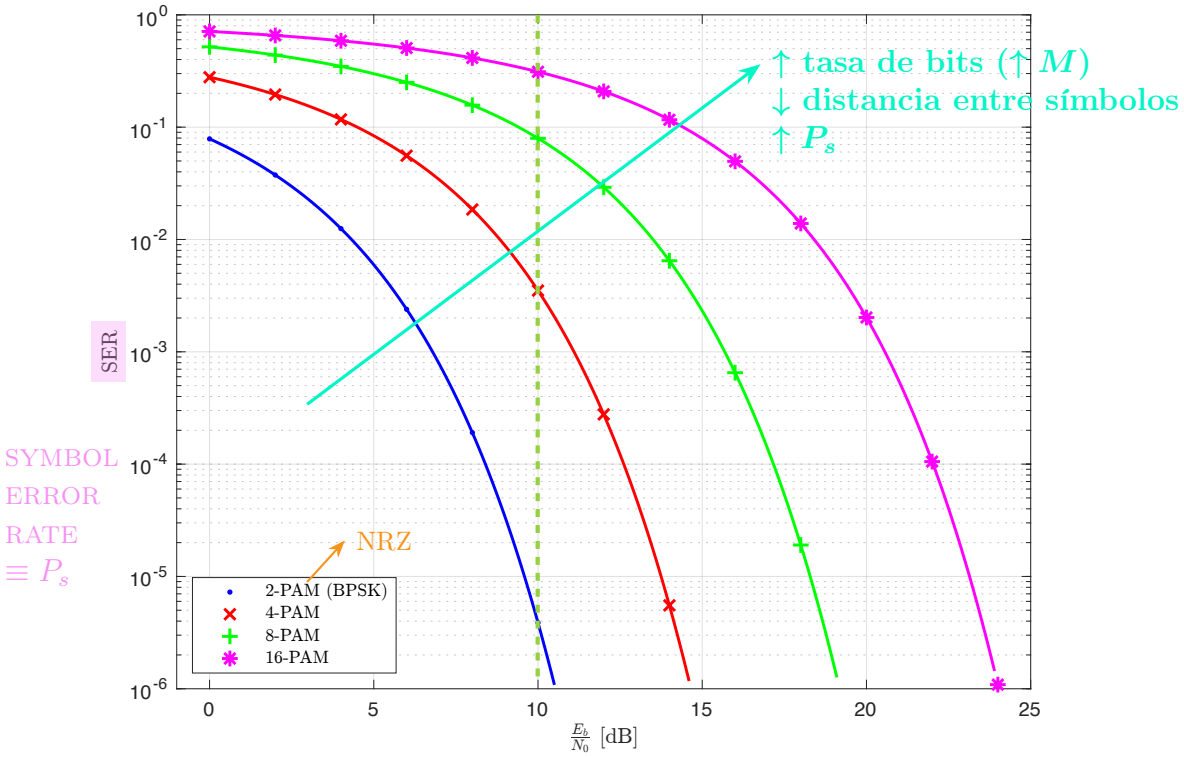
© 2010–2025 Christian Oberli

Corrigiendo lo anterior por la relación entre E y E_s:

$$P_s = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{E_s}{N_0}}\right) \tag{11.9.8}$$

y reemplazando E_s por E_b:

$$P_s = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3\log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{11.9.9}$$



Chequeo de sanidad:

$$\frac{E_b}{N_0} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{erfc}(0) \to 1 \tag{11.9.10}$$

$$\Rightarrow P_s \to \frac{M-1}{M} \tag{11.9.11}$$

$$\Rightarrow \text{Intuitivamente satisfactorio} \tag{11.9.12}$$

Cápsula 11.10 Probabilidad de error de bit de modulaciones M-arias

P_s correspondientes a distintos valores M-arios no son compatibles porque son probabilidades de eventos distintos: una misma tasa de error (P_s) corresponde a distintas cantidades de información ($\log_2(M)$).

Si se usa código Gray, entonces eventos de error de 1 bit son mucho más probables que eventos de error de 2 o más bits (válido para $P_s < 10^{-2}$).

Sigue de esto que eventos de error de símbolo son esencialmente también eventos de error de 1 bit. Luego:

- Si P_s es la proporción de símbolos erroneos,
- y la TX tiene $\log_2(M)$ más bits que símbolos,
- y cada error de símbolo es también un error de un bit.

Entonces, la proporción de bits erróneos deber ser $\dfrac{1}{\log_2(M)}$ veces la proporción de errores de símbolo.

$$P_b = \frac{P_s}{\log_2(M)} \tag{11.10.1}$$

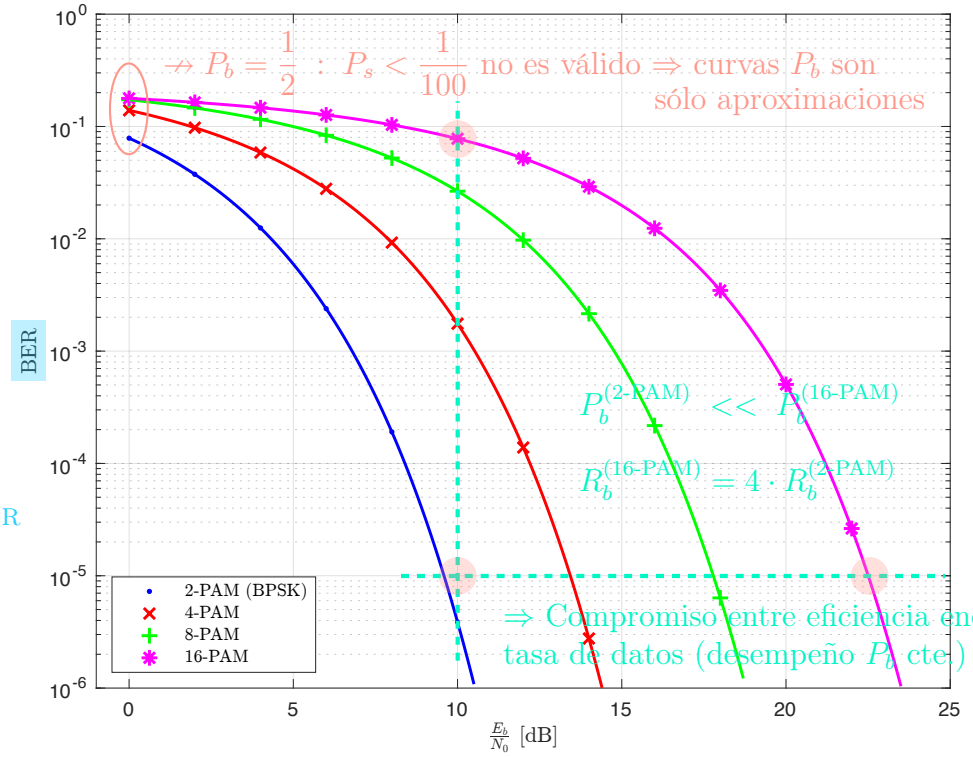
Con ello, la $P\left(\dfrac{E_b}{N_0}\right)$ de M-PAM es:

$$P_b^{\text{M-PAM}}\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \frac{M-1}{M\log_2(M)}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3\log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{11.10.2}$$

Chequeo de sanidad:

$$M = 2 \Rightarrow P_b = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{11.10.3}$$

BIT ERROR RATE



© 2010–2025 Christian Oberli