Prof. Christian Oberli
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Pontificia Universidad Católica de Chile

Guía de ejercicios

Los ejercicios de esta guía han sido diseñados y escogidos cuidadosamente por su valor educativo. Sacarles buen provecho es responsabilidad del estudiante. Si no puede resolver algún problema sin ayuda, discútalo con un compañero, con un ayudante o con el profesor, pero *no copie*.

Entregar como propio trabajo copiado total o parcialmente de otra fuente se denomina *plagio* y es una falta ética grave. Lo que Ud. entregue debe ser fruto de su propio trabajo y debe reflejar su propio dominio de la materia.

El trabajo que cada alumno realice con esta guía se regirá por el Código de Honor de la Pontificia Universidad Católica de Chile[1] y por el código de ética de la IEEE[2].

Índice

1. Modulación analógica **3**

1.1. Módulo 2: AM 3

1.2. Módulo 3: BLD 7

1.3. Módulo 4: BLU 9

1.4. Módulo 5: FM 11

1.5. Problemas Mixtos 22

2. Procesos estocásticos y ruido térmico **27**

2.1. Módulo 6: Procesos estocásticos 27

2.2. Módulo 7: Ruido térmico 34

3. Comunicaciones digitales binarias de banda base (track standard) **36**

3.1. Módulo 8: Receptor óptimo con filtro adaptado 36

3.2. Módulo 9: Probabilidad de error de bit de modulaciones binarias (receptor de una rama) 36

3.2.1. Mixtos filtro adaptado y P_b 36

3.2.2. Sólo P_b 41

3.3. Otros 45

[1] `https://www.uc.cl/codigo-de-honor/`

[2] `https://www.ieee.org/about/corporate/governance/p7-8.html`

4. Comunicaciones digitales binarias de banda base (track avanzado) 50

4.1. Módulo 9: Probabilidad de error de bit de modulaciones binarias (receptor de dos ramas) . . . 50

4.1.1. Mixtos filtro adaptado y P_b . . . 50

4.1.2. Sólo P_b . . . 53

4.2. Otros . . . 54

5. Módulo 11: Modulaciones M-arias de banda base (M-PAM) 56

6. Módulo 12: Envolventes complejas 63

6.1. Señales determinísticas . . . 63

6.2. Procesos estocásticos de pasabanda . . . 66

7. Modulación de pasabanda 70

7.1. Módulo 13: Modulaciones binarias de pasabanda . . . 70

7.2. Módulo 14: Modulaciones M-arias de pasabanda . . . 72

7.2.1. QPSK y similares . . . 72

7.2.2. Otras modulaciones M-arias . . . 75

7.3. Distorsiones . . . 83

7.4. Otros . . . 88

8. Módulo 15: Sistemas de comunicaciones 91

9. Módulo 16: Límites fundamentales 93

10. Otros 100

1. Modulación analógica

1.1. Módulo 2: AM

Problema 1: [1] (10 puntos) La señal AM dada por:

$$s(t) = A_c[1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

es aplicada al sistema que se muestra en la Figura 1.

(a) (8 puntos) Demuestre que la salida del sistema permite recuperar la señal $m(t)$. Asuma que $|k_a m(t)| < 1 \ \forall t$, que el contenido de frecuencia de la señal de mensaje $m(t)$ está limitado al intervalo $-W \leq f \leq W$, que la frecuencia portadora $f_c > 2W$, y que los parámetros del filtro pasabajos son apropiados.

(b) (2 puntos) ¿Qué ventajas tiene esta arquitectura sobre el detector de envolvente? ¿Cuales son sus desventajas?

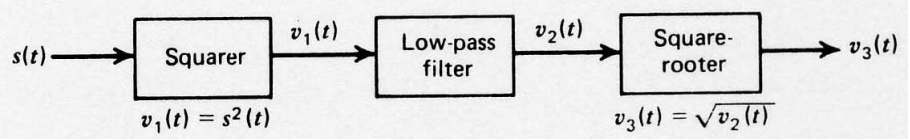


Figura 1: Diagrama de bloques del detector del Problema 1.

Problema 2: (5 puntos) Diseñe un detector de envolvente para *La Perla del Dial AM* ($f_c =$ 1330 kHz). Considere un ancho de banda $W = 4$ kHz para la señal modulante y una resistencia de conducción del diodo $r_f = 10\ \Omega$.

Problema 3: (8 puntos) El mensaje $m(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2\pi f_m t + \frac{\pi}{3}\right)$ es aplicado a un modulador AM para medir el índice de modulación. Ud. observa la señal modulada en el osciloscopio y determina que la amplitud máxima de oscilación de la señal es 4,6 V y que las oscilaciones mínimas tienen amplitud 0,8 V.

(a) (4 puntos) Determine la sensibilidad de amplitud del modulador.

(b) (4 puntos) ¿Cual es la eficiencia de la modulación anterior?

Problema 4: (12 puntos) [2] Un modulador AM es alimentado con la señal de audio

$$m(t) = \frac{1}{5} \sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_2 t),$$

donde $f_1 = 500$ Hz, $f_2 = 500\sqrt{2}$ Hz. Además, $A_c = 100$ V y considere $k_a = 1\ \text{V}^{-1}$.

1. (3 puntos) Bosqueje la forma de onda de la señal modulada.
2. (3 puntos) Calcule el índice de modulación.
3. (3 puntos) Determine y bosqueje el espectro de la señal modulada.
4. (3 puntos) Evalúe la potencia de la señal modulada, si esta es alimentada a una linea de transmisión con impedancia característica de 50 Ω.

Problema 5: (8 puntos)

[Couch 6ª Ed., 5-6] Un transmisor AM usa un multiplicador de dos cuadrantes de forma que su señal transmitida está descrita por

$$s(t) = \begin{cases} Ac\left[1 + m(t)\right]\cos(\omega_c t) & , m(t) \geq -1 \\ 0 & , m(t) < -1 \end{cases}$$

Asuma que la transmisión es modulada por

$$m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$$

donde A_m es ajustado para obtener 120% de modulación positiva. Evalúe el espectro de esta señal AM en términos de A_c, f_c y f_m. Esboce su resultado.

Problema 6: (5 puntos) Se tiene una modulación AM con índice de modulación $\mu = 0,63$ y sensibilidad de amplitud $k_a = 0,82\ \mathrm{V}^{-1}$. ¿Cual es la amplitud mínima que una señal modulante $m(t)$ arbitraria puede tener para evitar sobremodulación?

Problema 7: (10 puntos) Considere un dispositivo electrónico no-lineal cuya relación entrada-salida está dada por

$$y(t) = ax(t) + bx^2(t).$$

(a) (4 puntos) Si el voltaje de entrada es $x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)$, explique cómo este dispositivo puede ser usado para generar una modulación AM. Haga un diagrama de bloques del modulador AM completo, especificando todos los bloques, así como las señales de entrada y salida de cada bloque.

(b) (1 puntos) ¿Cual es la sensitividad de amplitud de este modulador?

(c) (2 puntos) Considere $A_c = 10$, $a = 4$, $b = 1$ y calcule el índice de modulación μ con $m(t) = \frac{3}{2}\cos(2\pi f_m t)$.

(d) (3 puntos) Explique cómo el mismo dispositivo podría ser utilizado para recuperar una señal de mensaje $m(t)$ a partir de una señal AM.

Problema 8: (20 puntos) Se desea extender la modulación AM monofónica clásica para permitir transmisión de audio estéreo. El audio estéreo está compuesto por los canales izquierdo, $m_L(t)$, y derecho, $m_R(t)$, ambos de ancho de banda W. La extensión debe ser hecha de tal manera que los receptores monofónicos existentes sigan siendo funcionales con las transmisiones estéreo. Su tarea es diseñar, a nivel de diagrama de bloques, un transmisor y un receptor AM estéreo que cumplan con el criterio de retro-compatibilidad. En cada caso, Ud. dispone de:

- el conjunto de bloques dados en el listado que sigue, cada uno con un determinado costo en puntos, y de
- 20 puntos de crédito para "comprar" bloques.

Los bloques disponibles son:

Modulador AM monofónico tradicional (costo por unidad: 3 puntos). Posee oscilador de portadora con frecuencia f_c y mezclador internos.

Detector de envolvente monofónico tradicional (costo por unidad: 3 puntos). Los componentes internos no deben ser especificados.

Filtros pasabajo, pasabanda y pasaalto ideales (costo por unidad: 1 punto). El uso de estos dispositivos requiere especificar la o las frecuencias de corte.

Transformador de Hilbert (costo por unidad: 1 punto). Este componente también puede cumplir la función de retrasar 90° una portadora.

Oscilador de frecuencia programable (costo por unidad: 1 punto). La señal generada es $A\cos(2\pi f_x t)$. La frecuencia f_x y la amplitud A deben ser especificadas.

Multiplicador (costo por unidad: 1 punto). Puede ser usado como ganancia (alimentado por voltaje continuo, indicar valor) o mezclador (alimentado por oscilador para generar traslación espectral).

Sumador (costo por unidad: 1 punto).

Antena (costo por unidad: 0 puntos). Sin antenas la comunicación no se puede realizar y la solución es incorrecta.

Si su solución es correcta, recibirá todo el puntaje de crédito sobrante como puntaje final del problema. Si su solución es incorrecta, su puntaje será igual al puntaje conjunto de todos los bloques usados "correctamente en el sentido de resolver eficientemente el problema de diseño planteado".

Problema 9: (10 puntos) Se tiene un detector de envolvente para AM. En función de los valores de R_s, R_l, C y r_f que caracterizan al detector y del ancho de banda W de las señales modulantes, defina criterios cuantitativos para determinar el rango de frecuencias portadoras para las que este receptor es adecuado. Aplique sus criterios al caso con $R_s = 80\ \Omega$, $R_l = 50\ \text{k}\Omega$, $C = 5\ \text{nF}$, $r_f = 20\ \Omega$ y $W = 4\ \text{kHz}$.

Problema 10: (8 puntos) Diseñe un receptor coherente para una modulación AM de una señal modulante $m(t)$ cuyo ancho de banda está limitado a $|f| \leq \frac{W}{2}$. El diseño debe ser a nivel de diagrama de bloques, utilizando filtros lineales, multiplicadores, ganancias, osciladores, etc. Todos los bloques deben estar completamente especificados y la portadora no puede ser eliminada mediante filtros, sino que debe ser cancelada. La cancelación puede ser imperfecta transitoriamente, pero debe ser perfecta en estado de régimen. Puede asumir que los parámetros de amplitud y frecuencia portadora de la señal AM recibida son perfectamente conocidos, pero no su fase. Si lo necesita, también puede asumir que la modulación AM nunca presenta sobremodulaciones.

Problema 11: (5 puntos) En el osciloscopio se observa la modulación AM de un tono puro que se muestra en la Figura 2. Determine su factor de modulación.

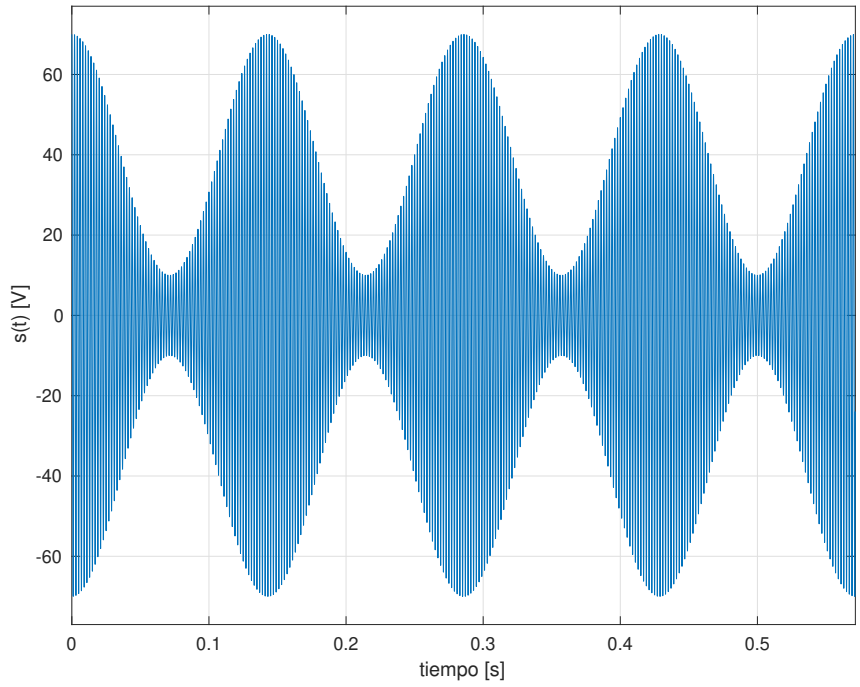


Figura 2: Modulación AM de un tono puro, Problema 11.

Problema 12: (5 puntos) En el osciloscopio se observa la modulación AM de un tono puro que presenta la Figura 3. Determine la eficiencia energética de la modulación.

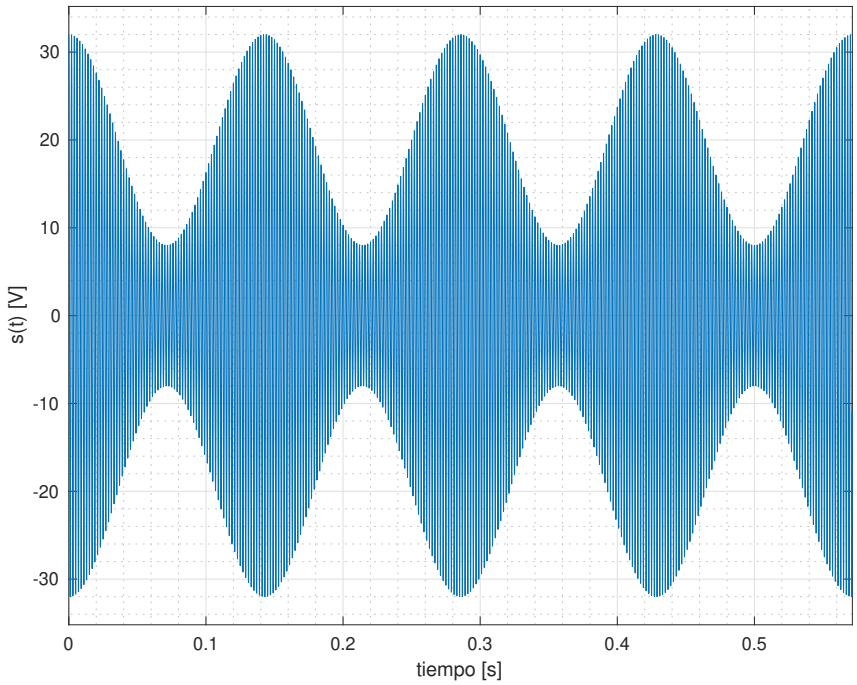


Figura 3: Modulación AM de un tono puro, Problema 12.

1.2. Módulo 3: BLD

Problema 13: (12 puntos) PSK es una de las modulaciones clásicas para transmitir información digital. La idea es muy sencilla: para enviar un "0", se transmite durante T segundos una portadora con fase cero; para enviar un "1", se transmite durante T segundos una portadora con fase π. Las señales transmitidas para 0 y 1 se describen matemáticamente así:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t) \cdot \sqcap\left(\frac{t}{T}\right) \\ s_1(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \pi) \cdot \sqcap\left(\frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

La función $\sqcap(\cdot)$ cumple la función de limitar las señales a la duración de T segundos.

Para enviar una secuencia binaria de ceros y unos que represente un mensaje más largo, se concatenan las señales anteriores, debidamente retardadas en múltiplos enteros de T segundos. Así, la señal transmitida es:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{b_n}(t - nT)$$

donde b_n es el valor del n-ésimo bit transmitido. La Figura 4 ilustra la señal transmitida $s(t)$ para el caso de la secuencia 10010110.

Ahora el problema: Determine el espectro de frecuencia de una transmisión PSK para una secuencia binaria $\{b_n\}$ dada.

Indicación: Sus conocimientos de modulación analógica son todo lo que necesita para dicho análisis. Observe que $(-1)^{b_n} = \pm 1$, y utilice este hecho para reescribir $s_0(t)$ y $s_1(t)$ en un formato afín a una de las modulaciones analógicas estudiadas.

Problema 14: (8 puntos) Se desea demodular una señal BLD-SP mediante un receptor de Costas. Desafortunadamente, el VCO disponible en el pañol de instrumentos tiene un desplazamiento de portadora de δ Hz con respecto a la frecuencia de la transmisión que es f_c Hz. Así, la salida del VCO tiene frecuencia $f_c' = f_c + \delta - kV_{\text{in}}$, con V_{in} igual al voltaje de entrada al VCO y k una constante de sensibilidad dada y positiva. Determine si este VCO sirve o no para ser usado en el receptor de Costas.

Problema 15: (15 puntos) El *Tambor de la Revolución* es una radioemisora clandestina que emite BLD-SP en onda corta. Pese a que el Tambor ya cuenta con millones de auditores en el mundo, una migración hacia transmisiones *stereo* permitiría diseminar la *Causa* entre un público aún mas amplio. El principal desafío para ello es migrar a stereo sin perder a los auditores actuales por obsolescencia de sus receptores monofónicos. Para ello, se propone una solución que considera las siguientes dos medidas:

1. Utilizar el transmisor existente para modular una portadora $A_c \cos(2\pi f_c t)$ con la suma de los canales de audio derecho e izquierdo, $m_r(t) + m_l(t)$.
2. Comprar un nuevo modulador BLD-SP, idéntico al anterior, pero alimentarlo con la portadora en cuadratura ($A_c \sin(2\pi f_c t)$). Esta portadora sería modulada con la diferencia de los canales izquierdo y derecho, $m_r(t) - m_l(t)$.

(a) (2 puntos) Utilizando sumadores, multiplicadores, un sólo oscilador y un sólo desfasador, haga un diagrama de bloques del nuevo transmisor.

(b) (1 puntos) Describa matemáticamente la señal que sale al aire.

(c) (2 puntos) Determine la envolvente de la señal de (b).

(d) (7 puntos) Proponga un demodulador que recupere las señales $m_r(t)$ y $m_l(t)$ y que a la vez permita que los auditores originales puedan seguir escuchando al Tambor con sus receptores monofónicos. Dibuje el diagrama de bloques del receptor propuesto utilizando sólo sumadores, multiplicadores, filtros, un oscilador y un desfasador. En el caso de usar filtros, especifique su pasabanda.

Indicación: Asuma sincronización perfecta y considere la estructura del Loop de Costas como punto de partida.

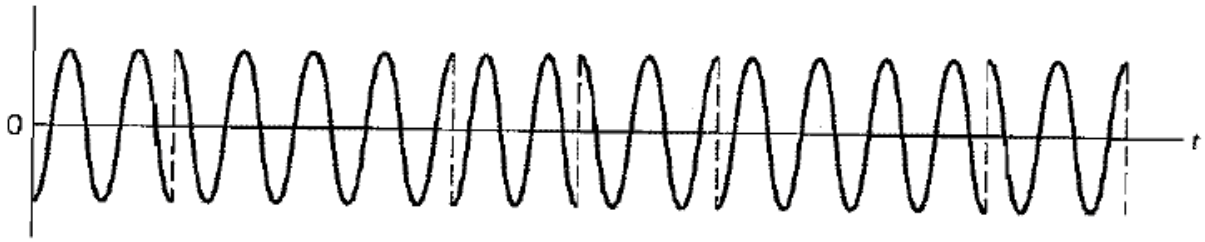


Figura 4: Modulación PSK de la secuencia binaria 10010110 del Problema 13.

(e) (3 puntos) Discuta brevemente: ¿Como compara la transmisión monofónica original con la nueva transmisión en stereo en términos de eficiencia espectral? Indique claramente sus supuestos.

Problema 16: (7 puntos) Considere un dispositivo electrónico no-lineal cuya relación entrada-salida está dada por

$$y(t) = ax^3(t),$$

con a un parámetro constante y $x(t)$ la señal de entrada al dispositivo.

(a) (5 puntos) Determine cómo este dispositivo puede ser usado para generar una modulación BLD-SP a partir de una señal modulante $m(t)$, y bosqueje el diagrama de bloques del modulador correspondiente.

Indicación: Explore el uso de una señal $x(t)$ con la estructura $x(t) = c(t) + m(t)$ y $c(t)$ una señal adecuada determinada por Ud.

(b) (2 puntos) ¿Es posible generar una modulación AM mediante el método de (a)?

Problema 17: (10 puntos) Considere un *Loop de Costas* cuyo VCO entrega en su salida la señal $A_c \cos(2\pi f_c t + \phi)$. El desfasador que genera el $\sin(\cdot)$ para la demodulación en cuadratura tiene un defecto tal que entrega una sinusoide desbalanceada en magnitud por un factor α y en fase por un ángulo θ, resultando la señal $\alpha A_c \sin(2\pi f_c t + \phi + \theta)$ como alimentación al mezclador de cuadratura, con $\alpha > 0$ y ϕ pequeño pero variante en el tiempo con la dinámica del *loop*.

Discuta el efecto que tienen α y θ sobre la capacidad del *Loop de Costas* para recuperar el mensaje original. Analice los escenarios $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, θ pequeño, $\theta \approx \pm\frac{\pi}{2}$ y $\theta \approx \pi$.

1.3. Módulo 4: BLU

Problema 18: [2] (10 puntos) El diagrama de la Figura 5 muestra el método de Weaver para generar modulaciones BLU.

(a) (7 puntos) Encuetre la expresión matemática que describe cada una de las diez señales indicadas en las salidas de los bloques del circuito.

Indicación: Puede ser más conveniente expresarlas en el dominio de la frecuencia.

(b) (3 puntos) Demuestre que $s(t)$ es una señal BLU.

Nota: B es el ancho de banda del mensaje $m(t)$ y f_0 es la nomenclatura para la fecuencia de los osciladores.

Problema 19: (5 puntos) Analice brevemente y responda: ¿Es posible usar un receptor de Costas para demodulación coherente de señales BLU?

Problema 20: (10 puntos)

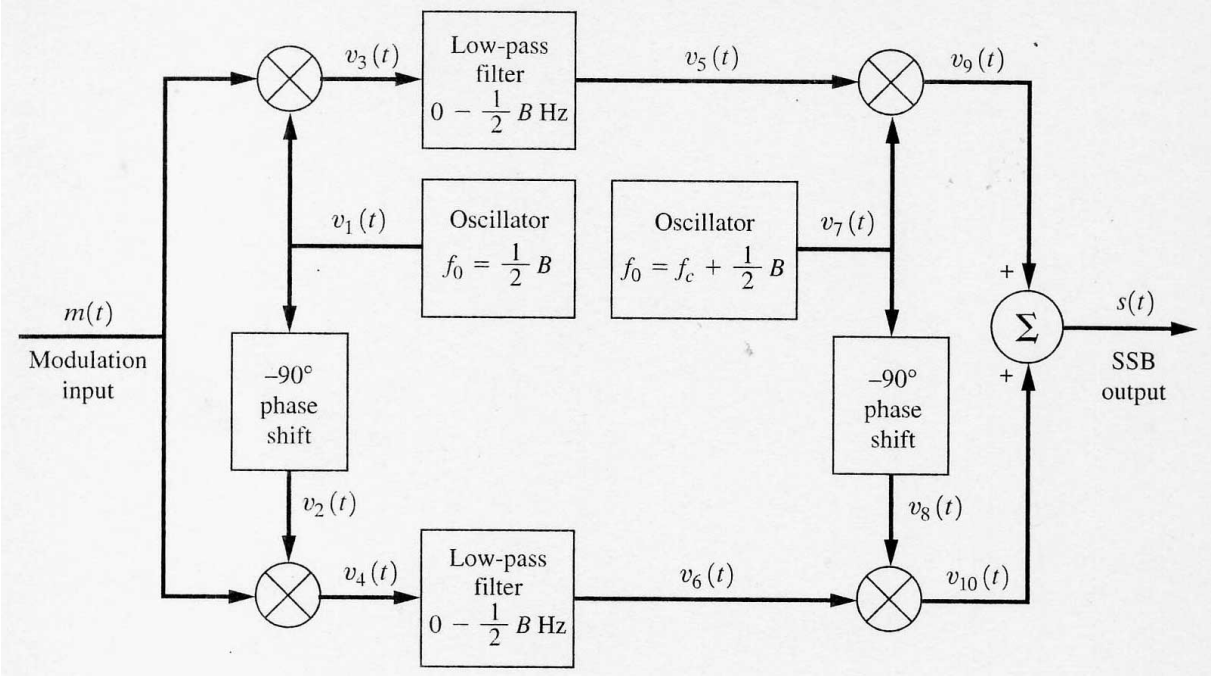
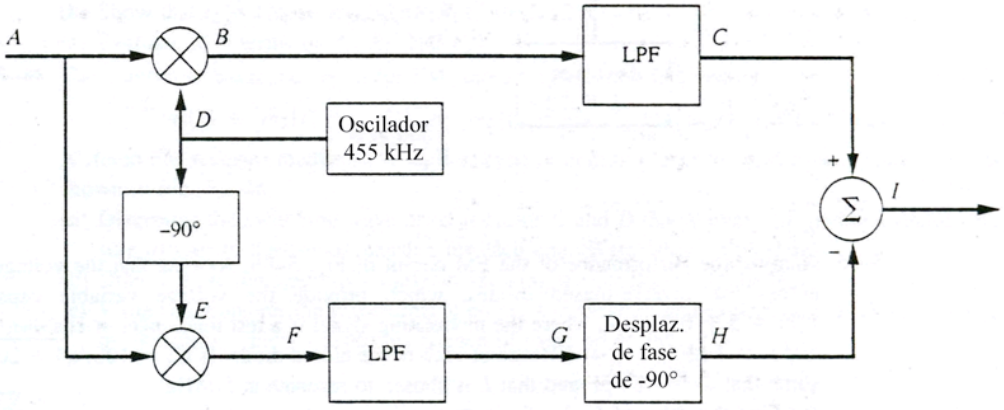


Figura 5: Diagrama de bloques del modulador BLU del Problema 18.

En la figura se muestra un detector SSB-AM tipo puesta en fase. Este circuito se conecta a la salida de frecuencia intermedia de un receptor para que permita recepción SSB.



a) Determine si este detector es sensible a señales LSSB ó USSB. ¿Cómo se modificaría el receptor para que reciba señales SSB con bandas laterales alternas (de tipo opuesto)?

b) Analice los requisitos de frecuencia intermedia y de filtro pasabajos si el ancho de banda de la señal SSB en el punto A es de 3 [kHz].

Problema 21: [3] (10 puntos) Considere un modulador BLS por el método de cancelación. La entrada es $m(t)$ y la salida $s(t)$.

(a) (2 puntos) Dibuje el diagrama de bloques del modulador.

(b) (8 puntos) ¿Si en vez de $m(t)$ se usa la transformada de Hilbert de $m(t)$ como entrada al modulador ($\hat{m}(t)$), que será la salida del modulador? ¿Se trata también de una señal BLU? Descríbala en términos de $s(t)$.

Problema 22: (10 puntos) La señal $m(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2\cos(2\pi f_2 t)$ es alimentada a un modulador BLS cuya portadora es $A_c \cos(2\pi f_c t)$, con $f_1 < f_2 \ll f_c$.

(a) (5 puntos) Determine la señal BLS modulada, $s(t)$.
Indicación: Recuerde la función de transferencia del transformador de Hilbert.

(b) (5 puntos) Asuma que la portadora del receptor tiene amplitud B_c y que opera con un desplazamiento de frecuencia de Δ_f Hertz, esto es, la portadora es

$$p(t) = B_c \cos[2\pi(f_c + \Delta_f)t]).$$

Determine la señal de mensaje recuperada que entrega el demodulador BLS en su salida y bosqueje la respuesta de magnitud de dicha señal.

Problema 23: (5 puntos) Demuestre que la modulación BLU es un proceso lineal.

Problema 24: (5 puntos) Determine la veracidad de la siguiente afirmación: Si una señal modulante $m(t)$ es par, entonces la señal modulada BLI también lo es. ¿Cómo es el caso de BLS?

Problema 25: (10 puntos) Considere un modulador BLI por el método de cancelación. La señal modulante es $m(t) = \text{sinc}\,(Wt)$, con W un parámetro en Hertz. La señal modulada es $s(t)$.

(a) (2 puntos) Dibuje el diagrama de bloques del modulador.

(b) (8 puntos) Determine $s(t)$.

Problema 26: (8 puntos) La señal $s(t)$ resulta de modular $m(t) = W\text{sinc}\,(Wt)$ en banda lateral superior mediante el método de cancelación. Determine $s(t)$.

1.4. Módulo 5: FM

Problema 27: [1] (5 puntos) La frecuencia instantánea de una señal FM está dada por:

$$f(t) = f_c + \Delta f \cdot \ \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$$

Determine el espectro de frecuencia de esta señal FM y bosquéjelo.

Problema 28: [1] (10 puntos) La señal FM:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$$

es aplicada al sistema de la Figura 6. Este sistema consiste de un filtro RC pasa-alto y un detector de envolvente. Asumiendo que:

I.– La resistencia R es pequeña comparada con la reactancia del capacitor C para todas las componentes de frecuencia significativas de $s(t)$.

II.– El detector de envolvente no carga al filtro.

III.– $k_f|m(t)| < f_c$ para todo t.

Determine la señal que se obtiene a la salida del detector de envolvente.

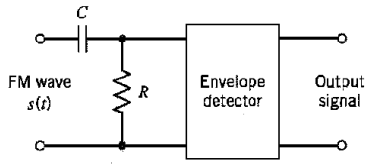


Figura 6: Receptor del Problema 28.

Problema 29: (5 puntos) Los teléfonos celulares de primera generación (años 80 y comienzos de los 90) operaban en la banda de 900 MHz y utilizaban modulación FM[3]. Los canales de transmisión tenían 30 kHz de ancho de banda y las señales de voz estaban limitadas a 4 kHz. ¿Que tipo de modulación se utilizaba, FM de banda ancha o banda angosta?

[3]Ahora que Ud. sabe como demodular FM, también entiende cómo es que fue tan sencillo que alguien escuchara y grabara aquella controvertida conversación telefónica conocida como "El Piñerazo", en que pillaron "chanchito" a Sebastián Piñera hablando mugres sobre Evelyn Matthei.

Problema 30: (9 puntos)

[Couch 6ª Ed., 5-27] Considere las eñal FM

$$s(t) = 10\cos\left[\omega_c t + 100\int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma\right]$$

donde $m(t)$ es una señal de onda cuadrada polar con un ciclo de trabajo del 50%, un periodo de $1s$ y una valor pico de $5V$.

a) Bosqueje la forma de onda de la frecuencia instantánea y de la señal FM correspondiente.

b) Grafique la desviación de fase $\theta(t)$ como función del tiempo.

c) Evalúe la máxima desviación en frecuencia.

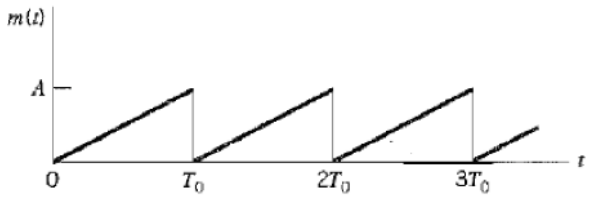
Problema 31: (8 puntos)

La modulación de una señal FM es sinusoidal a la frecuencia f_m de 15 [kHz] y su índice de modulación β es de 2,0.

a) Halle el ancho de banda de transmisión usando la Regla de Carson
b) ¿Qué porcentaje de la señal transmitida de la señal FM queda comprendido dentro del ancho de banda aproximado en a)?

Problema 32: (8 puntos)

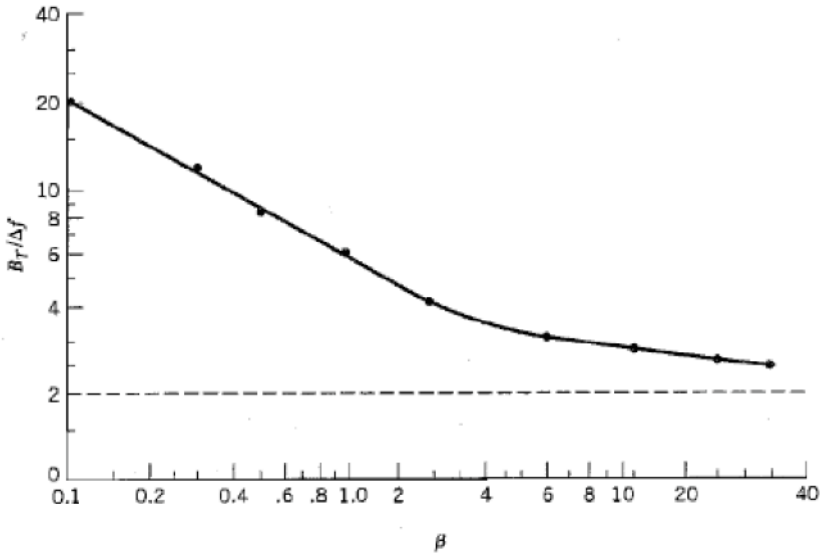
Bosqueje las ondas PM y FM producidas por la onda diente de sierra de la figura.



Problema 33: (12 puntos)

Una onda portadora de 100 MHz es modulada en frecuencia por una onda sinusoidal de amplitud 20 V y frecuencia 100 kHz. La sensibilidad de frecuencia del modulador es de 25 kHz por volt.

a) Determine el ancho de banda aproximado de la señal FM usando la regla de Carson.
b) Determine el ancho de banda al transmitir sólo aquellas frecuencias laterales cuyas amplitudes exceden en 1% a la portadora no modulada. Use la curva de la figura para este cálculo.
c) Repita sus cálculos asumiendo que la amplitud de la señal modulante es el doble.
d) Repita sus cálculos, asumiendo que la frecuencia modulante es el doble.



Problema 34: (10 puntos) El método indirecto para generar modulaciones FM consiste en comenzar con una modulación FM de banda angosta (FM-BA, sencilla de generar) y alimentarla a un dispositivo no-lineal que la convierte en una modulación FM de banda ancha. Concretamente, considere que la señal FM-BA dada por:

$$s(t) = \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$$

es alimentada al dispositivo no-lineal de la Figura 7, cuya relación entrada-salida está dada por el polinomio $y = 4x^3 - 3x$.

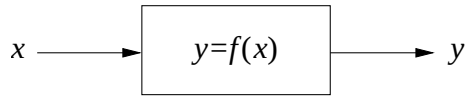


Figura 7: Dispositivo no-lineal, Problema 34.

(a) (5 puntos) Demuestre que la salida es una señal FM.

(b) (5 puntos) Determine el ancho de banda W_y de la señal de salida (regla de Carson), y expréselo en términos del ancho de banda W_x e índice de modulación β_x de la señal original.

Problema 35: [4] (5 puntos) Una estación de radio FM alterna entre transmisión de música y voz. La música es de alta fidelidad pero es limitada a un ancho de banda de 15 kHz antes de entrar al modulador FM. Las señales de voz tienen un ancho de banda de 5 kHz. Si se usa una razón de desviación $D = 5$ tanto para música como voz, ¿qué porcentaje del ancho de banda usado con música es utilizado cuando se transmite voz?

Problema 36: (10 puntos) ¿Para qué sirve el circuito de la Figura 8? Justifique su respuesta mediante un análisis algebraico.

Indicación: Comience modelando $z(t)$ y considere que esa señal está adelantada en 90° con respecto a $x(t)$. Luego continúe su análisis asumiendo que dicho adelanto es sólo *aproximadamente* 90°.

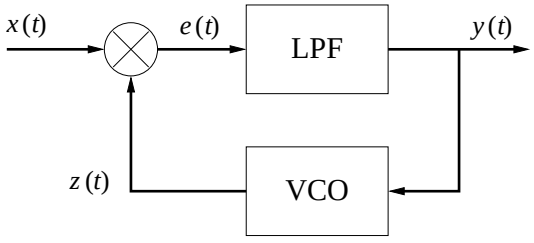


Figura 8: Circuito del Problema 36.

Problema 37: (10 puntos) La modulación digital FSK binaria (*Binary Frequency Shift Keying*) utiliza desplazamientos de frecuencia de la portadora para señalizar ceros y unos. Concretamente, la frecuencia instantánea de transmisión se determina como

$$f(t) = f_c + \frac{1}{2T}(-1)^{b_n},$$

donde b_n es el n-ésimo bit transmitido y $\frac{1}{T}$ es la tasa de transmisión (bits por segundo).

Considere hacer la transmisión FSK usando un modulador FM.

(a) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del transmisor, mostrando paso a paso como la secuencia de bits originales se convierte en la modulación FSK que sale al aire.

Indicación: Recuerde que la entrada a un modulador FM es una señal analógica de banda base. Piense cómo generar esa señal a partir de la secuencia de bits del mensaje.

(b) (1 puntos) Bosqueje la señal alimentada al modulador FM para el mensaje 10110.

(c) (2 puntos) Bosqueje la señal que sale al aire para el mensaje 10110.

(d) (5 puntos) Considere que la señal de (b) está limitada a un ancho de banda de $\frac{5}{T}$ Hertz. Determine el ancho de banda de esta transmisión.

Problema 38: (8 puntos) Una señal de audio con ancho de banda 5 kHz y amplitud máxima 10 V modula a una portadora en frecuencia. Utilice la curva universal de la Figura 9 para determinar la sensibilidad de frecuencia tal que el ancho de banda de la señal FM sea aproximadamente 30 kHz.

Indicación: Es posible que tenga que iterar un poquito. Concluya cuando disponga de un valor para la sensibilidad que entregue un ancho de banda en un rango de $\pm 10\,\%$ del valor deseado.

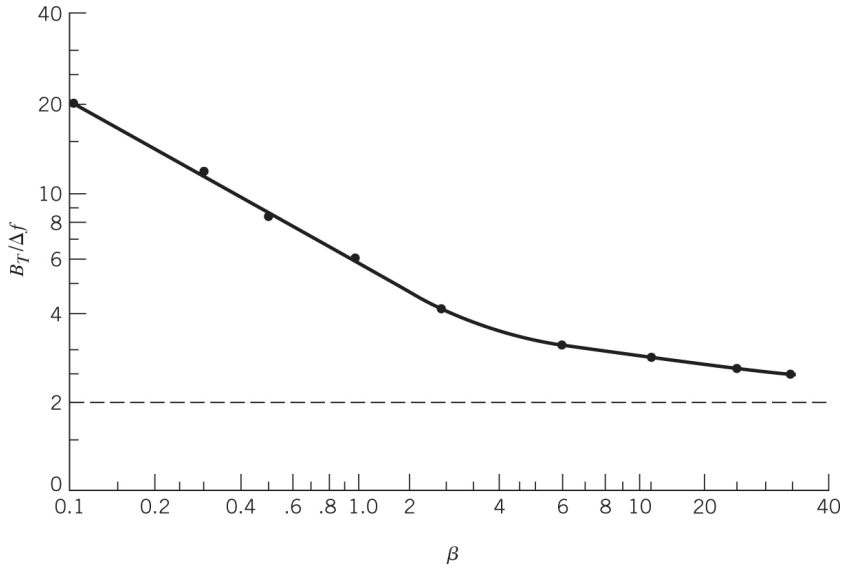


Figura 9: Curva universal para el ancho de banda de una señal FM según el criterio del 1 % (Problema 38).

Problema 39: (10 puntos) La señal $m(t)$ de la Figura 10 modula en ángulo a una portadora pura de frecuencia f_c y amplitud A_c. La amplitud A de la modulante y los instantes T_1, T_2 y T_3 son conocidos.

(a) (3 puntos) Asumiendo que la modulación es PM y que B es conocido y negativo, bosqueje la señal modulada, anotando el gráfico claramente para facilitar su interpretación.

(b) (2 puntos) Para el caso anterior, grafique la frecuencia instantánea de la señal modulada, anotando el gráfico claramente para facilitar su interpretación.

(c) (1 puntos) Asumiendo que la modulación es FM, determine la frecuencia instantánea de la portadora modulada en T_1.

(d) (4 puntos) Asumiendo que la modulación es FM y B desconocido, determine para que valor o valores de la amplitud B se cumple que la señal modulada es una portadora pura de frecuencia f_c, con fase arbitraria, para todo $t \geq T_3$.

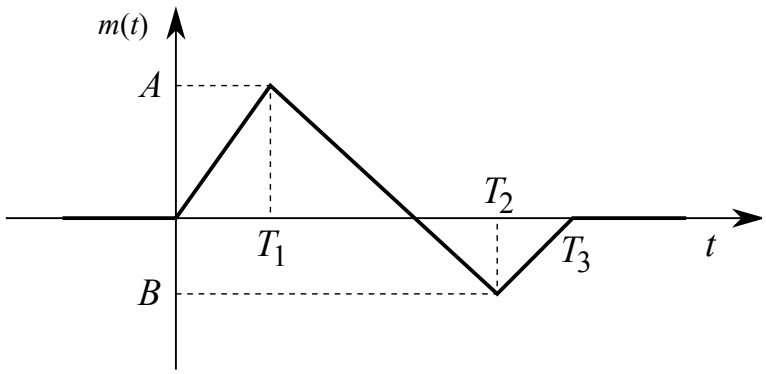


Figura 10: Señal modulante del Problema 39.

Problema 40: (12 puntos) Un emprendedor desea fundar una emisora de radio en el dial FM. Para ello, encuentra una oferta de equipamiento muy atractiva, basada en el método indirecto para generar la modulación FM. El método consiste en alimentar una señal FM de banda angosta a un dispositivo no lineal cuya relación entrada-salida es $y = x^n$, y luego alimentar la salida de este último a un filtro pasabanda. Las especificaciones del equipamiento son: la señal modulante debe estar acotada en ancho de banda a 10 kHz, la desviación de frecuencia de la modulación de banda angosta es 2 kHz, la portadora del modulador de banda angosta tiene frecuencia 2,7 MHz y el dispositivo no-lineal es de orden $n = 47$.

(a) (4 puntos) Determine todas las frecuencias de emisión legítima (de acuerdo a la canalización del dial FM) en las que se puede operar con este equipamiento.

(b) (6 puntos) Escoja una de las frecuencias determinadas en (a) y determine frecuencias de corte adecuadas del filtro pasabanda para esa frecuencia de operación, tal que se salga al aire con una señal FM propiamente tal.

(c) (2 puntos) ¿En base a su resultado anterior, es viable que este emprendedor obtenga un permiso de operación con SUBTEL?

Problema 41: (10 puntos) La señal

$$s_{\text{FMBA}}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) - D A_c \sin(2\pi f_c t) \int_0^t m(\tau) d\tau$$

es una buena aproximación para la modulación FM de $m(t)$ cuando la razón de desviación $D < 0,3$ ("FM de banda angosta").

(a) (2 puntos) Bosqueje el diagrama de bloques del modulador de banda angosta utilizando un solo oscilador.

(b) (4 puntos) Considerando que la salida del modulador de banda angosta es una señal FM propiamente tal, de la forma $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$, con $\varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau$, muestre que si se alimenta $s(t)$ al dispositivo no lineal del Problema 16, se puede obtener una señal FM "tradicional" con $D > 0,3$. Bosqueje el diagrama de bloques completo de este modulador.

(c) (4 puntos) Determine la razón entre el ancho de banda de la modulación FM resultante en (b) con respecto al ancho de banda de la modulación FM de banda angosta que la origina.

Problema 42: (8 puntos) La señal $m(t)$ de la Figura 11 modula en frecuencia a una portadora pura de frecuencia f_c y amplitud A_c. Las amplitudes $A > 0 > B$ de la modulante y los instantes $T_1 < T_2 < T_3$ son conocidos.

(a) (3 puntos) Bosqueje la señal modulada, anotando el gráfico claramente para facilitar su interpretación.

(b) (2 puntos) Determine la fase de la señal modulada en $t = T_2$ con respecto a una portadora pura.

(c) (3 puntos) Considere que se ha establecido 15 kHz como una medida aproximada del ancho de banda de $m(t)$. Asimismo, se tiene $B = -2A$ $[V]$ y $k_f = 3000$ $[\frac{V}{Hz}]$. Determine el valor máximo de A para que la modulación no exceda el límite legal de 200 kHz de ancho de banda.

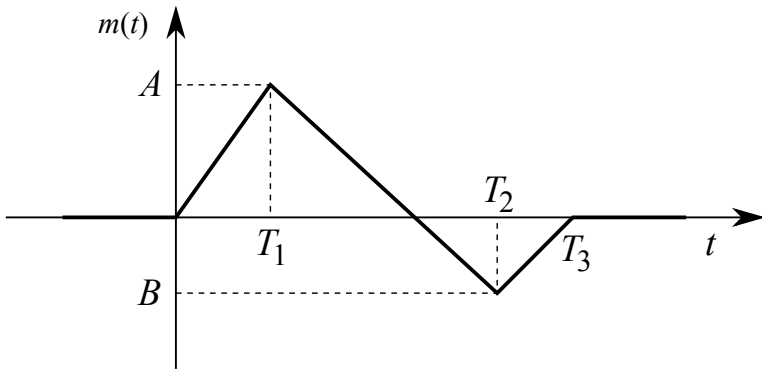


Figura 11: Señal modulante del Problema 42.

Problema 43: (12 puntos) Considere la modulación en frecuencia de la señal $m(t)$ del Problema 42.

(a) (5 puntos) Determine el desfase entre la señal modulada con respecto a una portadora no modulada en el instante $t = 2T_1$ si $k_f = \frac{30}{AT_1}$.

(b) (5 puntos) Determine el ancho de banda de la señal FM mediante la curva universal, con $A = 0{,}5$ V, $T_1 = 400$ μs y considerando que la frecuencia máxima de la señal modulante puede ser aproximada por $W_m = \frac{4}{T_1}$ Hz.

(c) (2 puntos) Argumente con motivos técnicos por qué $W_m = \frac{4}{T_1}$ Hz es una aproximación razonable al ancho de banda máximo de la señal modulante.

Problema 44: (12 puntos) Una señal modulante $m(t)$ con frecuencia máxima $W_m = 15$ kHz y amplitud máxima $A_{\max} = 10$ Volt es utilizada para una transmisión FM comercial. Para que esta transmisión cumpla con el ancho de banda máximo de 200 kHz establecido por la regulación espectral del dial FM, la sensibilidad de frecuencia del modulador (k_f) debe estar dentro de un cierto rango de valores. Conocido dicho rango, una pregunta que surge es qué valores dentro del rango son preferibles, y por qué. Para explorar su respuesta, realice lo siguiente:

(a) (3 puntos) Determine el rango de valores de k_f regulatoriamente válidos (ignore restricciones sobre la desviación de frecuencia).

(b) (4 puntos) Muestre cómo la derivada de la señal FM con respecto al tiempo puede ser utilizada para recuperar la señal modulante. Asuma que $f_c \gg k_f A_{\max}$.

(c) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques que proponga a nivel conceptual un receptor para transmisioines FM en base al análisis del punto anterior.

(d) (3 puntos) Indique los valores de k_f preferibles para la recepción FM. Explique por qué.

Problema 45: (6 puntos) Una señal de audio con ancho de banda 10 kHz y amplitud máxima 9 V modula a una portadora en frecuencia.

(a) (3 puntos) Mediante la regla general de Carson, determine la sensibilidad de frecuencia del modulador para que el ancho de banda de la señal FM resultante sea aproximadamente 200 kHz.

(b) (3 puntos) Con el valor calculado en (a), determine el ancho de banda de la modulación mediante la curva universal.

Problema 46: (4 puntos) Considere una portadora de frecuencia f_c y amplitud A_c y la señal modulante $m(t)$ que se ilustra en la Figura 12, con $A > B > 0$.

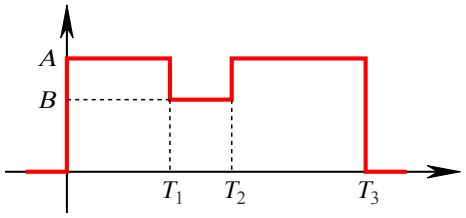


Figura 12: Señal modulante del Problema 46($A > B > 0$).

(a) (2 puntos) Determine la frecuencia instantánea para todo t.

(b) (2 puntos) Bosqueje la señal FM modulada. Incluya tiempos $t < 0$ y $t > T_3$ e indique claramente todos los instantes y amplitudes relevantes.

1.5. Problemas Mixtos

Problema 47: [2] (10 puntos) A menudo ocurre que la señal de salida de un transmisor debe estar dentro de un determinado rango $\pm A_p$. Este tipo de restricciones se deben, por ejemplo, a limitaciones impuestas por la fuente de poder del circuito, o a las corrientes máximas que los componentes del circuito pueden soportar.

Si un circuito con estas limitaciones es usado para generar una señal BLD-SP, demuestre que la potencia de banda lateral que tendría aquella señal es cuatro veces la potencia de banda lateral que se obtendría al generar una modulación AM utilizando el mismo circuito. Considere $m(t) < 1$ para ambas modulaciones, y $k_a = 1$ para AM.

Problema 48: (10 puntos) La vieja y querida modulación analógica. (¿O no tanto?)

(a) (5 puntos) Ruido térmico desde luego también degrada las transmisiones analógicas, y dicha degradación también se mide en términos de la razón señal a ruido. A igual potencia transmitida, ¿que modulación tiene la mejor razón señal a ruido: AM, BLD-SP, o BLU?

Indicación: Defina cuidadosamente la SNR para cada caso y luego compare.

(b) (5 puntos) Diseñe un sistema de comunicaciones BLD-SP que permita transmitir audio *stereo* sin requerir mayor ancho de banda que la modulación BLD-SP *mono* que Ud. conoce.

Indicación: Piense en términos de envolventes complejas.

Problema 49: (12 puntos) [1] Usando la señal de mensaje

$$m(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

determine y bosqueje las señales moduladas generadas por los siguientes métodos de modulación:

(a) AM con 50 % de modulación.

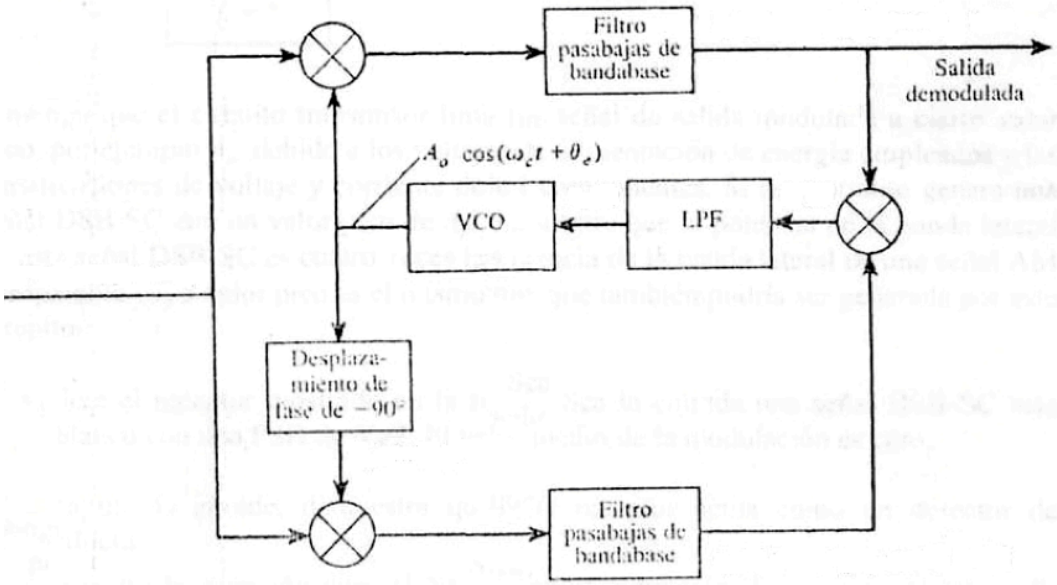
(b) BLD-SP

(c) BLS

(d) BLI

Problema 50: (8 puntos)

¿Se puede usar un circuito Costas, como el de la figura para demodular una señal SSB-AM? Demuéstrelo.



Problema 51: (5 puntos) Analice brevemente y responda: ¿Es posible usar un receptor de Costas sin modificaciones para demodulación coherente de señales AM? En caso positivo, señale una ventaja y una desventaja sobre usar un detector de envolvente. En caso negativo, ¿es posible lograrlo modificando algún elemento del receptor de Costas?

Problema 52: (10 puntos) Un modelo simple para la pérdida de potencia por distancia de transmisiones de radio es

$$P_r(d) = P_t \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{d^2},$$

donde $P_r(d)$ es la potencia recibida a una distancia d del transmisor, P_t es la potencia transmitida y λ es la longitud de onda de la portadora.

Se desea comparar el radio de cobertura de una modulación AM con el de una modulación BLD-SP. Para ello, considere que una portadora pura $A_c \cos(2\pi f_c t)$ es modulada con un tono puro $A_m \cos(2\pi f_m t)$ mediante cada uno de los dos métodos. Las respectivas señales moduladas son amplificadas individualmente tal que cada una salga al aire con la misma potencia total P_t. El radio de cobertura está dado por la distancia a partir de la cual la razón señal a ruido de la potencia del mensaje contenido en la señal recibida cae por debajo de 12 dB.

(a) (3 puntos) Considerando $P_t = 0$ dBW, $f_c = 100$ MHz, $f_m = 5$ kHz y que el receptor cuenta con filtros pasabanda de ancho $3f_m$ y tiene una figura de ruido de 10 dB, ¿cual es el radio de cobertura de la transmisión BLD-SP?

(b) (5 puntos) Muestre que a misma potencia irradiada el radio de cobertura de BLD-SP es al menos $\sqrt{3}$ veces mayor que el de AM.

(c) (2 puntos) ¿Es posible compensar el menor radio de cobertura de AM utilizando un receptor AM que tenga una mejor figura de ruido? En caso afirmativo, indique la figura de ruido máxima con la que ello sería posible. En caso negativo, explique por qué no es posible.

Problema 53: (9 puntos) La Tabla 1 presenta los costos de distintos componentes necesarios para construir dispositivos de comunicaciones. En base a dicha tabla, determine el costo de implementación de:

(a) (3 puntos) Un receptor económico para AM.

(b) (3 puntos) Un receptor adecuado para transmisiones BLD-SP con incertidumbre en la fase de la portadora.

(c) (3 puntos) Un modulador BLI.

Indicación: Haga un diagrama de bloques claro del dispositivo en cada caso y presente una memoria de cálculo ordenada. Incluya todos los componentes que hay entre el medio de propagación y la señal de mensaje.

Problema 54: (8 puntos) Usando la señal modulante $m(t)$ ilustrada en la Figura 13, con $B = -\frac{A}{2}$, $T_2 = \frac{5}{2}T_1$ y $T_3 = 3T_1$, bosqueje las señales moduladas generadas por los siguientes métodos de modulación, considerando una portadora de frecuencia f_c y amplitud A_c. Incluya tiempos $t < 0$ y $t > T_3$ y anote los gráficos claramente para facilitar su interpretación.

Cuadro 1: Tabla de costos del Problema 53. Todos los componentes son marca ACME.

Componente	Costo (lukas)
Sumador	3 lk
Multiplicador	9 lk
Oscilador	6 lk
Diodo	3 lk
Filtro pasabajos	5 lk
Filtro pasabanda	9 lk
Fuente de ruido blanco	15 lk
VCO	8 lk
Receptor RF (BPF, LNA)	9 lk
Desfasador de 90°	6 lk
Transformador de Hilbert	8 lk
Amplificador de potencia	25 lk
Antena "cola de chancho"	2 lk

(a) (2 puntos) Amplitud modulada con $k_a = \frac{2}{A}$.

(b) (2 puntos) Banda laberal doble con supresión de portadora.

(c) (4 puntos) Frecuencia modulada.

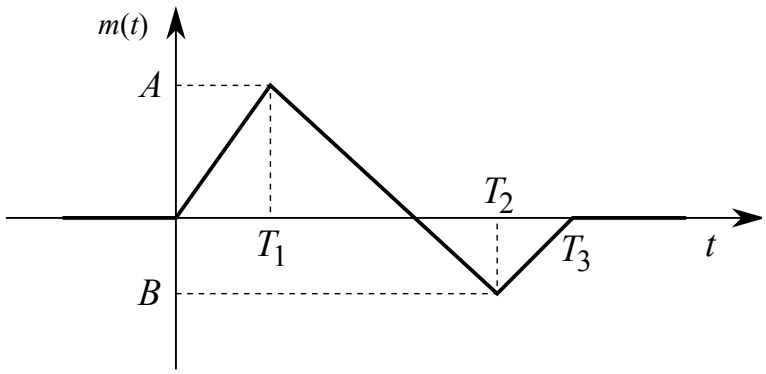


Figura 13: Señal modulante del Problema 54.

Problema 55: (7 puntos) Considere una portadora de frecuencia f_c y amplitud A_c y la señal modulante $m(t)$ que se ilustra en la Figura 14, con $A > 0$ y $B < 0$. Bosqueje las señales moduladas generadas por los métodos de modulación que se indican a continuación. Incluya tiempos $t < 0$ y $t > T_3$ e indique claramente todos los instantes y amplitudes relevantes.

(a) (2 puntos) Modulación AM, con $k_a = \frac{3}{A}$.

(b) (2 puntos) Modulación BLD-SP.

(c) (3 puntos) Modulación FM. Indique la frecuencia instantánea en cada tramo de la señal.

Problema 56: (6 puntos) Para las modulaciones del Problema 55, determine lo siguiente:

(a) (2 puntos) Para la modulación AM: ¿Qué valor debe tener B para que el valor máximo de la envolvente positiva ($A_{\max}$) sea 10 veces mayor que el valor mínimo ($A_{\min}$)? Asuma $k_a = \frac{3}{A}$, $A > 0$ y $B < 0$.

(b) (2 puntos) Para la modulación BLD-SP: Determine la energía total de la señal modulada.

(c) (2 puntos) Para la modulación FM: Dado $B = -\frac{A}{5}$ y $T_2 = 2T_1$, ¿qué valor debe tener T_3 para que la señal modulada tenga fase residual cero para todo $t > T_3$?

Problema 57: (6 puntos) Considere que cada señal modulada del Problema 55 incluye, a través de la amplitud A_c de la portadora, el efecto de la amplificación de potencia previa a la transmisión. Si el amplificador de potencia satura en un valor de potencia P_0, determine en cada caso la amplitud máxima que puede tener A_c para evitar saturación del amplificador, con $B = -\frac{A}{5}$.

(a) (2 puntos) Modulación AM, con $k_a = \frac{3}{A}$.

(b) (2 puntos) Modulación BLD-SP.

(c) (2 puntos) Modulación FM.

Problema 58: (10 puntos)

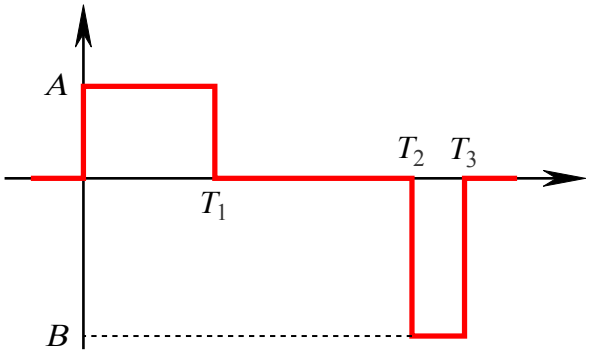


Figura 14: Señal modulante del Problema 55($A > 0$ y $B < 0$).

La modulación de banda lateral única puede ser vista como una forma híbrida de de modulación en amplitud y en frecuencia. Evalúe la envolvente y frecuencia instantánea de una onda SSB para los siguientes casos:

a) Cuando sólo la banda lateral superior es transmitida.
b) Cuando sólo la banda lateral inferior es transmitida.

2. Procesos estocásticos y ruido térmico

2.1. Módulo 6: Procesos estocásticos

Problema 59: (5 puntos) Determine si el proceso estocástico $X(t) = \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, con Θ una fase aleatoria de distribución uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi[$, es estacionario en el sentido amplio.

Problema 60: [1] (5 puntos) Considere la modulación AM dada por $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)$, donde $X(t)$ representa una señal de voz aleatoria (es decir, es un proceso estocástico) y $\cos(2\pi f_c t + \Theta)$ es una portadora con una fase aleatoria (Θ) de distribución uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi[$. Si $X(t)$ es estacionario en el sentido amplio, lo es $Y(t)$? En tal caso, calcule $R_Y(\tau)$ en función de $R_X(\tau)$, así como $S_Y(f)$.

Problema 61: [1] (5 puntos) Un proceso estocástico estacionario Gaussiano $X(t)$ tiene media cero y densidad espectral de potencia $S_X(f)$. Determine la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria obtenida al muestrear el proceso $X(t)$ en un instante arbitrario t_0.

Problema 62: (5 puntos) Si los procesos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ son independientes y estacionarios en el sentido amplio, ¿lo es el proceso $z(t) = x(t) \cdot y(t)$?

Problema 63: (9 puntos)

[Haykin P4.6] Se define un proceso estocástico X(t) como:

$$X(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t)$$

donde A es una variable aleatoria gaussiana de media cero y varianza σ_A^2. Este proceso se aplica a un integrador ideal obteniendo en la salida:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) \cdot d\tau$$

a) Determine la función de probabilidad de la salida *Y(t)* en un momento determinado.
b) Determine si *Y(t)* es estacionario en sentido amplio?
c) Determine si *Y(t)* es ergodico?

Problema 64: (10 puntos) Un mensaje digital sencillo dado por una secuencia binaria de ceros y unos puede ser transmitido a través de un cable conductor mediante pulsos de voltaje de duración T segundos (Figura 15).

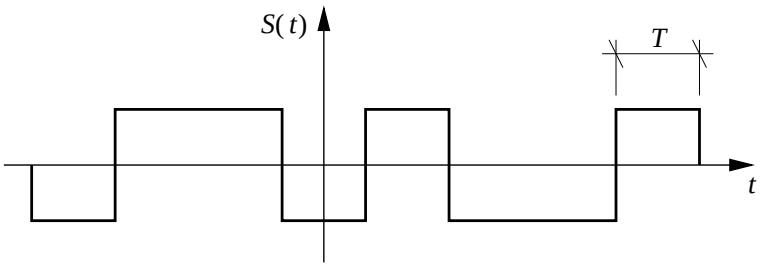


Figura 15: Ejemplo de señal transmitida para el mensaje binario 100$\underline{1}$0110, Problema 64. El subrayado del cuarto bit indica que se trata de b_0.

La señal transmitida puede ser representada matemáticamente de la siguiente forma:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{b_n} \sqcap\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

donde b_n es el n-ésimo bit del mensaje (cero o uno) y el mensaje tiene duración infinita.

Desde el punto de vista del receptor, $\{b_n\}$ es una secuencia binaria aleatoria, con bits b_n equiprobables e independientes entre sí. Por ello, para el receptor $S(t)$ es un proceso estocástico. Determine si $S(t)$ es o no estacionario en el sentido amplio.

Problema 65: (10 puntos)

[P1.16 Haykin] Un proceso X(t) estacionario con media cero, es aplicado a un filtro lineal cuya respuesta al impulso es:

$$h(t) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha t}, & 0 \le t \le T \\ 0, & coc \end{cases}$$

Demuestre que la densidad espectral de potencia de la señal Y(t) a la salida del filtro es:

$$S_Y(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}(1 - 2\exp(-\alpha T)\cos(2\pi f T) + \exp(-2\alpha T))S_X(f)$$

Problema 66: (5 puntos) Demuestre que si un proceso estocástico estacionario tiene media μ, entonces su función de autocorrelación contiene una componente aditiva μ^2.

Problema 67: (5 puntos) Discuta con argumentos técnicos si un proceso estocástico estacionario puede o no tener una función de autocorrelación $R(\tau) = \sqcap(\tau)$. Exprese su conclusión claramente con un "si" o con un "no".

Problema 68: (10 puntos) Un proceso estocástico estacionario $X(t)$ tiene distribución uniforme con valor mínimo -1 y valor máximo 2. Su densidad espectral de potencia está dada por $S_X(f) = P \sqcap\left(\frac{f}{40W}\right)$.

(a) (4 puntos) Determine el valor de P.

(b) (6 puntos) El proceso pasa a través de un filtro pasabanda ideal de ancho W y frecuencia central $10W$. Determine la función de autocorrelación del proceso $Y(t)$ observado en la salida del filtro y haga un bosquejo de ella.

Problema 69: (5 puntos) Dados los procesos estocásticos estacionarios e independientes $X(t)$ e $Y(t)$, demuestre que la densidad espectral de potencia del proceso $Z(t) = X(t) \cdot Y(t)$ es $S_Z(f) = S_X(f) * S_Y(f)$.

Problema 70: [5] (5 puntos) Un proceso estocástico de pasabanda $w(t)$ está dado por:

$$w(t) = X\cos(2\pi f_c t) - Y\sin(2\pi f_c t)$$

donde X e Y son variables aleatorias reales. Demuestre que $w(t)$ es estacionario en el sentido amplio si y sólo si $\mathrm{E}\{X\} = \mathrm{E}\{Y\} = 0$, $\mathrm{E}\{X^2\} = \mathrm{E}\{Y^2\}$ y $\mathrm{E}\{XY\} = 0$.

Problema 71: (5 puntos) La deducción de densidad espectral de potencia hecha en clases involucró la siguiente cuasi-Transformada de Fourier del proceso estocástico temporal $X(t)$:

$$Y(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)e^{-j2\pi ft}dt.$$

Si $X(t)$ es un proceso estocástico estacionario en t, con media $\mu_X \neq 0$, determine si $Y(f)$ es o no un proceso estocástico estacionario en f.

Problema 72: (10 puntos) Se tiene un conductor de cobre que se alimenta en un extremo con una señal $w(t)$ con respecto a tierra. Por el otro extremo el conductor se extiende por largo infinito.

$w(t)$ se propaga a dos tercios de la velocidad de la luz por el conductor ($\frac{2}{3}c$), y en la medida que se propaga, se atenúa de acuerdo a una función de atenuación $h(x)$, donde x es la distancia medida desde el punto de alimentación.

Un segundo conductor idéntico al primero corre junto y paralelo a él. Ambos conductores están suficientemente cerca el uno del otro, que la señal presente en el primer conductor en la posición x se induce en el segundo conductor, también en la posición x, pero atenuada por un factor M. Este tipo de efectos es conocido en comunicaciones como *crosstalk* (XT, en breve).

La señal inducida en la posición x del segundo conductor se propaga en ambas direcciones del segundo conductor. Aquella parte que retorna hacia el extremo de alimentación se va

sumando en todo el recorrido con la correspondiente inducción de señal desde el primer conductor al segundo, resultando una señal neta $v(t)$ observada en el extremo de alimentación. $v(t)$ es un proceso estocástico y es conocido como *near-end crosstalk* (NEXT).

Considere que $w(t)$ es ruido blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$. Queremos determinar la densidad espectral de potencia de NEXT. Para ello:

(a) (1 punto) Determine la señal presente en el primer conductor a distancia x y en el instante t en función de $w(t)$ y $h(x)$. Recomendación: comience por hacer un bosquejo que ilustre el problema.

(b) (1 punto) Determine la señal inducida en el segundo conductor a distancia x en el instante t.

(c) (4 puntos) Determine $v(t)$ en función de $w(t)$ y $h(x)$.

(d) (4 puntos) Determine la densidad espectral de potencia de $v(t)$ en función de la transformada de Fourier de $h(x)$, $H(f)$.

Problema 73: (8 puntos) Una señal modulante $m(t)$ es modelada como un proceso estocástico estacionario con distribución uniforme en el rango $[-A_m, A_m]$ Volt y función de autocorrelación dada por

$$R_m(\tau) = \frac{W_0}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{W_0}{2}\tau\right),$$

con W_0 un parámetro de ancho de banda. La señal $m(t)$ es modulada en frecuencia con una sensibilidad de frecuencia k_f tal que el ancho de banda resultante de la modulación FM es 100 kHz.

(a) (5 puntos) Determine el valor de k_f utilizado si $A_m = 5$ V, $W_0 = 20$ kHz y considerando que el ancho de banda de 100 kHz fue determinado mediante la Regla de Carson.

(b) (3 puntos) Determine el ancho de banda de la transmisión FM mediante la curva universal.

Problema 74: (10 puntos) Considere la mezcla aditiva de un proceso estocástico $X(t)$ con una réplica retardada de sí mismo, como sigue:

$$Y(t) = X(t) + \alpha X(t - T),$$

con $|\alpha| < 1$ y T un retardo. Considere además que $X(t)$ es un proceso estocástico estacionario con media μ_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$, ambas conocidas.

Es claro que la mezcla aditiva aporta correlación al proceso $Y(t)$. Analice si es posible remover esta correlación y recuperar el proceso $X(t)$ utilizando únicamente un filtro lineal e invariante en el tiempo. En caso afirmativo, especifique la respuesta de frecuencia del filtro y comente sobre su causalidad. En caso negativo, justifique cuidadosamente por qué no es posible.

Indicación: Puede considerar que $Y(t)$ es estacionario en el sentido amplio. No es necesario demostrarlo, pero es buena idea hacerlo. También puede revisar la guía de problemas resueltos para una demostración.

Problema 75: (10 puntos) Considere dos procesos estocásticos estacionarios $n_I(t)$ y $n_Q(t)$, ambos de media cero y con funciones de autocorrelación idénticas $R_{n_I}(\tau) = R_{n_Q}(\tau)$. Las respectivas densidades espectrales de potencia son $S_{n_I}(f) = S_{n_Q}(f)$ y ambos procesos son de banda base con su contenido espectral limitado a una frecuencia máxima W_m.

Las *funciones de correlación cruzada* entre estos dos procesos se definen como

$$\begin{aligned} R_{n_I n_Q}(\tau) &= \mathrm{E}\{n_I(t) n_Q(t+\tau)\} &= -R_{n_I n_Q}(-\tau) \\ R_{n_Q n_I}(\tau) &= \mathrm{E}\{n_Q(t) n_I(t+\tau)\} &= -R_{n_Q n_I}(-\tau). \end{aligned}$$

Estas funciones son impares y cumplen la interesante propiedad que

$$R_{n_Q n_I}(\tau) = -R_{n_I n_Q}(\tau).$$

Los procesos $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son alimentados al sistema de la Figura 16 para generar el proceso estocástico $n(t)$ con $f_c \gg W_m$.

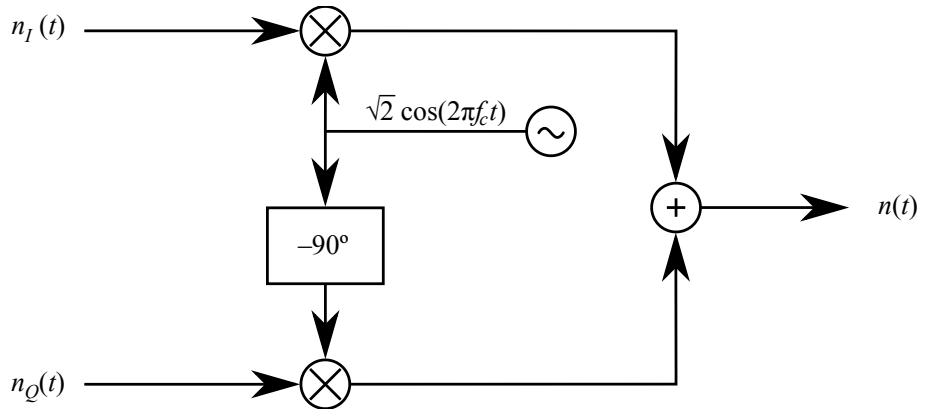


Figura 16: Problema 75.

(a) (5 puntos) Determine si el proceso $n(t)$ es estacionario en el sentido amplio.

(b) (5 puntos) Muestre que $n(t)$ es un proceso estocástico de pasabanda.

Problema 76: (7 puntos) La correlación entre dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ que son tanto individualmente como conjuntamente estacionarios en el sentido amplio, se expresa mediante las *funciones de correlación cruzada*, dadas por

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\} \\ R_{YX}(\tau) &= \mathrm{E}\{Y(t)X(t+\tau)\}. \end{aligned}$$

Estas funciones son impares ($R_{XY}(\tau) = -R_{XY}(-\tau)$ y $R_{YX}(\tau) = -R_{YX}(-\tau)$) y cumplen además la propiedad

$$R_{YX}(\tau) = -R_{XY}(\tau).$$

Considere dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ con correlación cruzada según las características anteriores. Sus medias son μ_X y μ_Y, respectivamente, y las funciones de autocorrelación son

$R_X(\tau)$ y $R_Y(\tau)$, respectivamente. Los procesos son combinados linealmente para producir el proceso

$$Z(t) = \alpha X(t) + \beta Y(t),$$

con α y β parámetros reales.

(a) (5 puntos) Demuestre que el proceso $Z(t)$ es estacionario en el sentido amplio.

(b) (2 puntos) Muestre que la densidad espectral de potencia del proeceso $Z(t)$ es

$$S_Z(f) = \alpha^2 S_X(f) + \beta^2 S_Y(f),$$

con $S_X(f)$ y $S_Y(f)$ las densidades espectrales de potencia de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$, respectivamente.

Problema 77: (8 puntos) Un proceso estocástico estacionario $X(t)$ es alimentado al sistema realimentado que se muestra en la Figura 17, donde $\alpha \in (-1, 0)$ es una constante real negativa y $h(t)$ es la función de respuesta al impulso de un filtro lineal e invariante en el tiempo.

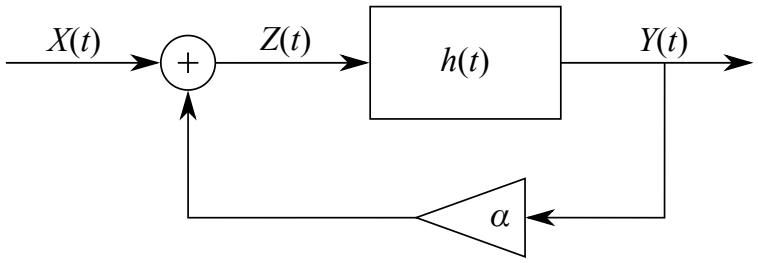


Figura 17: Problema 77.

(a) (4 puntos) Determine la densidad espectral de potencia del proeceso $Y(t)$ en la salida, expresándola en términos de la respuesta de frecuencia del filtro y de la densidad espectral de potencia $S_X(f)$ del proceso de entrada $X(t)$.

Indicación: Si lo desea, puede usar los resultados del Problema 76 sin demostrarlos.

(b) (4 puntos) Si el filtro $h(t)$ es pasabanda ideal de ancho W y $X(t)$ es ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$, determine la potencia del proceso de salida $Y(t)$.

2.2. Módulo 7: Ruido térmico

Problema 78: (5 puntos) Considere ruido aditivo blanco Gaussiano $w(t)$ con densidad espectral de potencia $S_w(f) = N_0/2$ que pasa por un filtro RC cuya función de transferencia es:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Calcule y bosqueje la función de autocorrelación del ruido $n(t)$ que se observa en la salida del filtro.

Problema 79: (20 puntos) Simule las condiciones del Problema 78 en el computador y verifique los resultados obtenidos. Específicamente:

(a) (3 puntos) Genere una secuencia de ruido blanco Gaussiano $w(n)$ con densidad espectral de potencia $S_w(k) = N_0/2 = \frac{1}{2}$ en el intervalo de Nyquist.

(b) (5 puntos) Implemente una versión discreta del filtro $H(f)$ con $RC = 1$.

(c) (3 puntos) Aplique la señal $w(n)$ al filtro discreto y grafique la salida.

(d) (5 puntos) Calcule la autocorrelación de la salida y grafíquela.

(e) (4 puntos) Calcule y grafique la densidad espectral de potencia de la salida.

Problema 80: (5 puntos) Considere la degradación de una señal FM debido a ruido térmico (AWGN)[4]. Como Ud. recordará, las señales FM pueden ser demoduladas pasándolas por un derivador. Analice cualitativamente el efecto que el ruido derivado tiene sobre la señal FM demodulada.

Problema 81: (8 puntos) Considere el receptor general de dos ramas para la transmisión digital binaria del Problema 112. Asuma que el receptor se encuentra en escucha a la espera de una transmisión, pero que mientras dure este problema habrá silencio en el canal. Determine la función de correlación cruzada entre los procesos de ruido observados en la salida de los filtros adaptados.

Indicación: La *función de correlación cruzada* entre dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, que son tanto individualmente como conjuntamente estacionarios en el sentido amplio, está definida por

$$R_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\left\{X(t)Y(t+\tau)\right\}.$$

Problema 82: (8 puntos) Ruido blanco Gaussiano de densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$ es aplicado a un filtro cuya función de respuesta al impulso es la señal mostrada en la Figura 18, con B tal que la respuesta al impulso tenga energía unitaria. ¿Cual es la correlación entre dos muestras de la salida tomadas con $2T$ segundos de separación entre sí?

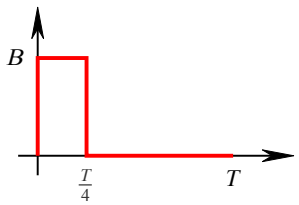


Figura 18: Función de respuesta al impuslo del Problema 82.

[4]El ruido térmico desde luego también es un problema en modulaciones analógicas. De hecho, como hemos visto, una modulación digital no es otra cosa que una modulación analógica de un formato muy específico.

3. Comunicaciones digitales binarias de banda base (track standard)

3.1. Módulo 8: Receptor óptimo con filtro adaptado

Problema 83: (10 puntos) Considere la secuencia de bits equiprobables 101101000101 transmitida con NRZ usando pulsos rectangulares de energía E_b. Como Ud. sabe, el receptor óptimo para esta transmisión en presencia de ruido blanco puede ser implementado con un filtro adaptado seguido por un muestreador, como lo muestra el diagrama de bloques de la Figura 19. Bosqueje la señal de salida del filtro para esta secuencia transmitida (desprecie el efecto del ruido).

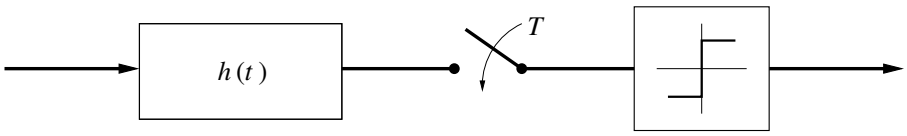


Figura 19: Diagrama de bloques del receptor del Problema 83.

Problema 84: (15 puntos) Considere el receptor del Problema 83. Su optimalidad depende desde luego de la adecuada sincronización del muestreador: el perídodo de muestreo, T, debe coincidir exáctamente tanto en frecuencia como en retardo con el tren de bits de la señal recibida. De lo contrario, el estadístico de prueba alimentado al detector sufriría una pérdida de razón señal a ruido, la cual implica una mayor tasa de error. Suponga que el muestreador opera con la frecuencia correcta (es decir, el período T es adecuado), pero está fuera de fase (adelantado o retrasado) en ϵ segundos, donde $|\epsilon| < \frac{1}{2}T$ y $\epsilon > 0$ indica retraso. Calcule la degradación media de la razón señal a ruido en la entrada del detector en función de ϵ para una transmisión infinita de bits equiprobables. Considere que el canal tiene ruido blanco Gaussiano de densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$.

3.2. Módulo 9: Probabilidad de error de bit de modulaciones binarias (receptor de una rama)

3.2.1. Mixtos filtro adaptado y P_b

Problema 85: (15 puntos) Considere un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base que utiliza señales rectangulares, como en la Figura 37 con $\lambda = 0$. Como Ud. sabe, el receptor óptimo para este caso puede ser implementado con un filtro adaptado seguido por un muestreador, como lo muestra el diagrama de bloques de la Figura 20a.

Suponga que la implementación del filtro adaptado no es ideal, y que la respuesta al impulso del filtro implementado tiene duración αT, con $0 < \alpha < 1$, como lo muestra la Figura 20b.

(a) (7 puntos) Bosqueje la señal de salida del filtro para la secuencia transmitida 11101001011, indicando claramente las amplitudes e instantes relevantes, así como los instantes óptimos de muestreo (desprecie el efecto del ruido).

(b) (8 puntos) Analice: ¿Como cambia la probabilidad de error de bit de este sistema con respecto al caso ideal ($\alpha = 1$)?

Indicación: Puede considerar conocida la probabilidad de error de bit del sistema ideal.

Problema 86: (12 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza la señal $s_0(t)$ mostrada en la Figura 21 para señalizar 0 y $s_1(t) = -s_0(t)$ para señalizar 1.

(a) (2 puntos) Bosqueje el receptor óptimo, especificando claramente la respuesta al impulso del filtro adaptado y los instantes de muestreo.

(b) (4 puntos) Bosqueje la salida de un filtro adaptado para la entrada correspondiente a la secuencia 011010001.

(c) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit $\frac{E_b}{N_0}$.

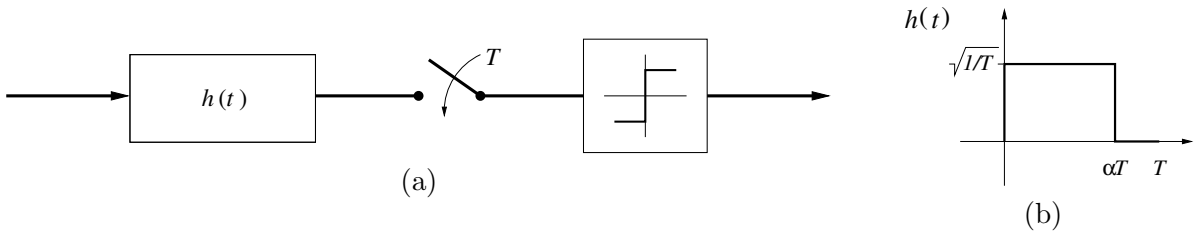


Figura 20: Diagrama de bloques y filtro adaptado del receptor del Problema 85.

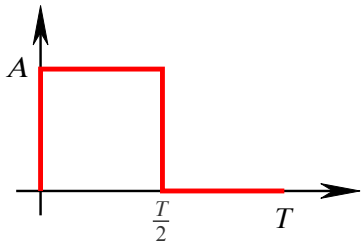
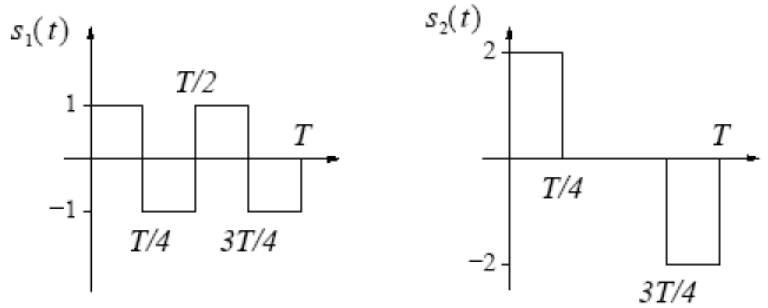


Figura 21: Señal $s_0(t)$ usada por el sistema de comunicaciones del Problema 86 para señalizar 0.

Problema 87: (12 puntos)

Considere las siguientes formas de ondas para transmitir pulsos en banda base:



a) Determine la forma más compacta del receptor óptimo para cada caso y bosquéjelos
b) Bosqueje las señales de salida de los respectivos filtros
c) Compare las tolerancias frente a errores de desfase en los instantes óptimos de muestreo.
d) Determine las probabilidades de error en los instantes óptimos de muestreo y compárelas.

Problema 88: (17 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ de la Figura 22 (a) para señalizar 0 y 1 respectivamente. El receptor utilizado se muestra en la Figura 22 (b), donde la respuesta al impulso del filtro adaptado es $h_{\text{FA}}(t) = s_1(t)$.

(a) (4 puntos) Bosqueje la salida del filtro adaptado para la entrada correspondiente a la secuencia 100101110. Indique amplitudes e instantes relevantes.

(b) (8 puntos) ¿Cual es la probabilidad de error de bit de este sistema?

(c) (2 puntos) Considere un sistema que utiliza pulsos rectangulares NRZ que tiene la misma probabilidad de error que la encontrada en (b). ¿Con que amplitud del pulso NRZ se logra?

(d) (3 puntos) Compare la probabilidad de error encontrada en (b) con aquella encontrada para el Problema 110. Comente.

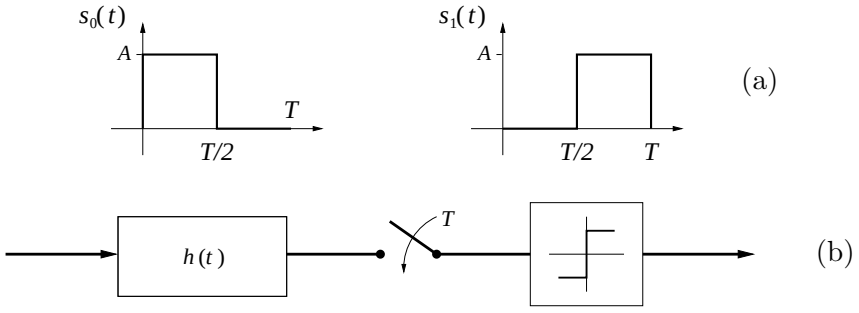


Figura 22: (a) Señales usadas por el sistema de comunicaciones del Problema 88 y (b) diagrama de bloques del receptor. $h_{\text{FA}}(t) = s_1(t)$.

Problema 89: (15 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las siguientes señales para señalizar 0 y 1, respectivamente:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{\frac{\lambda E_b}{T}} \sqcap\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \\ s_1(t) &= -\sqrt{\frac{(2-\lambda)E_b}{T}} \sqcap\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right), \end{aligned}$$

con $\lambda \in (0, 2]$.

(a) (1 puntos) Bosqueje la forma más compacta del receptor óptimo, especificando claramente cada bloque según corresponda (respuestas al impulso, constantes, instantes de muestreo, etc.).

(b) (4 puntos) Bosqueje la salida de un filtro adaptado a la señal $s_0(t)$ para la entrada correspondiente a la secuencia 1010010011. Indique claramente magnitudes e instantes relevantes.

(c) (9 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema.

(d) (1 puntos) Usando su resultado en (c), ¿hay algún valor de λ que sea preferible? Explique por qué sí o por qué no.

Problema 90: (15 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza el pulso $s(t)$ mostrado en la Figura 23 para señalizar 1, y $-\frac{1}{2}s(t)$ para señalizar 0.

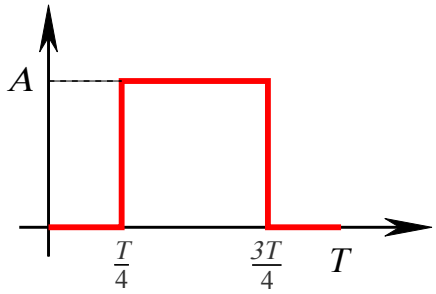


Figura 23: Pulso utilizado en el Problema 90.

(a) (2 puntos) Determine la energía media por bit, E_b, en términos de A y T.

(b) (2 puntos) Bosqueje la forma más compacta del receptor óptimo, especificando claramente cada bloque según corresponda (respuestas al impulso, constantes, instantes de muestreo, etc.).

(c) (4 puntos) Bosqueje la salida de un filtro adaptado normalizado para la entrada correspondiente a la secuencia 1010001011. Indique claramente magnitudes e instantes relevantes.

(d) (7 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en términos de la razón señal a ruido por bit, $\frac{E_b}{N_0}$.

Problema 91: (16 puntos) Considere un sistema de comunicaciones digitales binarias con modulación Manchester. El receptor utilizado es óptimo, de una sóla rama y con filtro adaptado normalizado. El modulador tiene una falla: para señalizar 1, el pulso generado es el que se muestra en la Figura 24 (a). Para señalizar 0 el pulso generado es correcto y se muestra en la Figura 24 (b).

(a) (1 puntos) Bosqueje el receptor Manchester del sistema (receptor Manchester ideal), especificando la respuesta al impulso del filtro adaptado.

(b) (1 puntos) Bosqueje la señal modulada correspondiente a la secuencia 10 11 01 00 generada por el transmisor con falla. Indique claramente magnitudes e instantes relevantes.

(c) (4 puntos) Bosqueje la salida del filtro adaptado al recibir la señal determinada en (b) sin ruido. Indique claramente magnitudes e instantes relevantes.

(d) (7 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en términos de la razón señal a ruido por bit, $\frac{E_b}{N_0}$.

(e) (3 puntos) Determine *aproximadamente* cuanta energía más por bit necesitaría la modulación con falla para lograr un mismo desempeño de probabilidad de error de bit que la transmisión Manchester sin falla.
Indicación: Considere usar la curva de P_b vs. $\frac{E_b}{N_0}$ gráficamente.

3.2.2. Sólo P_b

Problema 92: (10 puntos) Las señales de la Figura 25 son conocidas como codificación *Manchester* y son frecuentemente utilizadas en sistemas de transmisión de banda base. Un ejemplo clásico son las redes de area local *Ehternet*. Su principal ventaja es que todos los bits transmitidos tienen una transición de voltaje, lo cual facilita mucho las tareas de sincronización del receptor.

(a) (2 puntos) Determine la forma más compacta del receptor óptimo y bosquéjelo.

(b) (7 puntos) Determine la probabilidad de error de la codificación Manchester, y compárela con la de un sistema binario de pulsos rectangulares (NRZ). Considere el canal Gaussiano y condiciones iguales de tasa de bits y potencia.

(c) (1 punto) Mencione una *desventaja* de la codificación Manchester, comparado con un sistema binario de pulsos rectangulares (NRZ).

Problema 93: (10 puntos) La modulación OOK (*on-off keying*) es una de las primeras técnicas de modulación utilizadas (de hecho, la telegrafía Morse ya la usaba). OOK consiste en usar modulación *NRZ unipolar*, dada por las siguientes señales:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A \sqcap \left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T} \right) \\ s_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

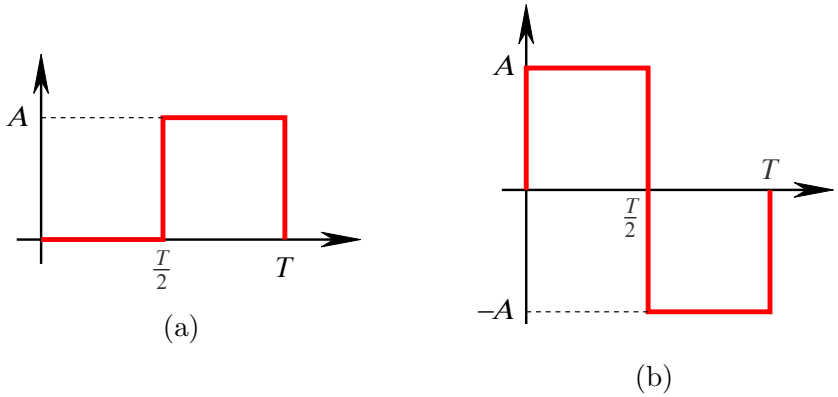


Figura 24: Señales del Problema 91.

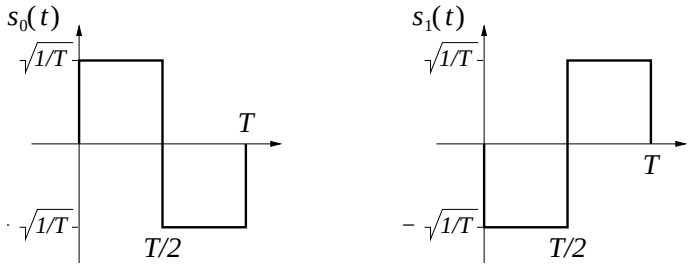


Figura 25: Codificación Manchester, Problema 92.

¿Cual es la probabilidad de error de un receptor óptimo de OOK? Entregue su respuesta en términos de la razón señal a ruido media por bit.

Problema 94: (15 puntos) La empresa *Banda Base Telecomunicaciones S.A.* está desarrollando un sistema de comunicaciones digitales de banda base para una aplicación cuyo presupuesto energético para la transmisión es extremadamente limitado. El proyecto está estancado porque el equipo de ingenieros a cargo de diseñar el sistema no se puede poner de acuerdo sobre qué señalización usar. En la discusión se han formado dos bandos:

Bando 1 ("Los Clásicos"): Proponen usar la modulación *NRZ polar* clásica, es decir, pulsos rectangulares de la forma:

$$s_{0/1}(t) = \pm A_1 \sqcap\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right)$$

Bando 2 ("Los Pillos"): Argumentan que "como la transmisión es binaria, basta con transmitir los ceros, porque el silencio acusa a los unos. Con ello se puede ahorrar la "mitad" de la energía". Así, la propuesta de este bando es usar modulación *NRZ unipolar*, dada por las siguientes señales:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A_2 \sqcap\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right) \\ s_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

La dirección técnica de la empresa no es especialista en comunicaciones digitales, pero considera atractiva la propuesta de los Pillos. Sin embargo, como hay un par de buenos ingenieros entre los Clásicos (y no tantos entre los Pillos), no se atreve a tomar una desición sin consultar con un experto externo. Ese experto es Ud.

La empresa lo contrata para que Ud. elabore un informe que responda las siguientes preguntas sobre la propuesta de los Pillos:

(a) (2 puntos) ¿Cual es la forma más compacta del receptor óptimo? (Bosquéjela!)

(b) (8 puntos) ¿Cual es la probabilidad de error de la "modulación pilla"?

(c) (5 puntos) ¿Cual es la modulación energéticamente más eficiente, y por cuanto?
Indicación: Determine la relación entre A_1 y A_2 tal que ambas modulaciones tengan la misma probabilidad de error.

Problema 95: (12 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza una forma de pulso $\varphi(t)$ para definir las señales $s_0(t) = \sqrt{E_b}\varphi(t)$ y $s_1(t) = -\sqrt{E_b}\varphi(t)$ para señalizar 0 y 1, respectivamente, con

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \sqcap\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right).$$

(a) (2 puntos) Bosqueje la forma más compacta del receptor óptimo, especificando claramente cada bloque según corresponda (respuestas al impulso, constantes, instantes de muestreo, etc.).

(b) (7 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema.
Indicación: Según el camino que decida tomar –hay uno corto y uno no tanto–, puede resultarle útil saber que

$$\int_0^T \sin^2(a-bx)dx = \frac{\sin(2a-2bT)-\sin(2a)+2bT}{4b}.$$

(c) (3 puntos) Bosqueje la densidad espectral de potencia del proceso de ruido que se observa a la salida del filtro adaptado especificado en (b), si es alimentado con ruido blanco de densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$.

Problema 96: (12 puntos) Se dispone de un receptor con un filtro adaptado normalizado al pulso base $\varphi(t)$. El dispositivo de decisión es binario y su umbral de decisión puede ser regulado por el usuario. Considere la detección óptima de las siguientes modulaciones binarias de banda base mediante este receptor:

A: $s_0(t) = \breve{a}_0\varphi(t)$ y $s_1(t) = \breve{a}_1\varphi(t)$,
B: $s_0(t) = \breve{b}_0\varphi(t)$ y $s_1(t) = \breve{b}_1\varphi(t)$,
C: $s_0(t) = \breve{c}_0\varphi(t)$ y $s_1(t) = \breve{c}_1\varphi(t)$,

con $\breve{a}_0 = \sqrt{E}$, $\breve{a}_1 = -\sqrt{\frac{E}{2}}$, $\breve{b}_0 = 3\sqrt{E}$, $\breve{b}_1 = \sqrt{E}$, $\breve{c}_0 = \sqrt{2E}$, $\breve{c}_1 = -\frac{\sqrt{E}}{2}$ y E un parámetro de energía.

(a) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de cada caso.
Indicación: Si conoce la variable de decisión que alimenta al dispositivo de decisión, puede formularla directamente. De lo contrario haga un análisis genérico.

(b) (4 puntos) Ordene las probabilidades de error de bit de menor a mayor.

(c) (2 puntos) ¿Existen valores $\breve{d}_0$ y $\breve{d}_1$ de una modulación D tal que su probabilidad de error sea menor que las tres modulaciones analizadas? En caso afirmativo, indique valores válidos, en caso contrario explique por qué.

Problema 97: (5 puntos)

[Haykin P7.5] Un sistema binario PCM que utiliza una señal NRZ unipolar vista en clase opera con una probabilidad de error de 10^{-6}. Suponga que la tasa de símbolos se duplica. Encuentre el valor de la probabilidad de error a la que opera ahora el sistema. Utilice el grafico de la figura 5.

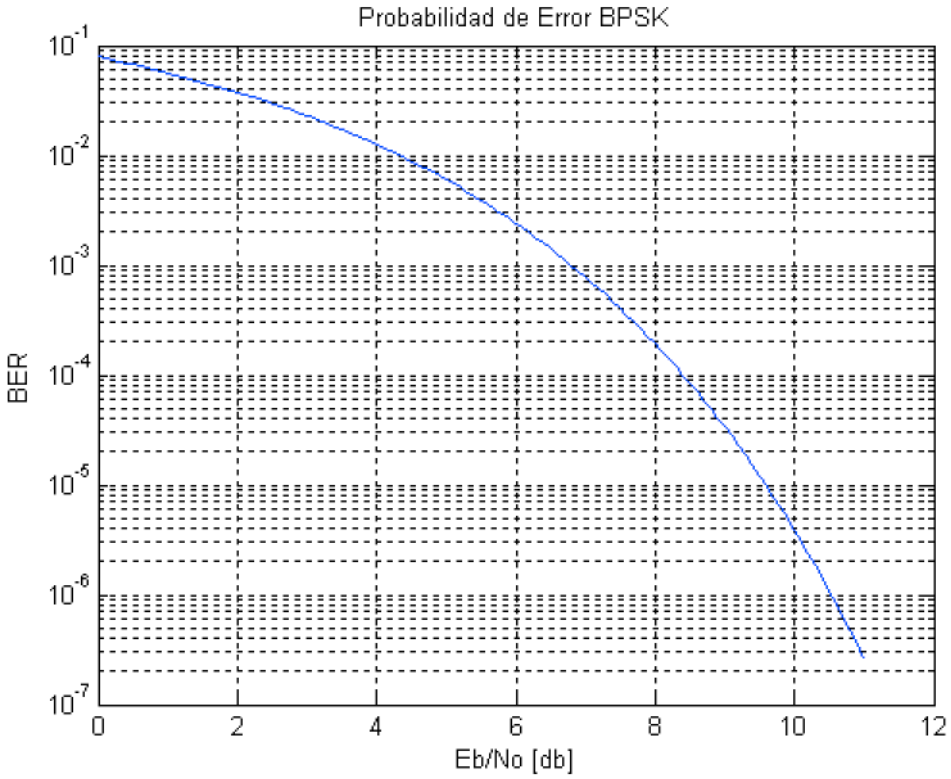


Figura 5.

Problema 98: (10 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base antipodal utiliza el pulso mostrado en la Figura 26. Determine la probabilidad de error de bit (P_b) en términos de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$) de esta modulación.

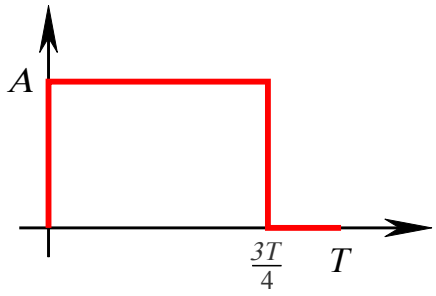


Figura 26: Pulso utilizado en el Problema 98.

3.3. Otros

Problema 99: (8 puntos) Considere un sistema de comunicaciones digitales binario cuyo receptor óptimo tiene la estructura mostarda en la Figura 27. Sabemos que el receptor toma una decisión cada T segundos tomando en cuenta *únicamente* el valor de la muestra obtenida en el instante correspondiente. Dado que este procedimiento es óptimo, podemos inferir que decisiones futuras o pasadas (y las muestras respectivas que las sustentan) *no* contienen información adicional que podría ser explotada para reducir aún más la probabilidad de error en la decisión actual.

Sin embargo, sabemos por otro lado que un filtro alimentado por ruido blanco entrega en su salida un proceso de ruido correlacionado en el tiempo ("ruido coloreado", no blanco). Inferimos entonces que el ruido a la salida del filtro adaptado del receptor de la Figura 27 tiene correlación en el tiempo. Así, dada esta correlación, muestras futuras y pasadas que entrega el muestreador sí contienen, en general, información sobre el ruido en la muestra actual, y debieran por ende ser útiles para reducir la probabilidad de error en la decisión actual.

Para entender cual punto de vista es correcto, considere el filtro adaptado al pulso $s(t)$ de la Figura 28 y determine la función de autocorrelación del proceso de ruido presente en su salida. En base a su resultado, confirme o desmienta la hipótesis que "muestras futuras o pasadas podrían ayudar en la decisión actual".

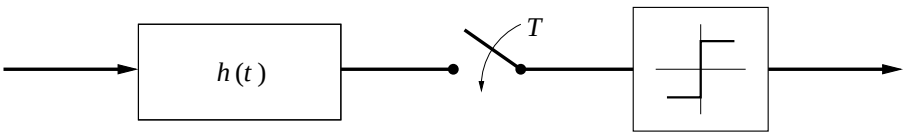


Figura 27: Receptor del Problema 99.

Problema 100: (5 puntos) Ante la misma cantidad de ruido, ¿con cual de las señales de la Figura 29 se logra la menor probabilidad de error de bit en un sistema 8-PAM de banda base? Justifique su respuesta.

Problema 101: (10 puntos) Para las siguientes preguntas, independientes entre sí, considere las señales de la Figura 30 y las curvas de la Figura 31.

(a) (3 puntos) ¿Si $A = \frac{3}{2}B$, cual de las señales utilizaría para una transmisión 16-PAM, y por qué?

(b) (5 puntos) Considere que $s_0(t)$ es utilizada para una modulación 4-PAM y $s_1(t)$ para una modulación 8-PAM. ¿Qué relación debe existir entre las amplitudes para que ambas transmisiones tengan $P_s = 10^{-3}$?

(c) (2 puntos) Considere nuevamente el caso del punto (b). Es claro que la tasa de datos de la transmisión 8-PAM es mayor que la lograda con 4-PAM. ¿Como cambia su respuesta en (b) si se ajusta la duración del pulso $s_0(t)$ para que ambas transmisiones operen con la misma tasa de datos?

Problema 102: (22 puntos) Considere un cable con 8 conductores de cobre agrupados en 4 pares trenzados como aquellos de categoría 5e utilizados en redes *Ethernet*. El par no.

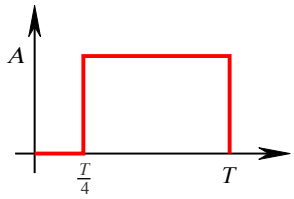


Figura 28: Pulso utilizado por el sistema del Problema 99.

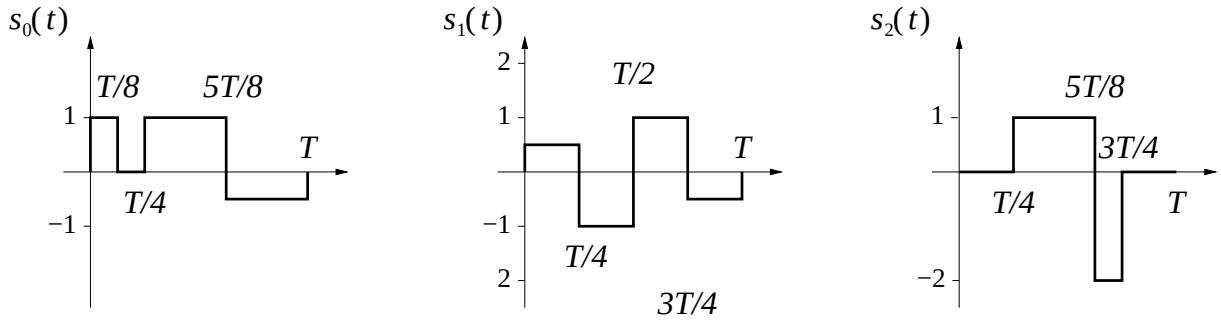


Figura 29: Señales para sistema 8-PAM del Problema 100.

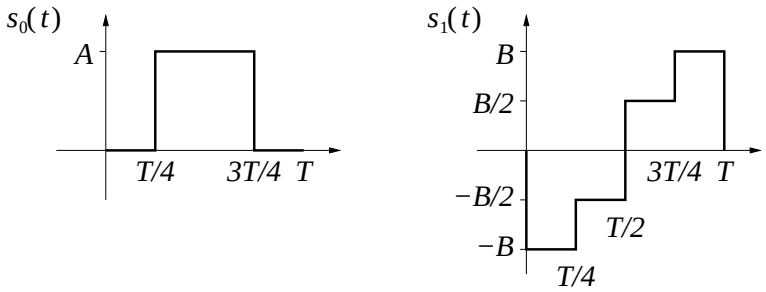


Figura 30: Señales para el Problema 101.

1 es utilizado para una transmisión digital binaria de banda base continua con pulsos rectangulares de duración T y amplitud A. Los demás pares están libres (en silencio). Ud. desea aprovechar uno de ellos (digamos el no. 2) para duplicar la tasa de datos del enlace, modulándolo con una segunda señal digital binaria.

Uno de los problemas que surge al usar simultáneamente pares vecinos es *crosstalk*, cuya causa es la inducción mutua de señales entre pares trenzados. Considere el siguiente modelo para este fenómeno:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= s_1(t) + \alpha s_2(t) + w_1(t) \\ r_2(t) &= s_2(t) + \alpha s_1(t) + w_2(t), \end{aligned}$$

donde $r_1(t)$ y $r_2(t)$ son las señales recibidas en los pares 1 y 2, respectivamente, $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son las respectivas señales transmitidas, $w_1(t)$ y $w_2(t)$ son los respectivos ruidos térmicos, ambos blancos Gaussianos con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$ e independientes entre sí, y α es un parámetro constante que representa la inducción mutua de *crosstalk* ($\alpha < 1$).

(a) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del sistema de comunicaciones que utiliza los dos pares trenzados. Incluya todos los bloques relevantes del transmisor, canal y receptor, así como la inyección de *crosstalk*. Indique señales relevantes.

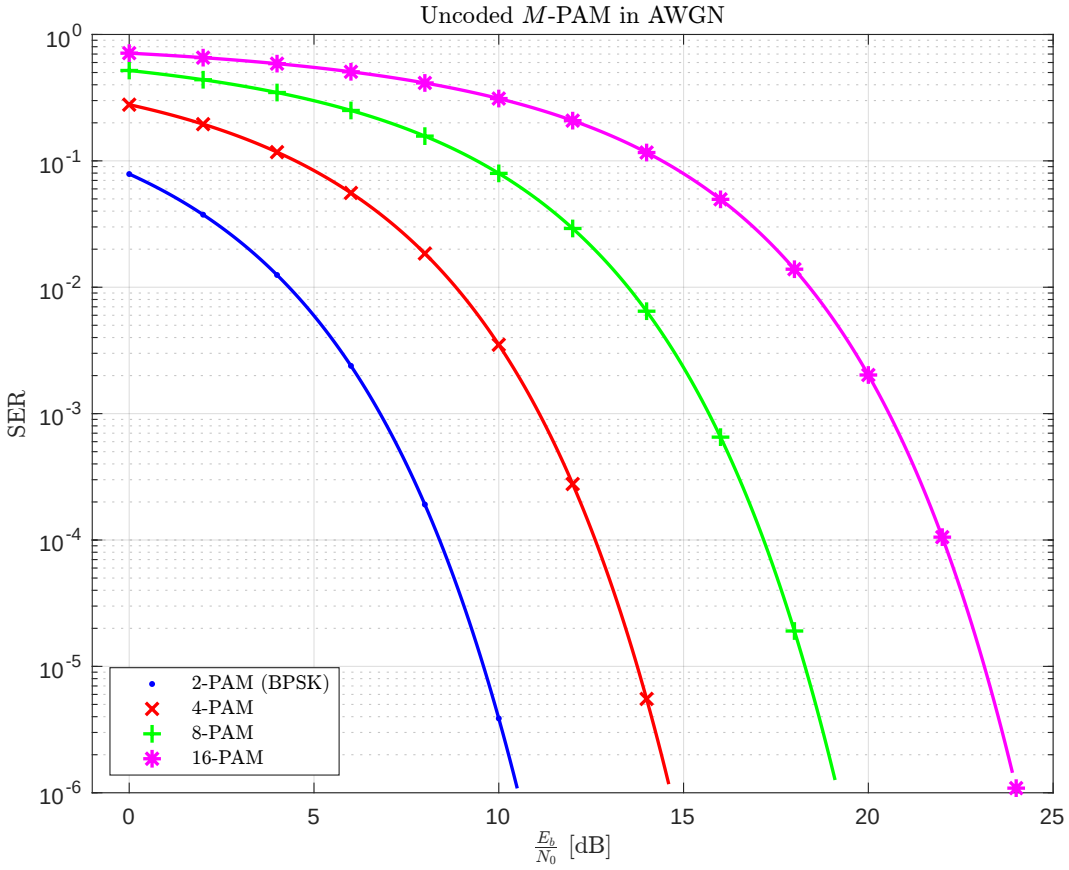


Figura 31: Probabilidades de error de M-PAM para el Problema 101.

(b) (4 puntos) Considere que el par no. 2 también es modulado con pulsos rectangulares de duración T y amplitud A. Bosqueje la señal de salida de los filtros adaptados de ambos receptores para la secuencia binaria 0110 transmitida en el par no. 1 y la secuencia 0011 en el par no. 2 (desprecie el efecto del ruido). Señale claramente todas las magnitudes e indique los instantes óptimos de muestreo. ¿Qué puede concluir sobre el fenómeno de *crosstalk*?

(c) (4 puntos) Manteniendo la modulación con pulsos rectangulares de duración T y amplitud A en el par no. 1, proponga un par de pulsos alternativos para modular al par no. 2 tal que el *crosstalk* entre ambos pares sea irrelevante en la entrada al dispositivo de decisión. El pulso propuesto debe tener energía A^2T. Justifique su propuesta.

(d) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de la solución propuesta en (c) para la comunicación a través del par no. 2.

(e) (3 puntos) Determine la probabilidad de error de bit global de este sistema en función de la energía por bit *de la fuente*.

(f) (3 puntos) En vez de habilitar el uso del segundo par para duplicar la tasa de datos, considere la alternativa de extender la modulación del primer par a 4-PAM. ¿Cual de ambas soluciones tiene mejor desempeño en términos de probabilidad de error? Justifique.

Problema 103: (10 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza el pulso de la Figura 32 (a) para generar una modulación antipodal 2-PAM. Un segundo sistema modula 8-PAM con el pulso de la Figura 32 (b) aplicándole factores $\pm 1, \pm 3, \pm 5$ y ± 7. El valor del parámetro A en la figura (a) es la mitad del valor de dicho parámetro en la figura (b). El tiempo de símbolo T no necesariamente es igual en ambos casos. El parámetro B tiene valor negativo. Las respectivas probabilidades de error de bit se ilustran en el gráfico de la Figura 33.

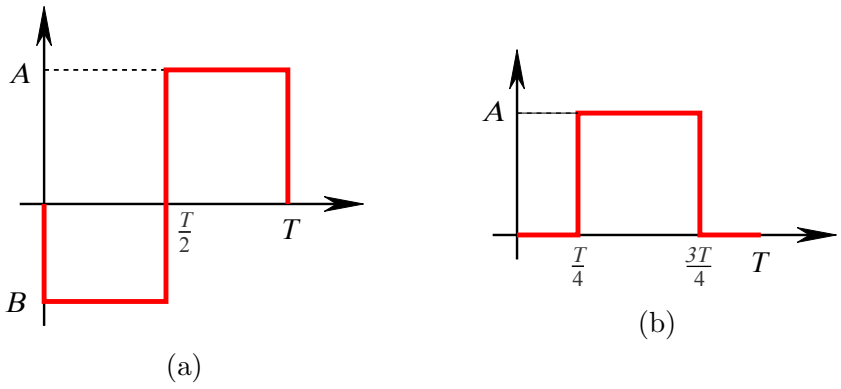


Figura 32: Señales del Problema 103.

(a) (8 puntos) Determine el valor de la amplitud B en función de A y la relación entre los tiempos de símbolo de ambos sistemas para que ambos operen con la misma tasa de bits con una probabilidad de error de bit de 10^{-3}.

(b) (2 puntos) En base a su respuesta en (a), señale cual de ambos sistemas utilizaría, justificando por qué.

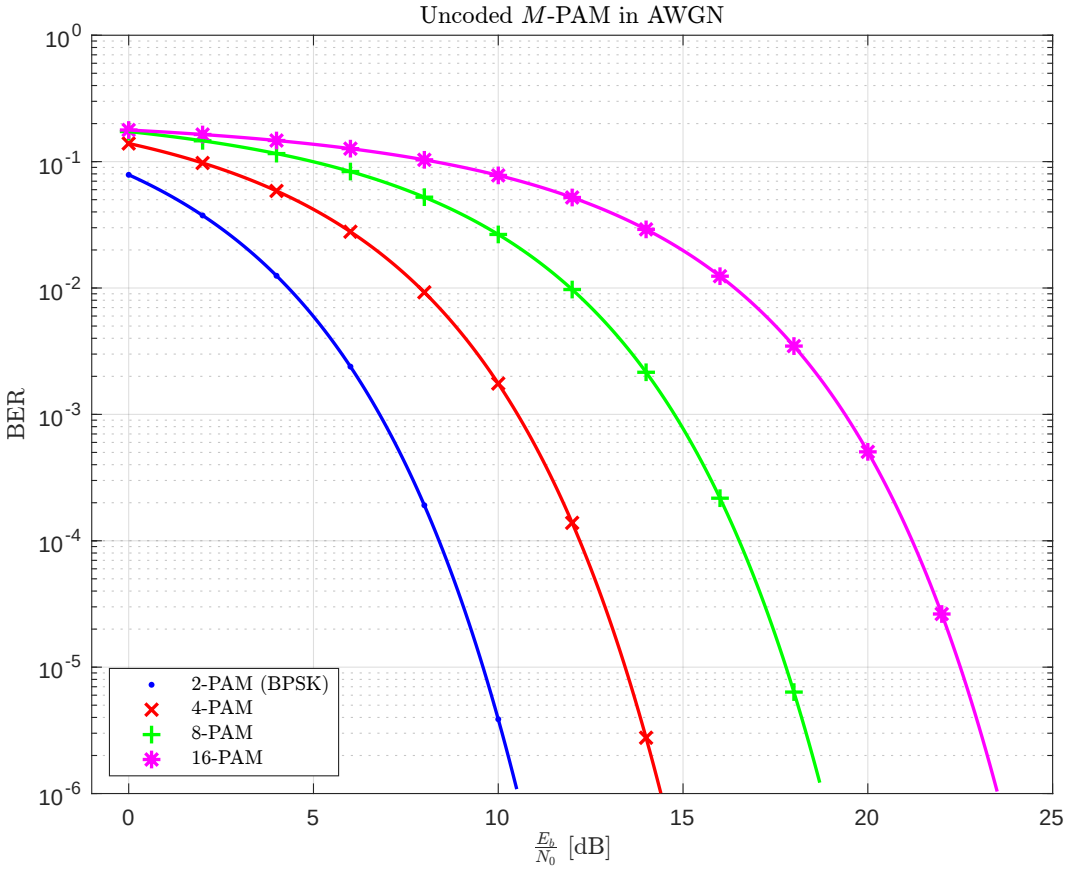


Figura 33: Probabilidades de error de bit de M-PAM para el Problema 103.

4. Comunicaciones digitales binarias de banda base (track avanzado)

4.1. Módulo 9: Probabilidad de error de bit de modulaciones binarias (receptor de dos ramas)

4.1.1. Mixtos filtro adaptado y P_b

Problema 104: (12 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las siguientes señales para señalizar 0 y 1, respectivamente:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A \sqcap \left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right) \\ s_1(t) &= \frac{A}{\sqrt{2}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T} \right). \end{aligned}$$

(a) (2 puntos) Bosqueje la forma más compacta del receptor óptimo, especificando claramente cada bloque según corresponda (respuestas al impulso, constantes, instantes de muestreo, etc.).

(b) (3 puntos) Bosqueje la salida de un filtro adaptado a la señal $s_0(t)$ para la entrada correspondiente a la secuencia 10001101110. Indique claramente magnitudes e instantes relevantes.

(c) (7 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 105: (15 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ de la Figura 34 para señalizar 0 y 1 respectivamente, con $B = -2A$.

(a) (2 puntos) Bosqueje la forma más compacta del receptor óptimo, especificando claramente cada bloque según corresponda (respuestas al impulso, constantes, instantes de muestreo, etc.).

(b) (1 puntos) Determine la energía media por bit (E_b) en función de A y T. Considere bits de mensaje equiprobables.

(c) (1 puntos) Bosqueje la forma de la señal *transmitida* correspondiente al mensaje 110101001110, indicando magnitudes e instantes relevantes.

(d) (3 puntos) Bosqueje la salida de un filtro adaptado a la señal $s_0(t)$ para la entrada correspondiente a la secuencia indicada en (c). Indique claramente magnitudes e instantes relevantes y destaque los instantes de muestreo.

(e) (8 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 106: (19 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las siguientes señales para señalizar 0 y 1, respectivamente:

$$s_0(t) = \sqrt{\frac{E_b}{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right)$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{E_b}{2T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T} \right).$$

(a) (2 puntos) Bosqueje la forma más compacta del receptor óptimo, especificando claramente cada bloque según corresponda (respuestas al impulso, constantes, instantes de muestreo, etc.).

(b) (4 puntos) Bosqueje la salida de cada filtro adaptado a cada una de las dos posibles señales de entrada. Indique claramente magnitudes e instantes relevantes.

(c) (6 puntos) Para cada una de las combinaciones de (b), determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria $\check{z}$ que alimenta al dispositivo de decisión. El ruido térmico desde luego es blanco con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$.

(d) (2 puntos) Describa la probabilidad de error de bit, P_b, genéricamente en términos de probabilidades de error condicionales.

(e) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 107: (20 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las siguientes señales para señalizar 0 y 1, respectivamente:

$$s_0(t) = 2\sqrt{\frac{E}{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right)$$

$$s_1(t) = -\sqrt{\frac{E}{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}} \right),$$

con E un parámetro de energía.

(a) (2 puntos) Exprese $s_0(t)$ y $s_1(t)$ en términos de la energía media por bit (E_b) considerando bits de mensaje equiprobables. En adelante trabaje en términos de E_b.

(b) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del receptor, especificando claramente las respuestas al impulso de los filtros adaptados, las constantes, instantes de muestreo, etc.

(c) (2 puntos) Bosqueje la señal transmitida correspondiente al mensaje 11010.

(d) (5 puntos) Bosqueje la señal en la salida de ambos filtros adaptados para la entrada correspondiente a la señal transmitida, ignorando el ruido térmico. Indique instantes y amplitudes relevantes de las señales de salida, los instantes de muestreo y amplitudes muestreadas.

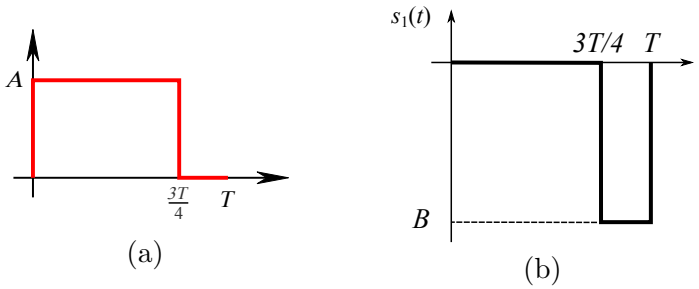


Figura 34: Señales del Problema 105.

(e) (3 puntos) Muestre que en ausencia de ruido este receptor no se equivoca. Concretamente, componga una tabla con 5 columnas y 4 filas: las 5 columnas son para cada uno de los bits del mensaje y las 4 filas muestran cada uno de los bits de mensaje, las variables de decisión $\check{z}_0$, $\check{z}_1$ y la decisión del receptor.

(f) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 108: (15 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza un pulso rectangular $s_0(t)$, de duración T y energía E_b, para señalizar 0 y el pulso $s_1(t)$ ilustrado en la Figura 35 para señalizar 1, con $A = -\alpha\sqrt{\frac{E_b}{T}}$, $\alpha \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ y $B = \sqrt{(2-\alpha^2)\frac{E_b}{T}}$.

(a) (3 puntos) Explique, con ecuaciones, por qué en este caso el receptor óptimo no puede ser simplificado a uno de una rama.

(b) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del receptor de dos ramas más simple posible, especificando claramente las respuestas al impulso de los filtros adaptados.

(c) (10 puntos) ¿Cual es la probabilidad de error de bit de este sistema?
Indicación: Para no alargar el trabajo, puede considerar $P(D1|0) = P(D0|1)$. El puntaje para resolver correctamente la probabilidad de error de bit para el caso particular de $\alpha = 1$ es 5 puntos.

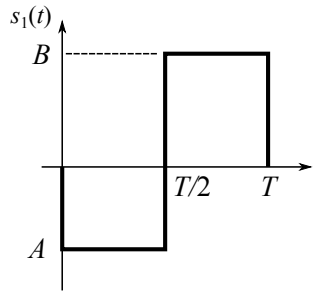


Figura 35: Pulso $s_1(t)$ del Problema 108.

Problema 109: (13 puntos) El transmisor defectuoso del Problema 91 pertenece a una sonda espacial que va camino a Marte. La sonda tiene por misión establecerse en órbita marciana para actuar como repetidor de comunicaciones para robots de prospección explorando la superficie marciana. Pese a numerosos esfuerzos para corregir la falla, transmitiendo diversos comandos de reconfiguración y varias nuevas versiones de *firmware* para el modulador digital, la falla se ha mostrado estoica y no tiene solución. A consecuencia de ello, el director del proyecto le ha encomendado a Ud. la tarea de rediseñar el receptor en Tierra para recibir con mínima probabilidad de error de bit las transmisiones hechas con la modulación defectuosa.

(a) (2 puntos) Bosqueje la forma más compacta posible del receptor óptimo para la modulación defectuosa del Problema 91, especificando claramente cada bloque (respuestas al impulso, constantes, instantes de muestreo, etc.).

(b) (8 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del nuevo receptor, expresada en términos de la razón señal a ruido por bit, $\frac{E_b}{N_0}$.

(c) (3 puntos) Si la potencia de una señal de radio que se propaga por el espacio libre se debilita con el cuadrado de la distancia, y si el sistema sin fallas fue diseñado para lograr $P_b = 10^{-3}$ a una distancia de 3,0 unidades astronómicas[5], permitiendo así la comunicación permanente entre Tierra y Marte, sin importar sus respectivas ubicaciones en órbita, determine si el sistema rediseñado también logra este objetivo, o si la misión deberá conformarse con períodos en que la comunicación con Marte no es posible.

4.1.2. Sólo P_b

Problema 110: (10 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ de la Figura 36 para señalizar 0 y 1, respectivamente. Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

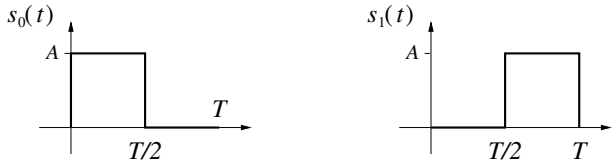


Figura 36: Señales usadas por el sistema de comunicaciones del Problema 110.

Problema 111: (15 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ de la Figura 37 para señalizar 0 y 1 respectivamente. El parámetro λ es un escalar conocido con valor entre 0 y 1.

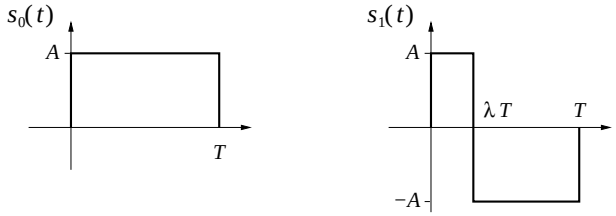


Figura 37: Señales usadas por el sistema de comunicaciones del Problema 111.

(a) (10 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema.

(b) (5 puntos) Usando su resultado en (a), ¿Cual es el valor ideal para λ?

[5]Una unidad astronómica (u.a.) es la distancia entre la Tierra y el Sol. La distancia entre Marte y la Tierra varía según la ubicación de cada planeta en su órbita en torno al Sol y llega a un valor máximo de 2,7 u.a. `https://theskylive.com/how-far-is-mars`.

Problema 112: (10 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza las siguientes señales para señalizar 0 y 1, respectivamente:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right) \\ s_1(t) &= -s_0\left(t - \frac{T}{2}\right). \end{aligned}$$

Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit, $\frac{E_b}{N_0}$.

Problema 113: (15 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base utiliza la señal de la Figura 38 como $s_0(t)$ para señalizar 0. Para señalizar 1, el sistema utiliza $s_1(t) = s_0(T - t)$.

(a) (3 puntos) Haga un diagrama de bloques del receptor más simple posible, especificando claramente todos sus componentes.

(b) (8 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit.

(c) (4 puntos) Considere un sistema que utiliza modulación binaria antipodal que tiene la misma probabilidad de error que la encontrada en (b). Determine los puntos de señal $\check{s}_0$ y $\check{s}_1$ correspondientes, expresados en términos del parámetro A.

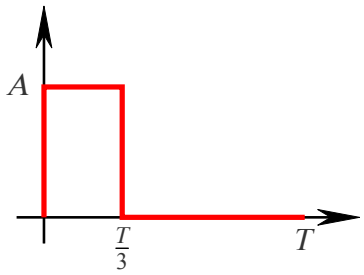


Figura 38: Señal utilizada por el sistema de comunicaciones del Problema 113.

4.2. Otros

Problema 114: (10 puntos) Se tiene un sistema de comunicaciones digitales binarias de banda base que utiliza las señales de la Figura 37 con $\lambda = \frac{1}{2}$. El receptor óptimo es implementado con la estructura que se muestra en la Figura 39 y es alimentado con ruido blanco $w(t)$.

(a) (5 puntos) Demuestre que las variables aleatorias n_0 y n_1 son independientes.

(b) (5 puntos) Si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, ¿Se mantiene la independencia entre n_0 y n_1? Justifique su respuesta.

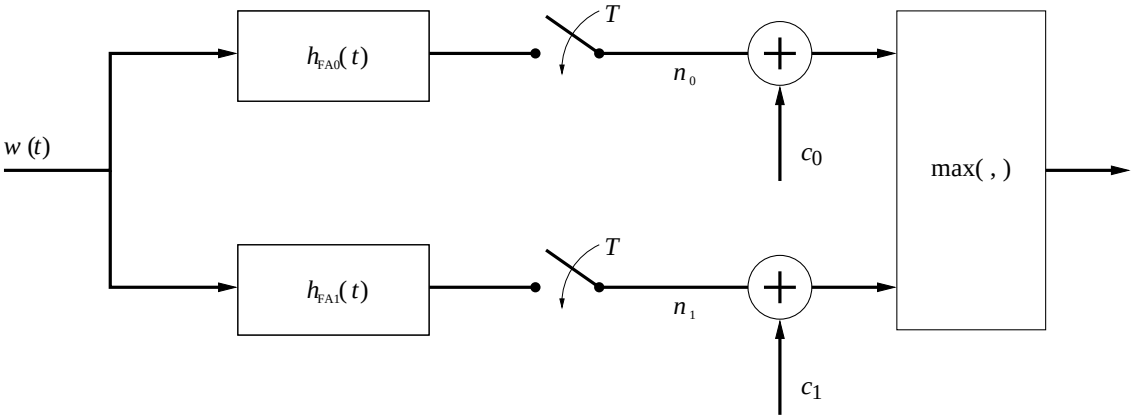


Figura 39: Diagrama de bloques del receptor del Problema 114.

5. Módulo 11: Modulaciones M-arias de banda base (M-PAM)

Problema 115: (20 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 4-PAM con pulsos rectangulares de duración T y amplitudes A_m. El valor de A_m que corresponde a cada símbolo m está dado en la siguiente tabla:

Símbolo (m)	Amplitud A_m
0	$-4A$
1	$-3A$
2	$3A$
3	$4A$

Una adecuada asignación de las cuatro duplas binarias posibles (00, 01, 10 y 11) a los 4 símbolos anteriores permite implementar lo que se conoce como modulación *jerárquica*. La idea es que uno de los dos bits de la dupla, digamos el izquierdo, tenga un menor requerimiento de razón señal a ruido para ser demodulado con una determinada tasa de error que el otro bit (el derecho). Esta asimetría se puede aprovechar para modular información importante en el bit izquierdo, el que tiene mayor chance de ser demodulado sin error, y dejar el bit derecho para portar información complementaria o de menor relevancia que podrá ser demodulada satisfactoriamente cuando la razón señal a ruido sea suficientemente alta.

Ejemplos de la modulación jerárquica hay en el ámbito de la TV digital, donde se desea lograr amplia cobertura con una imagen de resolución básica (típicamente en zonas rurales), y entregar mayor definición o contenido adicional en zonas cercanas a la emisora (típicamente en zonas urbanas). En el caso de la TV satelital se ha usado la técnica para extender la oferta de contenido sin la necesidad de reemplazar millones de decodificadores (*set-top boxes*) por pérdida de retro-compatibilidad.

(a) (2 puntos) Proponga una asignación de las cuatro duplas posibles (00, 01, 10 y 11) a los 4 símbolos de la modulación. La asignación debe ser Gray y debe cumplir a la vez con el objetivo de la modulación jerárquica (bit más importante: el izquierdo).

(b) (1 punto) De acuerdo a lo propuesto en (a), bosqueje la forma de la señal *transmitida* correspondiente al mensaje 10111010011100010101. Indique amplitudes e instantes relevantes.

(c) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del receptor óptimo para esta transmisión (tiene una sola rama) y especifique la respuesta al impulso del filtro adaptado.

(d) (3 puntos) Considere que el receptor de (c) recibe la señal de (b) sin ruido. Grafique la señal de salida del filtro adaptado e indique amplitudes e instantes relevantes.

(e) (3 puntos) Determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

Indicación: Haga el cálculo en forma genérica para A_m. El ruido desde luego es blanco con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$.

(f) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de este sistema en función de A, T y N_0.

(g) (1 punto) Determine la energía promedio por símbolo, E_s, de esta modulación en términos de A y T.

(h) (1 punto) Determine la energía promedio por bit, E_b, en términos de A y T.

(i) (2 puntos) Formule ahora la probabilidad de error de símbolo en términos de la razón señal a ruido por bit $\frac{E_b}{N_0}$.

(j) (1 puntos) Formule finalmente la probabilidad de error de bit en función de la razón señal a ruido por bit.

Problema 116: (20 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 4-PAM con el pulso mostrado en la Figura 40. La amplitud de cada símbolo está dada en la siguiente tabla.

Símbolo (m)	Señal
0	0
1	$s(t)$
2	$2s(t)$
3	$3s(t)$

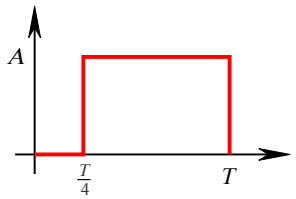


Figura 40: Pulso utilizado en el sistema 4-PAM del Problema 116.

(a) (1 punto) El receptor óptimo más compacto posible para esta transmisión tiene una sola rama. Haga un diagrama de bloques y especifique la respuesta al impulso normalizada del filtro adaptado.

(b) (4 puntos) Para cada símbolo posible, determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

Indicación: Defina A_m como la amplitud del pulso correspondiente al símbolo m y haga el cálculo sólo una vez genericamente para A_m.

(c) (1 puntos) En base al resultado anterior, bosqueje el diagrama de señales que alimentan al dispositivo de decisión, indicando todas las magnitudes relevantes y señalando claramente cual es cada símbolo m. Proponga un código Gray.

(d) (4 puntos) Considere que el receptor de (a) opera sin ruido y que recibe la señal correspondiente al mensaje 11001011100110100101, modulado de acuerdo al código Gray establecido en (c). Grafique la señal de salida del filtro adaptado. Indique amplitudes e instantes relevantes, y destaque los instantes óptimos de muestreo.

(e) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de este sistema en función de A, T y N_0.

(f) (3 puntos) Determine la energía promedio por bit, E_b, en términos de A y T.

(g) (2 puntos) Finalmente, formule la probabilidad de error de bit en términos de la razón señal a ruido por bit $\frac{E_b}{N_0}$ de esta modulación.

Problema 117: (20 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 8-PAM. El pulso utilizado es aquel de la Figura 35, con $A = -\sqrt{\frac{E}{2T}}$ y $B = \sqrt{\frac{3E}{2T}}$. La señal modulada correspondiente al símbolo m, con $m \in [0, 1, \ldots, 7]$, es $s_m(t) = ms_1(t)$.

(a) (1 punto) El receptor óptimo más compacto posible para esta transmisión tiene una sola rama. Haga un diagrama de bloques y especifique la respuesta al impulso normalizada del filtro adaptado.

(b) (4 puntos) Para cada símbolo posible, determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

(c) (1 puntos) En base al resultado anterior, bosqueje el diagrama de señales de los estadísticos que alimentan al dispositivo de decisión. Indique todas las magnitudes relevantes y señale claramente cual es cada símbolo m.

(d) (1 puntos) Proponga un código Gray para el diagrama de señales anterior.

(e) (4 puntos) Considere que el receptor de (a) opera sin ruido y que recibe la señal correspondiente al mensaje 100110110010111, modulada de acuerdo al código Gray establecido en (d). Grafique la señal de salida del filtro adaptado. Indique amplitudes e instantes relevantes y destaque los instantes óptimos de muestreo.

(f) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de este sistema en función de E y N_0.

(g) (2 puntos) Determine la energía promedio por bit, E_b, en términos de E.

(h) (2 puntos) Finalmente, formule la probabilidad de error de bit en términos de la razón señal a ruido por bit $\frac{E_b}{N_0}$ de esta modulación.

Problema 118: (20 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 8-PAM con el pulso base mostrado en la Figura 41, con $A = \sqrt{\frac{2}{T}}$. La amplitud de cada uno de los 8 símbolos está dada por $A_m = (2m - 2 - M)\sqrt{E}$, con $m = 0, \ldots, 7$ y E un parámetro de energía.

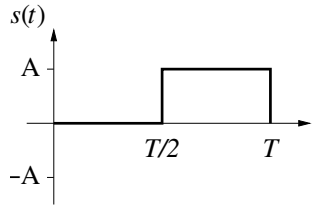


Figura 41: Pulso base utilizado por el sistema 8-PAM del Problema 118.

(a) (3 puntos) Exprese A_m en términos de la energía media por bit, E_b.

(b) (1 punto) El receptor óptimo más compacto posible para esta transmisión tiene una sola rama. Haga un diagrama de bloques y especifique la respuesta al impulso normalizada del filtro adaptado.

(c) (4 puntos) Para cada símbolo, determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

Indicación: Haga el cálculo sólo una vez genericamente en función de A_m.

(d) (1 punto) En base al resultado anterior, bosqueje el diagrama de señales que alimentan al dispositivo de decisión, indicando todas las magnitudes relevantes y señalando claramente cual es cada símbolo m. Proponga un código Gray.

(e) (4 puntos) Considere que el receptor de (b) opera sin ruido y que recibe la señal correspondiente al mensaje 110011010100101101, modulado de acuerdo al código Gray establecido en (d). Grafique la señal de salida del filtro adaptado. Indique amplitudes e instantes relevantes y destaque los instantes óptimos de muestreo.

(f) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit, $\frac{E_b}{N_0}$.

(g) (1 punto) Finalmente, formule la probabilidad de error de bit de esta modulación.

Problema 119: (15 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 4-PAM con el pulso mostrado en la Figura 42, con A tal que el pulso tenga energía unitaria. La amplitud de cada uno de los 4 símbolos está dada por $A_m = (2m - 1)\sqrt{E}$, con $m = 0, \ldots, 3$ y E un parámetro de energía.

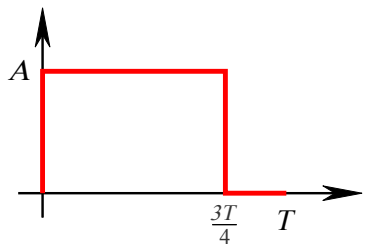


Figura 42: Pulso utilizado en el sistema 4-PAM del Problema 119.

(a) (2 puntos) Exprese A_m en términos de la energía media por bit, E_b, y trabaje en términos de E_b de aquí en adelante.

(b) (1 punto) Haga un diagrama de bloques del receptor óptimo y especifique la respuesta al impulso del filtro adaptado.

(c) (3 puntos) Para cada símbolo posible, determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

Indicación: Haga el cálculo sólo una vez genericamente en función de A_m.

(d) (1 punto) En base al resultado anterior, bosqueje el diagrama de señales a la entrada del dispositivo de decisión, indicando todas las magnitudes relevantes y señalando claramente cual es cada símbolo m. Proponga un código Gray.

(e) (3 puntos) Considere que el receptor de (b) opera sin ruido y que recibe la señal correspondiente al mensaje 011001101011010101, modulado de acuerdo al código Gray establecido en (d). Grafique la señal de salida del filtro adaptado. Indique amplitudes e instantes relevantes y destaque los instantes óptimos de muestreo.

(f) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de este sistema en función de la razón señal a ruido por bit, $\frac{E_b}{N_0}$.

(g) (1 punto) Formule la probabilidad de error de bit de esta modulación.

Problema 120: (20 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 8-PAM con el pulso mostrado en la Figura 43. Los símbolos de la modulación son $\check{s}_m = 2(m-5)\sqrt{E}$, con E un parámetro de energía y $m \in \{0, \ldots, 7\}$.

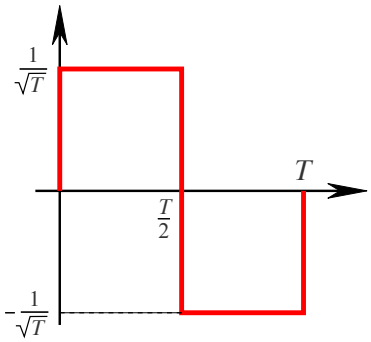


Figura 43: Pulso utilizado en el sistema 8-PAM del Problema 120.

(a) (2 puntos) Bosqueje el diagrama de señales. Indique el símbolo $\check{s}_m$ que corresponde a cada punto de señal en el diagrama y defina un código Gray para la modulación.

(b) (1 punto) Bosqueje la forma de la señal transmitida correspondiente al mensaje 101 010 111 010 000 011. Indique amplitudes e instantes relevantes.

(c) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del receptor óptimo para este sistema. Considere un filtro adaptado normalizado y especifique su respuesta al impulso.

(d) (3 puntos) Considere que el receptor de (c) recibe la señal de (b) sin ruido. Grafique la señal de salida del filtro adaptado. Indique amplitudes e instantes relevantes y destaque los instantes óptimos de muestreo.

(e) (3 puntos) Considerando ahora que la transmisión es contaminada en el receptor con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$, determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

Indicación: Haga el cálculo en forma genérica para $\check{s}_m$.

(f) (5 puntos) Formule la probabilidad de error de símbolo, P_s, de este sistema en función de E y N_0.

(g) (2 puntos) Determine la energía promedio por bit, E_b, de esta modulación en términos de E.

(h) (2 puntos) Convierta el resultado de (f) a la probabilidad de error de bit, P_b, en términos de la razón señal a ruido por bit $\frac{E_b}{N_0}$.

Problema 121: (20 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 4-PAM con el pulso mostrado en la Figura 44, con $A = \sqrt{\frac{4}{T}}$. Los símbolos de la modulación son $\check{s}_m = (2m-1)\sqrt{E}$, con E un parámetro de energía y $m \in \{0, \ldots, 3\}$.

(a) (2 puntos) Bosqueje el diagrama de señales. Indique el símbolo $\check{s}_m$ que corresponde a cada punto de señal en el diagrama y defina un código Gray para la modulación.

(b) (1 punto) Bosqueje la forma de la señal transmitida correspondiente al mensaje 11 10 01 01 11 00 10. Indique amplitudes e instantes relevantes.

(c) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del receptor óptimo para este sistema. Considere un filtro adaptado normalizado y especifique su respuesta al impulso.

(d) (3 puntos) Considere que el receptor de (c) recibe la señal de (b) sin ruido. Grafique la señal de salida del filtro adaptado. Indique amplitudes e instantes relevantes y destaque los instantes óptimos de muestreo y las amplitudes muestreadas.

(e) (3 puntos) Considerando ahora que la transmisión es contaminada en el receptor con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$, determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

Indicación: Haga el cálculo en forma genérica para $\check{s}_m$.

(f) (5 puntos) Formule la probabilidad de error de símbolo (P_s) de este sistema en función de E y N_0.

(g) (2 puntos) Determine la energía promedio por bit, E_b, de esta modulación en términos de E.

(h) (2 puntos) Convierta el resultado de (f) a la probabilidad de error de bit (P_b) en términos de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 122: (19 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales de banda base utiliza modulación 16-PAM con el pulso mostrado en la Figura 45, con A tal que el pulso sea de energía unitaria. Los símbolos de la modulación son $\check{s}_m = (2m - 13)\sqrt{E}$, con E un parámetro de energía y $m \in \{0, \ldots, 15\}$. El receptor utilizado tiene una sola rama y un filtro adaptado normalizado.

(a) (2 puntos) Bosqueje el diagrama de señales. Indique el símbolo $\check{s}_m$ que corresponde a cada punto de señal en el diagrama y defina un código Gray para la modulación.

(b) (1 punto) Bosqueje la forma de la señal transmitida correspondiente al mensaje 00 11 10 01 11 10. Indique amplitudes e instantes relevantes.

(c) (2 puntos) Haga un diagrama de bloques del receptor óptimo para este sistema. Considere un filtro adaptado normalizado y especifique su respuesta al impulso.

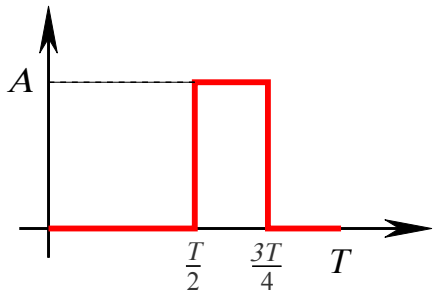


Figura 44: Pulso utilizado en el sistema 4-PAM del Problema 121.

(d) (3 puntos) Considere que el receptor de (c) recibe la señal de (b) sin ruido. Grafique la señal de salida del filtro adaptado. Indique amplitudes e instantes relevantes y destaque los instantes óptimos de muestreo y las amplitudes muestreadas.

(e) (3 puntos) Considerando ahora que la transmisión es contaminada en el receptor con ruido blanco aditivo gaussiano de densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$, determine las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que alimenta al dispositivo de decisión.

Indicación: Haga el cálculo en forma genérica para $\check{s}_m$.

(f) (4 puntos) Formule la probabilidad de error de símbolo (P_s) de este sistema en función de E y N_0.

(g) (2 puntos) Determine la energía promedio por bit, E_b, de esta modulación en términos de E.

(h) (2 puntos) Convierta el resultado de (f) a la probabilidad de error de bit (P_b) en términos de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

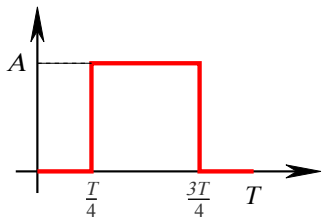


Figura 45: Pulso utilizado en el sistema del Problema 122.

6. Módulo 12: Envolventes complejas

6.1. Señales determinísticas

Problema 123: [1] (10 puntos) Demuestre la siguiente propiedad de las pre-envolventes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{x_+(\tau)\right\} \mathrm{Re}\left\{y_+(\tau)\right\} d\tau = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x_+(\tau) y_+^*(\tau) d\tau\right\}$$

Problema 124: (10 puntos) Una importante condición que a veces es deseable cumplan señales de pasabanda de un sistema de comunicaciones digitales es conocida como *ortogonalidad*, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\int_0^{T_s} \phi_i(t)\phi_j(t)dt = \begin{cases} E_s & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

donde T_s es la duración de cada una de $j = 0, \ldots, J-1$ señales $\phi_j(t)$ (es decir, $\phi_j(t) \equiv 0\ \forall t \notin [0, T_s[)$ y E_s es su energía, igual para todas las J señales.

Demuestre que dicha condición se puede formular equivalentemente con las envolventes complejas de $\phi_i(t)$ y $\phi_j(t)$ como:

$$\int_0^{T_s} \tilde{\phi}_i(t)\tilde{\phi}_j^*(t)dt = \begin{cases} E_s & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Problema 125: (15 puntos) Una señal pasabanda tiene la forma $s(t) = \sqrt{2}s_I(t)\cos(2\pi f_c t + \theta) - \sqrt{2}s_Q(t)\sin(2\pi f_c t + \theta)$. Se sabe que $s_I(t) = \cos(200\pi t)$ y $s_Q(t) = \sin(400\pi t)$ pero los valores de f_c y θ son desconocidos.

La señal $s(t)$ ha sido muestreada con frecuencia de muestreo de 22050 Hz (respetando el criterio de Nyquist) y puesta a disposición suya en la página web del curso (archivo `p125.txt`). Utilice este archivo para estimar f_c y θ. Detalle la lógica de su procedimiento de estimación.

Problema 126: (8 puntos)

Se tiene una señal de banda angosta expresada de la siguiente forma:

$$g(t) = g_I(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) - g_Q(t) \cdot sen(2\pi \cdot f_c \cdot t)$$

Considere $G_+(f)$ como la transformada de fourier de la pre-envolvente $g_+(t)$. Demuestre que las transformadas de fourier de las componentes en fase y cuadratura se pueden expresar como:

$$G_I(t) = \frac{1}{2}\left[G_+(f + f_c) + G_+^*(-f + f_c)\right]$$

$$G_Q(t) = \frac{1}{2j}\left[G_+(f + f_c) - G_+^*(-f + f_c)\right]$$

Problema 127: (10 puntos)

Un pulso rectangular RF

$$x(t) = \begin{cases} A \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) & 0 \le t \le T \\ 0 & eoc \end{cases}$$

es aplicado a un filtro lineal cuya respuesta al impulso es $h(t) = x(T - t)$ (filtro adaptado). Asumiendo que f_c es un múltiplo grande de 1/T determine la salida del filtro.

Problema 128: (10 puntos) Las envolventes complejas de la modulación FSK binaria ortogonal están dadas por las siguientes señales:

$$\begin{aligned}\tilde{s}_0(t) &= \sqrt{\frac{E_b}{T}}\, e^{j\pi\frac{t}{T}}\, \sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)\\ \tilde{s}_1(t) &= \sqrt{\frac{E_b}{T}}\, e^{-j\pi\frac{t}{T}}\, \sqcap\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right).\end{aligned}$$

Determine las correspondientes señales de pasabanda y bosqueje su espectro de magnitud.

Indicación: Considere usar identidades trigonométricas.

Problema 129: (8 puntos) La envolvente compleja que resulta como representación equivalente de banda base de una señal de pasabanda depende directamente de la frecuencia portadora considerada para la representación. Así, una señal de pasabanda $s(t)$ tiene una envolvente compleja $\tilde{s}_T(t)$ si es determinada con respecto a una frecuenca portadora f_T, y otra envolvente compleja diferente, $\tilde{s}_R(t)$, si la frecuenca portadora considerada es f_R.

Asuma que la envolvente compleja $\tilde{s}_T(t)$ es trasladada a la pasabanda en el transmisor mediante un conversor de radiofrecuencia de subida ($\uparrow$RF) cuya portadora es f_T Hz, generando con ello $s(t)$, y luego llevada de vuelta a banda base en un receptor cuyo conversor de radiofrecuencia de bajada ($\downarrow$RF) opera con una portadora de f_R Hz, resultando la envolvente compleja recibida $\tilde{s}_R(t)$. Este caso es común en sistemas de comunicaciones de pasabanda y es conocido como *desplazamiento de portadora*. En este caso, el desplazamiento de portadora es $f_R - f_T$, medido con respecto a la portadora del transmisor. Desde luego, el receptor desea recuperar la envolvente compleja $\tilde{s}_T(t)$, pero debe hacerlo partir de la envolvente compleja recibida, $\tilde{s}_R(t)$.

(a) (5 puntos) Exprese la envolvente compleja deseada $\tilde{s}_T(t)$ en términos de la envolvente compleja recibida $\tilde{s}_R(t)$.

(b) (3 puntos) En base a su resultado anterior, proponga un método para que el receptor recupere la envolvente compleja deseada a partir de la envolvente recibida.

6.2. Procesos estocásticos de pasabanda

Problema 130: (10 puntos)

[Haykin P4.16] Se tiene un par de procesos de ruido $n_1(t)$ y $n_2(t)$ relacionados por:

$$n_2(t) = n_1(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t + \theta) - n_1(t) \cdot sen(2\pi \cdot f_c \cdot t + \theta)$$

con f_c constante y θ una variable aleatoria uniforme en el intervalo [0, 2π]. El proceso $n_1(t)$ es estacionario y su densidad espectral de potencia se muestra en la figura 1. Encuentre y grafique la densidad espectral de potencia de $n_2(t)$.

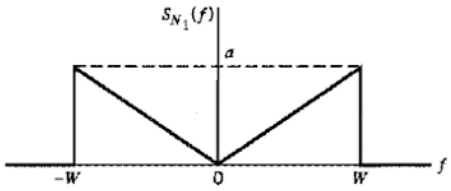


Figura 1.

Indicación: Recuerde que el valor esperado de una función $g(x)$ de una variable aleatoria X, cuya función de densidad es $f_X(x)$, $E[g(X)] = \int g(x) \cdot f_X(x) \cdot dx$

Problema 131: (12 puntos)

[Haykin P4.27] Se aplica ruido blanco gaussiano al sistema de la figura 2.

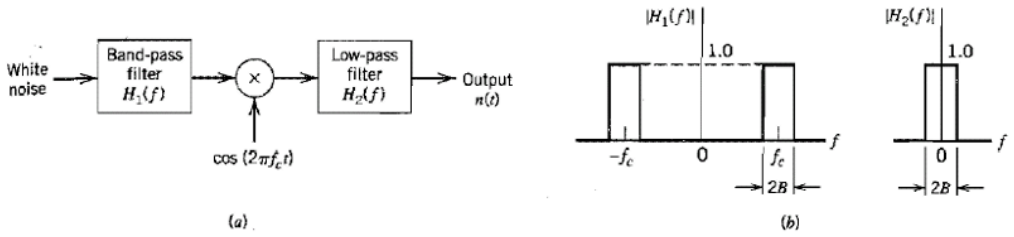


Figura 2.

a) Encuentre la densidad espectral de potencia y la autocorrelación del ruido *n(t)* a la salida del segundo filtro.
b) Encuentre la media y la varianza de *n(t)*
c) Determine la tasa máxima a la cual se puede muestrear *n(t)* para que las muestras resultantes no estén correlacionadas

Problema 132: (10 puntos) Un sistema de comunicaciones QPSK utiliza el pulso base

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T} \right).$$

El pulso también es usado como filtro adaptado en la porción de banda base del receptor. Considere que el filtro adaptado es alimentado por ruido blanco Gaussiano equivalente de banda base, $\tilde{w}(t) = w_I(t) + jw_Q(t)$, y que la salida del filtro, $\tilde{n}(t) = n_I(t) + jn_Q(t)$, es muestreada en $t = T$. Demuestre que $n_I(T)$ y $n_Q(T)$ son variables aleatorias independientes.

Indicación: Propiedad válida en este caso: La función de correlación cruzada entre $w_I(t)$ y $w_Q(t)$ es impar.

Problema 133: (6 puntos) Dos procesos estocásticos Gaussianos estacionarios e independientes, $X(t)$ e $Y(t)$, ambos de media cero y funciones de autocorrelación $R_X(\tau)$ y $R_Y(\tau)$ conocidas, componen un proceso estocástico Gaussiano complejo $Z(t) = X(t) + jY(t)$. Este proceso es alimentado al filtro adaptado equivalente de banda base del receptor del Problema 153. La salida es el proceso $Q(t) = U(t) + jV(t)$. Determine la función de correlación cruzada $R_{UV}(\tau) = \mathrm{E}\{U(t)V(t+\tau)\}$ entre las componentes en fase y cuadratura de $Q(t)$.

Problema 134: (10 puntos) Ruido aditivo blanco Gaussiano equivalente de banda base, $\tilde{w}(t) = w_I(t) + jw_Q(t)$, estacionario en el sentido amplio, es alimentado a un filtro adaptado cuya función de respuesta al impulso es

$$\tilde{h}(t) = e^{j\theta} \frac{1}{\sqrt{T}} \sqcap \left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T} \right),$$

con θ una fase conocida. La función de autocorrelación de los procesos $w_I(t)$ y $w_Q(t)$ es $R(\tau)$ y la función de correlación cruzada entre ellos es $R_x(\tau)$. El proceso observado en la salida del filtro adaptado es $\tilde{n}(t) = n_I(t) + jn_Q(t)$.

(a) (8 puntos) Determine la función de autocorrelación de $\tilde{n}(t)$, $R_n(\tau)$, en función únicamente de θ, $R(\tau)$ y $R_x(\tau)$.
Indicación: Recuerde que las funciones de autocorrelación siempre son funciones pares y las funciones de correlación cruzada siempre son funciones impares.

(b) (2 puntos) Determine $R_n(\tau)$ para el caso específico con $\theta = \frac{\pi}{6}$, $R(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ y $R_x(\tau) = \tau e^{-\tau^2}$.

7. Modulación de pasabanda

7.1. Módulo 13: Modulaciones binarias de pasabanda

Problema 135: (12 puntos)

Considere el problema 1 de la interrogación 2 de este semestre. Ahora se desea implementar un sistema pasabanda con presupuesto energético limitado. Nuevamente se han formado 2 bandos:

Bando 1 ("Los Clasicos"): proponen usar una modulación BPSK clásica, es decir pulsos de la forma:

$$s_{0/1}(t) = \pm A_1 \cdot \sqrt{2}\cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot \Pi\left(\frac{t - 1/2 \cdot T}{T}\right)$$

Bando 2 ("Los Pillos"): vuelven con la idea de transmitir solamente los 0s para ahorrar energía, es decir proponen que los pulsos sean de la forma:

$$s_0(t) = A_2 \cdot \sqrt{2}\cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot \Pi\left(\frac{t - 1/2 \cdot T}{T}\right)$$

$$s_1(t) = 0$$

a) Encuentre las envolventes complejas y la representación geométrica para ambas modulaciones
b) Diseñe el receptor equivalente de banda base para ambas modulaciones
c) Determine la probabilidad de error de la modulación del bando 2
d) Determine cual es la modulación más eficiente energéticamente

Problema 136: (17 puntos) Considere una transmisión binaria de pasabanda con pulsos rectangulares de energía unitaria y duración T y señales

$$\begin{aligned} \check{s}_0 &= j\sqrt{E} \\ \check{s}_1 &= -jk\sqrt{E}, \end{aligned}$$

donde E es un parámetro de energía y k es una constante real positiva.

(a) (3 puntos) Bosqueje las señales de pasabanda $s_0(t)$ y $s_1(t)$ que salen al aire.

(b) (3 puntos) Bosqueje el receptor óptimo equivalente de banda base, definiendo claramente la respuesta al impulso del filtro adaptado.

(c) (3 puntos) Bosqueje la parte real e imaginaria de la envolvente compleja de la salida del filtro adaptado para el mensaje transmitido 11010110. Indique todas las magnitudes relevantes y los instantes óptimos de muestreo.

(d) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de bit (P_b) del sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Indicación: Calcule primero P_b vs. $\frac{E}{N_0}$.

(e) (2 puntos) ¿Qué valor de k usaría Ud. y por qué?

Problema 137: (9 puntos) Considere una transmisión BPSK de tasa $\frac{1}{T}$ emitida con una frecuencia portadora f_0. En el receptor equivalente de banda base se inserta ruido aditivo blanco Gaussiano complejo de media cero y varianza N_0. El conversor de radiofrecuencia de bajada ($\downarrow$RF) opera con una portadora de frecuencia $f_1 = f_0 - \frac{1}{T}$.

(a) (3 puntos) Determine la respuesta al impulso $\tilde{h}(t)$ de un filtro adaptado normalizado que permita detectar, con mínima probabilidad de error, la transmisión BPSK observada en la salida del conversor de radio frecuencia de bajada.

(b) (3 puntos) Determine la variable aleatoria $\tilde{x}(T)$ que se observa a la entrada del dispositivo de decisión. Bosqueje el diagrama de señales en ese punto.

(c) (3 puntos) Determine las propiedades estadísticas de la variable determinada en (b).

Problema 138: (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema del Problema 137 en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 139: (10 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales binarias de pasabanda utiliza las siguientes señales para señalizar 0 y 1, respectivamente:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= -\sqrt{72E}\varphi(t)\sin(2\pi f_c t) \\ s_1(t) &= -\sqrt{128E}\varphi(t)\cos(2\pi f_c t), \end{aligned}$$

donde $\varphi(t)$ es un pulso base de energía unitaria para transmitir a tasa $\frac{1}{T}$ bits/s.

(a) (3 puntos) Bosqueje el diagrama de señales de esta modulación.

(b) (7 puntos) Determine la probabilidad de error de bit (P_b) del sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

7.2. Módulo 14: Modulaciones M-arias de pasabanda

7.2.1. QPSK y similares

Problema 140: (12 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales 4-ario de pasabanda utiliza las siguientes señales para transmitir sus 4 posibles símbolos:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{E}\varphi(t)\cos(2\pi f_c t) \\ s_1(t) &= -s_0(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{E}\varphi(t)[\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)] \\ s_3(t) &= -\sqrt{E}\varphi(t)[\cos(2\pi f_c t) + \sin(2\pi f_c t)], \end{aligned}$$

donde E es un parámetro de energía y $\varphi(t)$ es un pulso Manchester de duración T y energía unitaria.

(a) (3 puntos) Bosqueje el espacio de señales de esta modulación. Indique claramente todas las magnitudes relevantes y proponga un código Grey.

(b) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo del sistema (P_s) en función de la energía E.

(c) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema (P_b) en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 141: (12 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales 4-ario de pasabanda utiliza las siguientes señales para transmitir sus 4 posibles símbolos:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{E}[3\cos(2\pi f_c t) + \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\ s_1(t) &= \sqrt{E}[\cos(2\pi f_c t) - 3\sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{E}[-3\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\ s_3(t) &= \sqrt{E}[-\cos(2\pi f_c t) + 3\sin(2\pi f_c t)]\varphi(t), \end{aligned}$$

donde E es un parámetro de energía y $\varphi(t)$ es un pulso de duración T y energía unitaria.

(a) (2 puntos) Bosqueje el espacio de señales de esta modulación. Indique claramente todas las magnitudes relevantes, regiones de decisión y proponga un código Grey.

(b) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo del sistema (P_s) en función de la energía E.

(c) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema (P_b) en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 142: (12 puntos) Considere la modulación 4-aria de pasabanda dada por las siguientes señales:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\ s_1(t) &= \sqrt{2E}[2\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{2E}[\cos(2\pi f_c t) - 2\sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\ s_3(t) &= -\sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t), \end{aligned}$$

con $\varphi(t)$ un pulso base.

(a) (2 puntos) Considerando un filtro adaptado normalizado, bosqueje el espacio de señales observado en la entrada del dispositivo de decisión. Indique las regiones de decisión.

(b) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo, P_s, de esta modulación, en función de la razón $\frac{E}{N_0}$.

(c) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema, P_b, en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 143: (10 puntos) ¿Cual de las siguientes dos modulaciones 4-arias de pasabanda escogería Ud., y por qué?

Modulación 1

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{2E_1}\cos(2\pi f_c t)\varphi_1(t) \\ s_1(t) &= \sqrt{2E_1}[2\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)]\varphi_1(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{2E_1}[\cos(2\pi f_c t) - 2\sin(2\pi f_c t)]\varphi_1(t) \\ s_3(t) &= -\sqrt{2E_1}\sin(2\pi f_c t)\varphi_1(t) \end{aligned}$$

Modulación 2

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{E_2}\cos(2\pi f_c t)\varphi_2(t) \\ s_1(t) &= \sqrt{E_2}[\cos(2\pi f_c t) - 2\sin(2\pi f_c t)]\varphi_2(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{E_2}[-\cos(2\pi f_c t) - 2\sin(2\pi f_c t)]\varphi_2(t) \\ s_3(t) &= -s_0(t) \end{aligned}$$

E_1 y E_2 son parámetros de energía y $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son pulsos base.

Nota: Ver Problemas 142 y 144.

Problema 144: (12 puntos) Considere la modulación 4-aria de pasabanda dada por las siguientes señales:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\ s_1(t) &= \sqrt{E}[\cos(2\pi f_c t) - 2\sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{E}[-\cos(2\pi f_c t) - 2\sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\ s_3(t) &= -s_0(t) \end{aligned}$$

con $\varphi(t)$ un pulso base.

(a) (2 puntos) Considerando un filtro adaptado normalizado, bosqueje el espacio de señales observado en la entrada del dispositivo de decisión. Indique las regiones de decisión.

(b) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo, P_s, de esta modulación, en función de la razón $\frac{E}{N_0}$.

(c) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema, P_b, en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 145: (14 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales 4-ario de pasabanda utiliza las siguientes señales:

$$\begin{aligned} \check{s}_0 &= \sqrt{E}(2+j) \\ \check{s}_1 &= \sqrt{E}(-1+j2) \\ \check{s}_2 &= -\check{s}_0 \\ \check{s}_3 &= -\check{s}_1, \end{aligned}$$

donde E es un parámetro de energía.

(a) (2 puntos) Bosqueje el espacio de señales de esta modulación, indicando claramente todas las magnitudes relevantes.

(b) (1 puntos) Proponga un código Gray para esta modulación.

(c) (3 puntos) Considerando una modulación con el pulso rectangular ilustrado en la Figura 46, cuyo valor de A es tal que el pulso tenga energía unitaria, y el código Gray propuesto en (b), grafique la señal de pasabanda que sale al aire para la secuencia 001110. Indique claramente todas las magnitudes e instantes relevantes y determine la fase de la señal en $t = 0$.

(d) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de este sistema en función de E y N_0.

(e) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

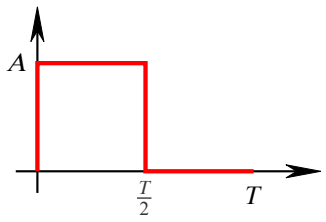


Figura 46: Pulso utilizado por el sistema del Problema 145.

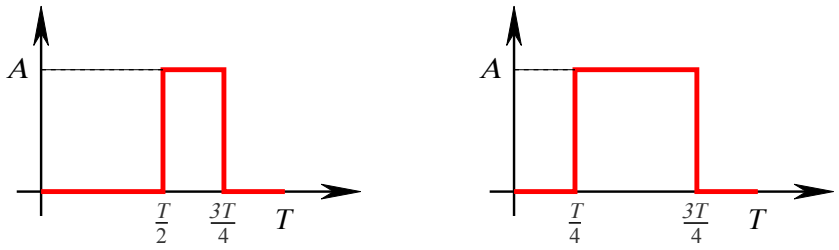
Problema 146: (12 puntos) Se tienen dos sistemas de comunicaciones digitales de pasabanda con tasa de símbolos T:

- Un sistema BPSK que utiliza el pulso de la Figura 47 (a), definido como $\varphi_a(t)$, para generar la modulación

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \varphi_a(t)\cos(2\pi f_c t) \\ s_1(t) &= -\varphi_a(t)\cos(2\pi f_c t). \end{aligned}$$

- Un sistema QPSK que utiliza el pulso mostrado en (b), definido como $\varphi_b(t)$, para generar la modulación

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \varphi_b(t)[\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)] \\ s_1(t) &= \varphi_b(t)[\cos(2\pi f_c t) + \sin(2\pi f_c t)] \\ s_2(t) &= \varphi_b(t)[-\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)] \\ s_3(t) &= \varphi_b(t)[-\cos(2\pi f_c t) + \sin(2\pi f_c t)]. \end{aligned}$$



(a) (b)

Figura 47: Señales del Problema 146.

(a) (2 puntos) Bosqueje el diagrama de señales de ambos sistemas. Indique dimensiones relevantes considerando A y T conocidos.

(b) (4 puntos) Para un mismo valor de A en ambos casos, ¿cual modulación tiene menor probabilidad de error de bit?

(c) (6 puntos) ¿Qué valor de A debe tener la modulación de peor desempeño encontrada en (b) para que tenga la misma probabilidad de error que la modulación de mejor desempeño encontrada en (b) operando con su valor original de A?

7.2.2. Otras modulaciones M-arias

Problema 147: (20 puntos) La modulación por amplitud de pulso M-aria de pasabanda (M-PAM) está dada por las siguientes señales:

$$s_m(t) = A_m \cos(2\pi f_c t) \sqcap \left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T} \right)$$

donde m indica el símbolo entre 0 y $M-1$, T es la duración de los pulsos, y $A_m = \sqrt{2}(2m+1-M)\sqrt{\frac{3E_s}{(M^2-1)T}}$

(a) (2 puntos) Determine las envolventes complejas $\tilde{s}_m(t)$.

(b) (2 puntos) Bosqueje el receptor óptimo más compacto posible, especificando claramente la respuesta al impulso de el o los filtros adaptados.

(c) (2 puntos) Determine los vectores de señal ($\check{s}_m$) y bosquéjelos en el espacio de señales para el caso 8-PAM, etiquetando claramente cada vector con su índice de símbolo m.

(d) (2 puntos) Diseñe un código Gray para el caso 8-PAM e indique su correspondencia con el índice de símbolo m en el diagrama de señales de la parte (c).

(e) (6 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de M-PAM de pasabanda (P_s) en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Indicación: Siga pasos análogos a los tomados en clase para el caso M-PAM de banda base.

(f) (2 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de M-PAM (P_b) como función de $\frac{E_b}{N_0}$.

(g) (4 puntos) Grafique P_b vs. $\frac{E_b}{N_0}$ para $M = \{2, 4, 8, 16\}$.

Problema 148: (15 puntos) Utilizando los resultados del Problema 147:

(a) (8 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo de M-QAM en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Indicación: M-QAM se obtiene de combinar dos modulaciones $\sqrt{M}$-PAM en fase y cuadratura.

(b) (3 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de M-QAM.

(c) (4 puntos) Agregue las curvas de M-QAM para $M = \{4, 16, 64, 256\}$ al gráfico de la parte (g) del Problema 147 y discuta brevemente.

Problema 149: (20 puntos) Se tiene un sistema de modulación por amplitud de pulso 8-ario (8-PAM) de pasabanda. La señal de pasabanda para cada uno de los 8 símbolos posibles está dada por:

$$s_m(t) = A_m \cos(2\pi f_c t) \sqcap \left(\frac{t - \frac{1}{2}T_s}{T_s} \right)$$

donde m indica un símbolo entre 0 y 7, T_s es la duración de los pulsos, y A_m su amplitud, con $A_m = (2m - 7)\sqrt{\frac{2E_s}{21T_s}}$. Esta modulación es, en esencia, la que utiliza el estándar de televisión digital terrestre norteamericano (ATSC).

La recepción de señales de TV digital requiere un aparato conocido como *decodificador*, el que puede ya sea venir instalado de fábrica en el televisor (televisores modernos, plasma o LCD), o bien puede ser un dispositivo externo conocido como *set-top box* (STB). La función de un STB es decodificar la señal digital y transformarla en señal de TV analógica, la que es alimentada a un televisor analógico tradicional.

Asuma que el sistema 8-PAM opera con la tasa de datos justa para transmitir una señal de video de alta definición (HD). Suponga que se desea agregar una segunda señal de video a la transmisión, simultánea con la señal HD, para transmitir un canal meteorológico. Puesto que la señal de video del canal meteorológico cambia muy poco de un cuadro al siguiente, contiene mucha redundacia y puede ser comprimida fuertemente. Así, se ha determinado que esta señal requeriría sólo un bit más por símbolo transmitido.

El gran problema es que la inserción del canal meteorológico debe ser hecha de tal manera que no requiera que todos los usuarios (varios millones) que ya han comprado un STB o televisor "*digital ready*" deban cambiar sus equipos, y que puedan continuar recibiendo la señal HD normalmente usando sus decodificadores de "primera generación". La recepción

adicional de la señal meteorológica requerirá desde luego comprar un decodificador de "segunda generación".

Una solución que se plantea es transmitir el canal meteorológico como señal BPSK en cuadratura, con pulsos rectangulares, manteniendo la modulación 8-PAM de la señal HD como componente en fase.

El problema consiste en analizar la viabilidad de la propuesta anterior. Para ello:

(a) (2 puntos) Considere que la señal BPSK tiene amplitud $B_n = (-1)^n \sqrt{\frac{2E_s}{21T_s}}$ en la pasabanda, con $n = 0$ o $n = 1$. Describa matemáticamente la señal de pasabanda de la modulación extendida.

(b) (2 puntos) Determine la envolvente compleja de la modulación extendida.

(c) (2 puntos) Bosqueje el diagrama de señales de la modulación extendida, indicando claramente las magnitudes relevantes en ambos ejes, y destacando las regiones de decisión.

(d) (2 puntos) ¿Es posible diseñar un código Gray para la modulación extendida? En caso afirmativo, dé un ejemplo válido. En caso negativo, explique por qué no es posible.

(e) (2 puntos) Bosqueje el receptor óptimo más compacto posible para la modulación extendida, especificando claramente la respuesta al impulso de el o los filtros adaptados.

(f) (2 puntos) ¿Es posible recibir la señal HD presente en la modulación extendida con un decodificador de primera generación? ¿Siempre? ¿Sólo a veces? ¿En que casos? ¿Nunca? Justifique.

(g) (2 puntos) Calcule la energía media por símbolo (E_x) de la modulación extendida en términos de la energía media por símbolo (E_s) de la modulación 8-PAM original.

(h) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo (P_s) de la modulación extendida en función de la razón señal a ruido por símbolo ($\frac{E_x}{N_0}$).
Indicación: Recuerde que la probabilidad de error de símbolo es el complemento de la probabilidad de decisión correcta.

(i) (2 puntos) Determine la probabilidad de error de bit (P_b) de la modulación extendida como función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Problema 150: (20 puntos) Sabemos que en un receptor de M-QAM con filtro adaptado normalizado, las componentes en fase, n_I, y en cuadratura, n_Q, del ruido complejo $\check{n} = n_I + jn_Q$ son iid con distribución $N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$.

(a) (1 punto) Considere la rotación del plano complejo en un ángulo θ. Demuestre que el ruido $\hat{n}$, expresado con respecto al nuevo sistema de coordenadas como un ruido $\check{n}' = n'_I + jn'_Q$, tiene componentes en fase y cuadratura dadas por:

$$\begin{aligned} n'_I &= n_I \cos\theta + n_Q \sin\theta \\ n'_Q &= -n_I \sin\theta + n_Q \cos\theta \end{aligned}$$

(b) (5 puntos) Determine todas las propiedades estadísticas del par de variables aleatorias n'_I y n'_Q, que son relevantes para el análisis de probabilidad de error.

(c) (4 puntos) Considere la modulación 8-aria de pasabanda dada por las siguientes señales:

$$\begin{aligned}
s_0(t) &= \sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_1(t) &= \sqrt{2E}[2\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\
s_2(t) &= \sqrt{2E}[\cos(2\pi f_c t) - 2\sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\
s_3(t) &= \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_4(t) &= -s_0(t) \\
s_5(t) &= -s_1(t) \\
s_6(t) &= -s_2(t) \\
s_7(t) &= -s_3(t)
\end{aligned}$$

Considerando un filtro adaptado normalizado, bosqueje el espacio de señales observado en la entrada del dispositivo de decisión. Indique las regiones de decisión de los símbolos s_1 y s_4.

(d) (6 puntos) Utilice el resultado de (b) para determinar la probabilidad de error de símbolo, P_s, de esta modulación, en función de la razón $\frac{E}{N_0}$.

(e) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema, P_b, en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 151: (12 puntos) Considere la modulación M-PSK, cuyas señales de pasabanda están dadas por:

$$s_m(t) = \sqrt{E_s}\varphi(t)\cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right),$$

con $m \in \{0, \ldots, M-1\}$ y $\varphi(t)$ un pulso de energía unitaria.

(a) (3 puntos) Bosqueje el diagrama de señales de 8-PSK.

(b) (1 puntos) Defina un código Gray para las señales del diagrama de (a).

(c) (1 puntos) Bosqueje las fronteras de decisión en el diagrama de (a).

(d) (5 puntos) Considere el receptor de M-PSK ideal con un filtro adaptado a $\varphi(t)$. Sabemos que las componentes en fase, n_I, y en cuadratura, n_Q, del ruido complejo $\check{n} = n_I + jn_Q$ que alimenta al dispositivo de decisión son iid con distribución $N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$. También sabemos que si se rota el sistema de coordenadas del plano complejo en un ángulo θ, las nuevas componentes en fase y cuadratura del ruido, expresadas en el nuevo sistema de coordenadas, conservan las propiedades señaladas. Utilice este concepto para proponer en forma *aproximada* la probabilidad de error de símbolo de M-PSK en función de la razón señal a ruido por símbolo.

Indicación: Considere que los errores de símbolo son dominados por errores de símbolo adyacente y que las fronteras de decisión son aproximadamente paralelas para $M \geq 8$.

(e) (2 puntos) Compare el resultado para $M \geq 8$ con la fórmula exacta para M-PAM.

Problema 152: (6 puntos) Un sistema de comunicaciones digitales 8-ario de pasabanda utiliza las siguientes señales para transmitir sus 8 posibles símbolos:

$$\begin{aligned}
\check{s}_0 &= \sqrt{E}(3+j) \\
\check{s}_1 &= \sqrt{E}(1+j) \\
\check{s}_2 &= \sqrt{E}(-1+j) \\
\check{s}_3 &= \sqrt{E}(-3+j) \\
\check{s}_4 &= -\check{s}_0 \\
\check{s}_5 &= -\check{s}_1 \\
\check{s}_6 &= -\check{s}_2 \\
\check{s}_7 &= -\check{s}_3,
\end{aligned}$$

donde E es un parámetro de energía.

(a) (2 puntos) Bosqueje el espacio de señales de esta modulación, indicando claramente todas las magnitudes relevantes.

(b) (1 puntos) Si 001 corresponde a $\check{s}_1$, 110 a $\check{s}_4$ y 010 a $\check{s}_7$, proponga un código Gray para los demás símbolos.

(c) (3 puntos) Considerando una modulación con el pulso rectangular ilustrado en la Figura 48 y el código Gray propuesto en (b), grafique la señal de pasabanda que sale al aire para la secuencia 001010110. Indique claramente todas las magnitudes e instantes relevantes en el gráfico.
Indicación: Considere el valor de A tal que el pulso tenga energía unitaria.

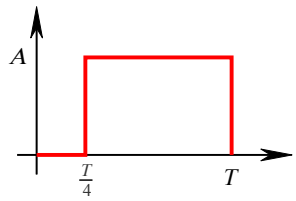


Figura 48: Pulso utilizado por el sistema del Problema 152.

Problema 153: (8 puntos) Para la modulación descrita en el Problema 152:

(a) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo (P_s) en función de la energía E.

(b) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema (P_b) en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 154: (10 puntos) Las señales de pasabanda de la modulación QPSK clásica son:

$$\begin{aligned}
g_0(t) &= \sqrt{E_s}[\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\
g_1(t) &= \sqrt{E_s}[\cos(2\pi f_c t) + \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_2(t) &= \sqrt{E_s}[-\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t) \\
g_3(t) &= \sqrt{E_s}[-\cos(2\pi f_c t) + \sin(2\pi f_c t)]\varphi(t),
\end{aligned}
$$

donde E_s es la energía media por símbolo y $\varphi(t)$ es un pulso de duración T y energía unitaria.

Considere componer una modulación 8-QAM a partir de la modulación QPSK anterior, de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
s_0(t) &= g_0(t) + 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_1(t) &= g_1(t) + 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_2(t) &= g_2(t) + 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_3(t) &= g_3(t) + 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_4(t) &= g_0(t) - 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_5(t) &= g_1(t) - 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_6(t) &= g_2(t) - 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_7(t) &= g_3(t) - 2\sqrt{E_s}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t).
\end{aligned}
$$

(a) (2 puntos) Bosqueje el espacio de señales de la modulación 8-aria. Indique claramente todas las magnitudes relevantes, regiones de decisión y proponga un código Grey.

(b) (8 puntos) Determine la probabilidad de error de bit (P_b) en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$) de la modulación 8-aria.

Problema 155: (16 puntos) Una modulación 8-aria de pasabanda utiliza las siguientes señales:

$$
\begin{aligned}
s_0(t) &= \sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_1(t) &= -\sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_2(t) &= \sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) - 2\sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_3(t) &= 2\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) - \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_4(t) &= -\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_5(t) &= \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_6(t) &= -\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) + 2\sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_7(t) &= -2\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) + \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t),
\end{aligned}
$$

con $\varphi(t)$ un pulso base real puro de energía unitaria y duración T, y E un parámetro de energía.

(a) (2 puntos) Determine las envolventes complejas $\tilde{s}_m(t)$.

(b) (2 puntos) Determine los vectores de señal ($\check{s}_m$) y bosquéjelos en el espacio de señales, etiquetando claramente cada punto de señal con su índice de símbolo m.

(c) (2 puntos) Diseñe un código Gray e indique su correspondencia con el índice de símbolo m en el diagrama de señales de la parte (b).

(d) (10 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de la modulación (P_b) en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 156: (15 puntos) Para la transmisión M-aria mostrada en la Figura 49, con E un parámetro de energía:

(a) (2 puntos) Determine las señales que salen al aire correspondientes a $\check{s}_0$, $\check{s}_2$ y $\check{s}_7$, considerando un pulso base $\varphi(t)$ de energía unitaria.

(b) (1 puntos) Bosqueje las regiones de decisión de los símbolos indicados en (a).

(c) (7 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo, P_s, de esta modulación, en función de la razón $\frac{E}{N_0}$.

(d) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema, P_b, en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

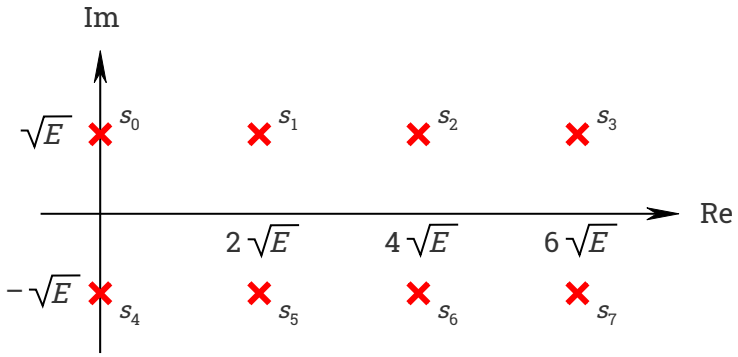


Figura 49: Modulación M-aria del Problema 156.

Problema 157: (15 puntos) Para la transmisión M-aria mostrada en la Figura 50, simétrica con respecto a ambos ejes, con E un parámetro de energía y k una constante positiva:

(a) (2 puntos) Determine las señales que salen al aire correspondientes a $\check{s}_1$, $\check{s}_3$ y $\check{s}_4$, considerando un pulso base $\varphi(t)$ de energía unitaria.

(b) (1 punto) Bosqueje las regiones de decisión de los símbolos indicados en (a).

(c) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo, P_s, de esta modulación, en función de k y de la razón $\frac{E}{N_0}$.

(d) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema, P_b, en función de k y de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

(e) (3 puntos) Indique: ¿Cómo escogería el valor de k y por qué?

Problema 158: (15 puntos) Una modulación 8-aria de pasabanda utiliza las siguientes señales:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= -\sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\ s_1(t) &= 2\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) - \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\ s_2(t) &= 4\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) - \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\ s_3(t) &= 6\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) - \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_4(t) &= \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_5(t) &= 2\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) + \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_6(t) &= 4\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) + \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t) \\
s_7(t) &= 6\sqrt{2E}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t) + \sqrt{2E}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t),
\end{aligned}
$$

con $\varphi(t)$ un pulso base real puro de energía unitaria y duración T. E es un parámetro de energía.

(a) (2 puntos) Determine los símbolos $\check{s}_m$ y bosquéjelos en el espacio de señales, etiquetando claramente cada punto de señal con su índice de símbolo m.

(b) (2 puntos) Proponga un código Gray para esta modulación.

(c) (1 puntos) Bosqueje las regiones de decisión de los símbolos $\check{s}_1$, $\check{s}_3$, $\check{s}_4$ y $\check{s}_6$.

(d) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de símbolo, P_s, de esta modulación, en función de la razón $\frac{E}{N_0}$.

(e) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de bit del sistema, P_b, en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

Problema 159: (12 puntos) Se tiene un sistema de comunicaciones digitales de pasabanda 16-QAM que utiliza el pulso base de la Figura 51, definido como $\varphi(t)$, con A dado. Dos de sus señales están dadas por

$$
\begin{aligned}
s_3(t) &= \varphi(t)[3\cos(2\pi f_c t) - 3\sin(2\pi f_c t)] \\
s_6(t) &= \varphi(t)[\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t)],
\end{aligned}
$$

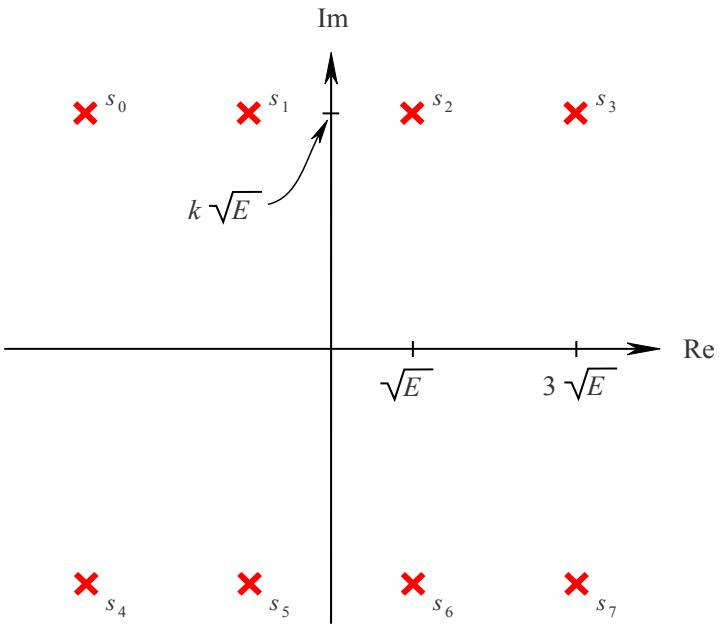


Figura 50: Modulación M-aria del Problema 157.

donde el subíndice de cada señal corresponde a la enumeración usada en el espacio de señales para denotar los símbolos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, en ese orden, tal como se lee el texto de este problema.

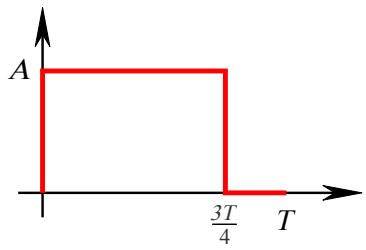


Figura 51: Señal para el Problema 159.

(a) (2 puntos) Bosqueje el diagrama de señales del sistema 16-QAM, completando las señales faltantes e indicando dimensiones relevantes asumiendo A y T conocidos.

(b) (2 puntos) Determine las señales de pasabanda $s_4(t)$ y $s_{14}(t)$.

(c) (2 puntos) Proponga un código Grey para la modulación 16-QAM.

(d) (2 puntos) Determine la energía media por símbolo de esta modulación.

(e) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de bit en función de la razón señal a ruido por bit, $\frac{E_b}{N_0}$.

7.3. Distorsiones

Problema 160: (18 puntos) En el Problema 84 estudiamos el efecto de muestrear la salida del filtro adaptado con un error de fase, y vimos que ello conduce a una pérdida de razón señal a ruido en el detector. En esta oportunidad complementaremos aquel análisis con el caso de un error de fase en la portadora.

Considere una secuencia infinita de bits equiprobables transmitidos con BPSK usando pulsos rectangulares de energía E_b. El canal tiene ruido blanco Gaussiano de densidad espectral de potencia de pasabanda $\frac{N_0}{2}$. El receptor para este sistema está ilustrado en el diagrama de la Figura 52. La figura también muestra la etapa del receptor que traslada la señal de pasabanda a banda base (Mezclador y Filtro Pasabajos).

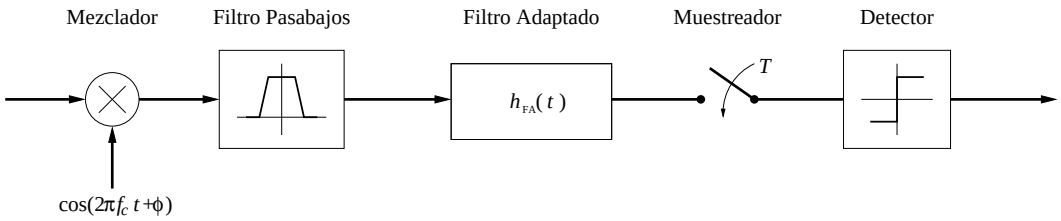


Figura 52: Diagrama de bloques del receptor del Problema 160.

Suponga que la portadora generada localmente está desfasada en ϕ radianes con respecto al ideal, como se indica en la Figura 52.

(a) (5 puntos) Utilice envolventes complejas para deducir el efecto que el desfase ϕ de la portadora tiene sobre las señales recibidas en banda base. Provea una interpretación geométrica del fenómeno en el espacio de señales.

(b) (8 puntos) Determine la probabilidad de error de este sistema.
Indicación: Puede ser conveniente utilizar la expresión de probabilidad de error de BPSK ideal. En tal caso, argumente por separado los efectos de ϕ sobre la señal y sobre el ruido, y luego infiera el efecto conjunto de ϕ sobre la razón señal a ruido.

(c) (5 puntos) Por inspección en base a su respuesta en (a): ¿Cómo se interpreta en el espacio de señales el efecto de un error de frecuencia de portadora, es decir, la frecuencia portadora es igual a $f_c + \Delta f$ (y $\phi = 0$)?

Problema 161: (18 puntos) Considere una transmisión BPSK que es alimentada al conversor de radio frecuencia (↓RF) de bajada en el receptor. El conversor tiene un defecto de diseño que causa una inducción parásita de la señal del oscilador, $c(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_c t)$, en el mezclador de cuadratura, generando una demodulación en cuadratura con una sinusoide dada por $\sqrt{2}\sin(2\pi f_c t) + \alpha\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t)$, con α una constante pequeña que describe el efecto de inducción parásita.

(a) (5 puntos) Considerando un filtro adaptado normalizado, bosqueje el espacio de señales observado en la entrada del dispositivo de decisión para un $\alpha \neq 0$.

(b) (5 puntos) Determine las propiedades estadísticas del ruido observado en la entrada del dispositivo de decisión para un $\alpha \neq 0$.

(c) (5 puntos) Considerando que el dispositivo de decisión desconoce el defecto y opera como si $\alpha = 0$, determine la probabilidad de error de bit del sistema.

(d) (3 puntos) ¿Podría mejorar la probabilidad de error si el dispositivo de decisión conociera α? En caso afirmativo, explique cómo, en caso negativo, explique por qué no.

Problema 162: (15 puntos) Considere una modulación con pulsos rectangulares y antipodales de energía E_b. Esta señal modula a una portadora $c_t(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_c t)$. La señal resultante es transmitida al aire. El receptor para este sistema está ilustrado en el diagrama de la Figura 53. La portadora del receptor tiene un desplazamiento de frecuencia y está dada por $c_r(t) = \sqrt{2}\cos[2\pi(f_c + f_o)t]$.

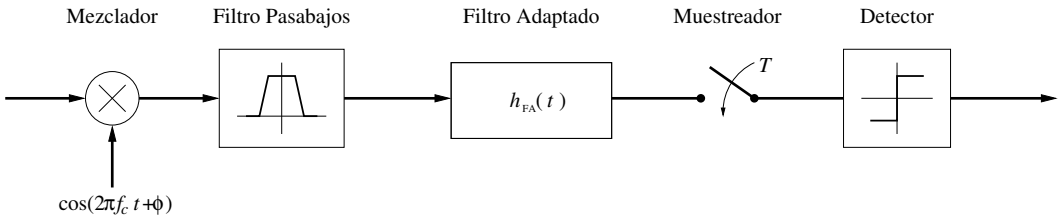


Figura 53: Diagrama de bloques del receptor del Problema 162.

(a) (4 puntos) Ignorando el ruido térmico y considerando la transmisión de un sólo bit (asuma pulso rectangular positivo), modele la señal que alimenta al filtro adaptado.

(b) (1 puntos) Grafique dicha señal para $f_o = 0$ y $f_o = \frac{1}{2T}$.

(c) (2 puntos) Interprete desde el dominio de la frecuencia lo que está ocurriendo con el filtro adaptado y la señal desplazada en frecuencia.

(d) (5 puntos) Determine el valor de la muestra que alimenta al dispositivo de decisión (detector).

(e) (3 puntos) Discuta: ¿Es posible corregir el desplazamiento de portadora de esta transmisión mediante un receptor de Costas?

Problema 163: (10 puntos) Los conversores de radiofrecuencia de subida directa como el que se muestra en la Figura 54 a menudo presentan un *desbalance de fase y cuadratura* causado por las no-idealidades de los componentes. En la figura se ilustra el caso en que el desfasador de $-90°$ tiene una ganancia α y un desfase ϕ con respecto al ideal.

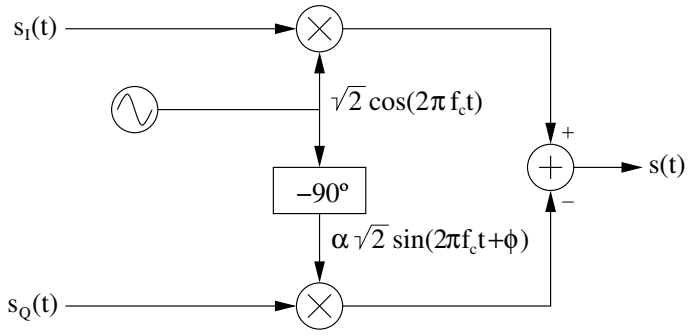


Figura 54: Conversor directo con desbalance de fase y cuadratura del Problema 163.

(a) (2 puntos) Modele el efecto de α y ϕ en la señal transmitida $s(t)$, y a partir de ella determine la envolvente compleja de la señal recuperada en el receptor luego del conversor de radiofrecuencia ($\downarrow$RF).

(b) (2 puntos) Considerando $\phi = 0$, haga un bosquejo del efecto de una ganancia $\alpha > 1$ sobre una modulación BPSK en el espacio de señales de la señal recibida.

(c) (2 puntos) Considere ahora que $\alpha = 1$ y haga el bosquejo del efecto de un desfase $\phi > 0$ sobre una modulación BPSK en el espacio de señales de la señal recibida.

(d) (4 puntos) Considere ahora que el conversor de subida es ideal, pero que el desfasador del conversor de bajada en el receptor tiene un desbalance de fase ϕ y mangitud α en el mezclador de cuadratura. Para cada caso analice si el efecto del desbalance en el receptor es igual o no al caso analizado para el transmisor.

Problema 164: (10 puntos) Considere una transmisión QPSK que es alimentada al conversor de radio frecuencia de bajada en el receptor ($\downarrow$RF). El conversor tiene un defecto de diseño que causa una inducción parásita de la portadora del mezclador de cuadratura en la portadora del mezclador en fase utilizada por el demodulador en fase con una sinusoide dada por $\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t) + \alpha\sqrt{2}\sin(2\pi f_c t)$, con α una constante pequeña que describe el efecto de inducción parásita.

(a) (5 puntos) Considerando un filtro adaptado normalizado, bosqueje el espacio de señales observado en la entrada del dispositivo de decisión para un $\alpha \neq 0$.

(b) (3 puntos) Determine las propiedades estadísticas del ruido observado en la entrada del dispositivo de decisión para un $\alpha \neq 0$.

(c) (2 puntos) Considere que el receptor puede determinar α mediante alguna estimación adecuada y proponga un mecanismo de compensación apropiado.

Problema 165: (10 puntos) La transmisión M-aria del Problema 156 es recibida con un desplazamiento de portadora de δ Hertz. Concretamente, en el transmisor la modulación es trasladada a la pasabanda con una portadora de frecuencia f_c y en el receptor es devuelta a banda base con una portadora de frecuencia $f_c + \delta$.

(a) (2 puntos) Modele la envolvente compleja recibida con respecto a la portadora del transmisor y bajo desplazamiento de portadora δ. Hágalo en forma general para un símbolo transmitido $\check{s}_i$ arbitrario.

(b) (2 puntos) En base al resultado de (a), exprese el efecto del desplazamiento de portadora observado por el receptor en su espacio de señales. Ilustre el efecto gráficamente.

(c) (3 puntos) Proponga una codificación Gray que asegure que al menos 2 bits de cada símbolo sean inmunes al efecto del desplazamiento de portadora. Explique las fronteras de decisión que utilizaría e indique los motivos por los cuales la probabilidad de error de esos 2 bits seróa algo diferente a la de un sistema 4-PAM tradicional.

(d) (3 puntos) Proponga una arquitectura de receptor que sea capaz de recuperar los 3 bits de cada símbolo. Asuma que el receptor cuenta con un estimador del desplazamiento de portadora δ.

Problema 166: (15 puntos) Una señal BPSK es transmitida con energía media por bit E_b y recibida con ruido térmico cuya densidad espectral de potencia es $\frac{N_0}{2}$. El dispositivo de decisión en el receptor tiene una falla de calibración y su frontera de decisión está desplazada con respecto a su posición ideal. Concretamente, la frontera es $\mathrm{Re}\{\check{x}\} = \lambda\sqrt{E_b}$, con $\lambda \in [0, 1[$.

(a) (1 punto) Bosqueje el diagrama de señales y la frontera de decisión.

(b) (5 puntos) Determine la probabilidad de error de bit (P_b) del sistema en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

(c) (4 puntos) Utilice la curva de la Figura 55 para evaluar su resultado de (b) con $\frac{E_b}{N_0} = 7$ dB y un valor de λ tal que $(1-\lambda)^2 = \frac{1}{2}$.

Indicación: La curva muestra $P_b = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$. Además, puede asumir que $(1+\lambda)^2 \approx \frac{5}{3}$.

(d) (3 puntos) Utilice su resultado en (c) para argumentar que con $(1-\lambda)^2 = \frac{1}{2}$ la probabilidad de error de bit de (b) puede ser aproximada por

$$P_b = \frac{1}{4}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

(e) (2 puntos) Utilice su resultado en (c) para argumentar qué valor de λ es ideal.

Problema 167: (10 puntos) Considere utilizar el modulador FM del Problema 46 como un mecanismo para seleccionar el canal (frecuencia portadora) de los conversores de radiofrecuencia de subida y de bajada en un sistema de comunicaciones digitales de pasabanda. Concretamente, si $A_c = \sqrt{2}$ y $m(t) = A$ constante durante la transmisión digital, entonces la frecuencia portadora que utilizará la transmisión digital puede ser determinada directamente de la respuesta a la parte (a) del Problema 46. Este concepto es conocido *síntesis de frecuencia* y los dispositivos electrónicos que lo implementan se llaman *sintetizadores de frecuencia*.

Asuma que el método anterior es utilizado para la transmisión digital del Problema 145, la que se extiende entre $t = 0$ y $t = T_3$. Desafortunadamente, tal como lo ilustra la Figura 12 entre $t = T_1$ y $t = T_2$, durante la transmisión ocurre una caída del voltaje $m(t)$. Ello puede tener distintas causas: un error de software en el microcontrolador que genera $m(t)$, una baja de voltaje en la alimentación del microcontrolador, etc. Su consecuencia es que el sintetizador de frecuencia no genera la frecuencia deseada.

(a) (6 puntos) Modele el efecto de la caída de voltaje en el sintetizador de frecuencia del transmisor, observado por el receptor en la entrada de su dispositivo de decisión. Bosqueje la situación en el espacio de señales.

(b) (4 puntos) Asumiendo que el receptor cuenta con un mecanismo para generar una

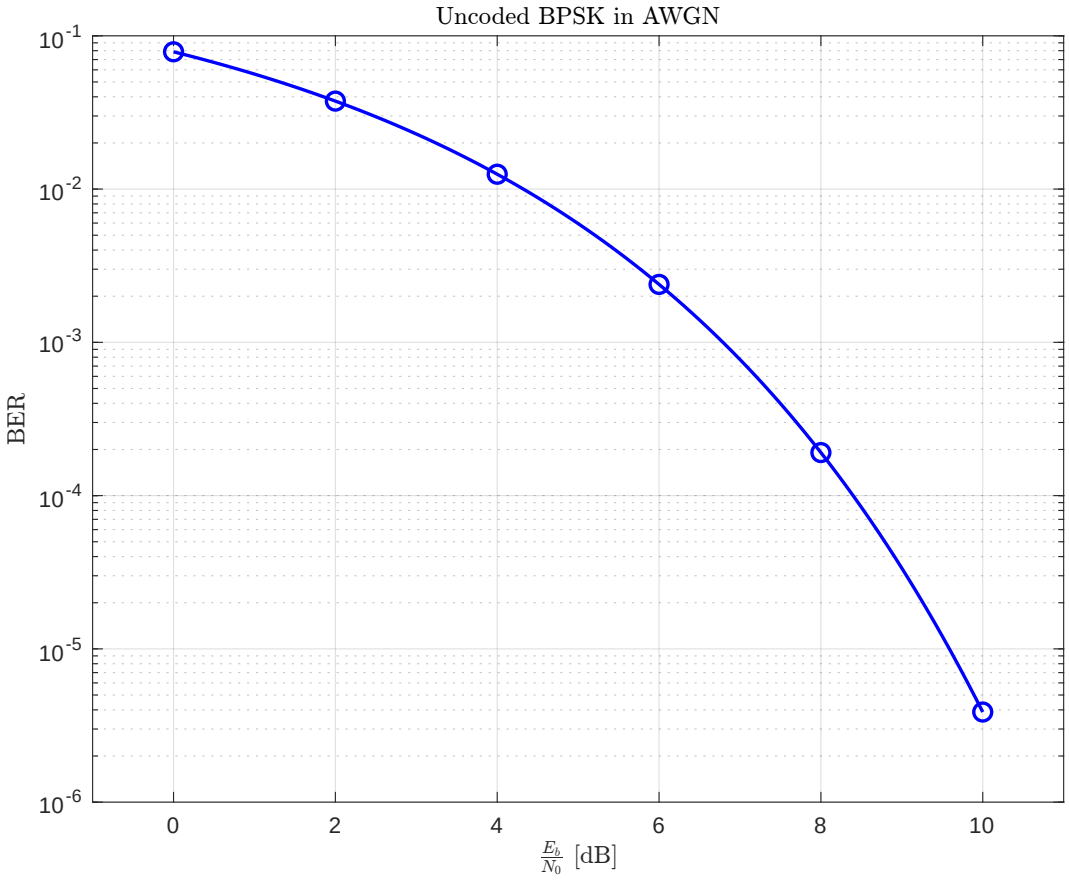


Figura 55: Probabilidad de error de bit de BPSK (Problema 166).

estimación ideal de B, denotada por $\hat{B}$, y que conoce A, proponga cómo usar $\hat{B}$ en el receptor para revertir el efecto modelado en (a) y recuperar el desempeño original e ideal determinado en el Problema 145.

Indicación: El receptor también utiliza una sintetizador de frecuencia.

Problema 168: (12 puntos) Considere la modulación binaria de pasabanda OOK. Los puntos de señal son

$$\begin{aligned} \check{s}_0 &= 0 \\ \check{s}_1 &= \sqrt{E}, \end{aligned}$$

donde E es un parámetro de energía, y el pulso base utilizado es rectangular de energía unitaria y duración T.

Considere que el receptor tiene un desplazamiento de portadora de δ Hertz. Concretamente, en el transmisor la modulación es trasladada a la pasabanda con una portadora de frecuencia f_c y en el receptor es devuelta a banda base con una portadora de frecuencia $f_c + \delta$.

(a) (2 puntos) Determine las señales de pasabanda $s_0(t)$ y $s_1(t)$ que salen al aire.

(b) (2 puntos) Modele la envolvente compleja recibida con respecto a la portadora del transmisor y bajo desplazamiento de portadora δ. Hágalo en forma general para un símbolo transmitido $\check{s}_i$ arbitrario.

(c) (2 puntos) En base al resultado de (b), exprese el efecto del desplazamiento de portadora observado por el receptor en su espacio de señales. Haga un bosquejo que ilustre el efecto gráficamente.

(d) (2 puntos) Proponga un dispositivo de decisión que permita decodificar la transmisión sin conocer ni corregir δ.

(e) (2 puntos) Determine la probabilidad de error de bit (P_b) del sistema propuesto en (d) en función de la razón señal a ruido por bit ($\frac{E_b}{N_0}$).

(f) (2 puntos) En comparación con una modulación BPSK tradicional, indique una ventaja y una desventaja de su solución.

7.4. Otros

Problema 169: (15 puntos) De todo un poco:

(a) (5 puntos) Discuta: ante la misma cantidad de ruido, ¿qué modulación tendrá menor probabilidad de error de bit, 8-PSK con símbolos de energía unitaria (es decir, con $E_s^{(\mathrm{PSK})} = 1$), o 4-QAM con símbolos de energía $E_s^{(\mathrm{QAM})} = \frac{1}{4}$?

(b) (5 puntos) Señale una ventaja y una desventaja de la modulación M-PSK en comparación una modulación M-QAM con el mismo número M-ario.

(c) (5 puntos) Cual(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. La eficiencia espectral de 16-QAM es mayor que la de 16-PAM.

II. La probabilidad de error de bit de BPSK es menor que la probabilidad de error de bit de 4-QAM.

III. Ante igual energía promedio por símbolo, la probabilidad de error de símbolo de 4-PAM es menor que la probabilidad de error de símbolo de 16-QAM.

A) Sólo I.
B) Sólo III.
C) I y II.
D) I y III.
E) II y III.

Problema 170: (5 puntos)

Sean P_{eI} y P_{eQ} las probabilidades de error de símbolo de las componentes en fase y en cuadratura de un sistema de banda angosta. Demuestre que la probabilidad de error de símbolo del sistema completo es:

$$P_e = P_{eI} + P_{eQ} - P_{eI} \cdot P_{eQ}$$

Problema 171: (12 puntos) Considere una modulación binaria NRZ de banda base con símbolos de energía E y pulsos rectangulares $\varphi(t)$ de druación T y energía unitaria. La modulación es alimentada como señal de mensaje a un modulador AM cuya portadora es $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ y $\mu = k_a\sqrt{\frac{E}{T}}$.

(a) (1 punto) Bosqueje la señal que sale al aire con un índice de modulación $\mu < 1$ para la secuencia binaria 11011011101001.

(b) (3 puntos) Proponga un receptor de *comunicaciones digitales* para esta modulación de pasabanda. Bosquéjelo y especifique todos sus componentes.

(c) (2 puntos) Discuta si el receptor digital propuesto en (b) tiene mejor desempeño que un detector de envolvente seguido por un receptor digital NRZ de banda base. ¿Por qué?

(d) (4 puntos) Determine la probabilidad de error de este sistema con el receptor digital en función de la razón señal a ruido por bit.

(e) (2 puntos) Discuta: ¿Qué valor de μ es preferible, y por qué?

8. Módulo 15: Sistemas de comunicaciones

Problema 172: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ En Internet, UDP es un protocolo de la capa de aplicación.

Problema 173: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ IPv4 permite una Internet de a lo más unos cuatro mil doscientos millones de nodos.

Problema 174: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ TCP/IP es el par de protocolos que regulan el intercambio de datos de todos los protocolos de la capa de aplicación en Internet.

Problema 175: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ El protocolo IP asegura la entrega de datos, pero no su integridad.

Problema 176: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ La capa de transporte en Internet desconoce la ruta que sigue un mensaje desde su nodo de origen a su nodo de destino.

Problema 177: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ Encripción es una de las tareas esenciales de la capa MAC.

Problema 178: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ CSMA-CA utiliza el ancho de banda en forma más eficiente que CSMA-CD.

Problema 179: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ UDP es un protocolo de transporte de Internet utilizado comunmente para aplicaciones de *streaming*.

Problema 180: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ La pila de protocolos de Internet tiene 7 capas.

Problema 181: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ Una tarea principal de la capa de red es el enrutamiento de tráfico.

Problema 182: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ TDMA es un mecanismo de la capa física.

Problema 183: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ RTS y CTS proveen un mecanismo para evitar colisiones.

Problema 184: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ Para solicitar re-transmisiones de paquetes recibidos con error, TCP utiliza paquetes ACK en la capa MAC.

Problema 185: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ El rol principal del protocolo TCP en Internet es asegurar la seguridad y privacidad de los datos.

Problema 186: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ La integridad de los datos en transmisiones por Internet es garantizada por el protocolo UDP.

Problema 187: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ El control de errores (codificación de canal) es una tarea de la capa MAC.

Problema 188: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ Colisiones pueden ocurrir con transmisiones tanto por medios inalámbricos como por medios cableados.

Problema 189: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ En CSMA-CA es imposible que ocurran colisiones.

Problema 190: (1 punto) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ Un enlace de comunicaciones WiFi ocupa un ancho de banda de 20 MHz. Si opera con $\frac{E_b}{N_0} = 10$ dB, entonces es teóricamente posible transferir sin errores 80 Mbps.

Problema 191: (2 puntos) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ La entropía de una fuente de datos 6-aria que entrega símbolos con probabilidades $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ es, aproximada a dos decimales, 2,26 bits por símbolo.

Problema 192: (3 puntos) ¿Verdadero o falso? (¡Respuesta incorrecta descuenta el puntaje!)

____ El largo descriptivo medio del código Huffman que comprime la fuente anterior es, aproximado a dos decimales, 2,38 bits por símbolo.

9. Módulo 16: Límites fundamentales

Problema 193: (20 puntos) Sobre límites fundamentales en comunicaciones digitales:

(a) (7 puntos) Los caracteres más comunes que se encuentran en textos en castellano son las 26 letras básicas (*abcdefghijklmnopqrstuvwxyz*) más 9 signos de puntuación (*.,:;!¿?"'*)[6]. Un análisis estadístico rudimentario indica que estos 35 caracteres pueden ser agrupados según su frecuencia de aparición en 6 grupos, según indica la Tabla 2: ¿A qué tamaño mínimo es posible comprimir un libro cualquiera en castellano de 250.000 caracteres?

Cuadro 2: Distribución estadísitca de caracteres en textos castellanos (datos ficticios).

Grupo	Número de caracteres en el Grupo	Frecuencia de aparición de cada caracter
1	6	6 %
2	6	4 %
3	6	3 %
4	6	2 %
5	6	1 %
6	5	0,8 %

(b) (6 puntos) Se tiene una fuente de datos que entrega los símbolos A, C, E, L, O y T con probabilidades $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{32}$, respectivamente. Diseñe un código Huffman para comprimir esta fuente, y determine la secuencia de bits que representa la compresión del mensaje *TELECO*.

(c) (7 puntos) ¿Es teóricamente posible transmitir información sin errores usando la fuente de datos de la parte (b) a una tasa de 160 ksímbolos/s a través de un canal de 100 kHz de ancho de banda, bajo una razón señal a ruido de 7 dB? En caso afirmativo, ¿cual es la tasa de símbolos máxima posible? En caso negativo, que razón señal a ruido haría la comunicación factible?

Problema 194: (10 puntos) Sobre códigos de repetición:

(a) (5 puntos) Un código de repetición de tasa $\frac{1}{5}$ es utilizado para proteger una transmisión por un canal ruidoso. Cuantos errores es capaz de *detectar* este código?

(b) (5 puntos) Cuantos errores es capaz de *corregir* el código de repetición anterior?

Problema 195: (10 puntos) Se desea transmitir el mensaje TRES TRISTES TIGRES TRAGABAN TRIGO EN UN TRIGAL a través de un canal Gaussiano cuyo ancho de banda es 3,87 MHz. La frecuencia con la que cada una de las letras del mensaje aparece en el lenguaje castellano está listada en la Tabla 3 (fuente: `http://en.wikipedia.org/wiki/Letter_frequencies`).

[6]Para simplificar, consideramos las 5 vocales con acentos (*áéíóú*) y la '*ñ*'como repeticiones de sus pares sin tilde.

(a) (8 puntos) Determine la razón señal a ruido mínima necesaria para que la transmisión sea teóricamente posible en 16,5 μs. Entregue el resultado en decibeles.

Indicación: Recuerde que la entropía es el valor medio de información contenida un símbolo cualquiera del alfabeto. Use esta noción para deducir la cantidad de información que tiene cada símbolo específico del alfabeto. Luego use los datos de la Tabla 195 para calcular la cantidad de información que el mensaje dado tiene. Redondee su resultado al siguiente bit entero.

Cuadro 3: Distribución estadísitca de caracteres en textos escritos en castellano (Problema 195). El símbolo $*$ representa "todas las demás letras".

Letra	Frecuencia
A	12,53 %
B	1,42 %
E	13,68 %
G	1,01 %
I	6,25 %
L	4,97 %
N	6,71 %
O	8,68 %
R	6,87 %
S	7,98 %
T	4,63 %
U	3,93 %
$*$	21,34 %

(b) (2 puntos) Considere ahora que el ancho de banda del canal es 2 MHz y la SNR es 7 dB. Realizando el cálculo inverso a la parte (a), se concluye que el mensaje no puede ser transmitido en el tiempo dado (es físicamente imposible). Si el ancho de banda, el tiempo dado para la transmisión, y la SNR no pueden ser cambiados, una alternativa es usar compresión con pérdida y eliminar algunas letras del mensaje. ¿Cual letra del mensaje eliminaría primero, y por qué?

Problema 196: (15 puntos) Los teléfonos celulares de primera generación (años 80 y comienzos de los 90) operaban en la banda de 900 MHz y utilizaban modulación FM. Los canales de transmisión tenían 30 kHz de ancho de banda y las señales de voz estaban limitadas a 4 kHz. Para obtener conversaciones telefónicas de calidad "aceptable" era necesaria una razón señal a ruido de 18 dB, y se obtenía una eficiencia espectral equivalente a una transmisión de 10 kbps.

La segunda generación (años 90 y comienzos de los 2000) utilizó una modulación digital. Las señales de voz eran muestreadas, cuantizadas y comprimidas, resultando una tasa de 8 kbps. La razón señal a ruido necesaria para calidad "aceptable" bajó a 7 dB y la eficiencia espectral aumentó a 1,62 bps/Hz.

(a) (5 puntos) Determine el índice de modulación del sistema de primera generación.

(b) (5 puntos) Determine en ambos casos cuantos decibeles de potencia se "malgastaban" con respecto a un sistema ideal.

(c) (5 puntos) Para el sistema de segunda generación, asuma que el muestreo se realiza a tasa de Nyquist, que el cuantizador es de 6 bits, y que en la secuencia de bits resultantes el bit 0 tiene probabilidad $\frac{1}{4}$ y el bit 1 tiene probabilidad $\frac{3}{4}$ (datos ficticios). ¿Con ello, el compresor opera con o sin pérdida?

Problema 197: (15 puntos) Un código de repetición de tasa $\frac{1}{2}$ es utilizado para codificar un mensaje binario. La secuencia codificada es modulada QPSK, con codificación Gray y pulsos rectangulares. Cada bit de fuente modula la componente en fase, y su bit redundante modula la componente en cuadratura. Cada símbolo QPSK es transmitido individualmente a través de un canal con ruido blanco Gaussiano, y procesado con un receptor óptimo seguido por el decodificador del código de repetición. En caso de *detectarse* un error, el receptor solicita retransmisión inmediata, para lo que dispone de un canal de retorno ideal. De lo contrario, el bit de fuente es recuperado y el receptor solicita la transmisión del siguiente símbolo.

(a) (10 puntos) Determine la probabilidad de error de bit de este sistema a la salida del decodificador, en función de la razón señal a ruido por bit de *fuente*.

(b) (5 puntos) En comparación con un sistema BPSK tradicional sin codificación, ¿cual utilizaría Ud., y por qué?

Problema 198: (10 puntos) Considere una fuente binaria que entrega 0 con probabilidad p y 1 con probabilidad $1-p$. La fuente alimenta a un codificador de paridad que agrega un bit de paridad por cada dos bits de fuente. El valor del bit de paridad es tal que la suma binaria (XOR) de la tripleta resultante sea 0 (paridad par).

(a) (7 puntos) Determine la cantidad promedio de información que contiene cada símbolo (tres bits) de la salida del codificador.

Indicación: Saber que $\lim_{x\to 0} x \log x = 0$ puede ser útil.

(b) (3 puntos) Compare su resultado en (a) con la entropía de la fuente binaria y comente brevemente.

Problema 199: (7 puntos) El circuito de un sensor de temperatura tiene los siguientes tres componentes en cascada:

- Un termómetro que produce una señal analógica entre 0 V y 25,5 V para indicar linealmente una temperatura en el rango 0°C a 255°C.
- Un conversor análogo-digital que muestrea la señal del termómetro a una tasa adecuada y la cuantiza linealmente con 8 bits de resolución. La secuencia de bits generada por el conversor A/D puede ser representada por una fuente binaria con probabilidad p para 0 y probabilidad $1-p$ para 1. El valor de p depende de las estadísticas del proceso estocástico de temepratura específico que se mida. En este caso, el termómetro es utilizado en una aplicación de monitoreo remoto que mide temperaturas ambiente distribuidas uniformemente entre 0°C y 31°C.

- El último componente en la cadena es un compresor que remueve redundancia de la secuencia binaria entregada por el conversor A/D y mejora la densidad de información en 5 % con respecto a la secuencia recibida del conversor A/D.

Determine cuantos bits de información tiene, en promedio, cada bit de datos que entrega el compresor en su salida.

Indicación: Comience determinando p.

Problema 200: (7 puntos) Un sistema de comunicaciones es alimentado con datos provenientes de un dispositivo como el sensor de temperatura del Problema 199. El sistema de comunicaciones tiene un codificador de canal que inserta un bit de redundancia por cada 3 bits que recibe de la fuente (códificación con tasa $\frac{3}{4}$).

(a) (5 puntos) Asumiendo que el sensor entrega bits perfectamente comprimidos a una tasa de R_b bps, ¿cual es la tasa R_b máxima por sobre la cual es imposible transmitir sin errores con este sistema en un ancho de banda de 1 kHz y con una razón señal a ruido de 7 dB?

(b) (2 puntos) ¿Cómo cambia su respuesta en (a) si el sensor entrega bits comprimidos imperfectamente, asumiendo que cada bit del sensor contiene sólo 0,94 bits de información?

Problema 201: (10 puntos) Una fuente de datos genera los símbolos A, B, C, D y E con probabilidades $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{16}$, respectivamente. Los símbolos son generados a una tasa de 80 kilo-símbolos por segundo, comprimidos mediante un código Huffman y transcritos con éste a una secuencia binaria. La secuencia es luego alimentada a un codificador de canal, la salida de éste a un modulador M-ario y la salida de este último es finalmente transmitida. En el receptor se realiza el proceso inverso.

El sistema descrito anteriormente puede ser configurado para usar tasas de codificación (R_c) de $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$, y para modular con $M = 4$ y $M = 16$. Las curvas de probabilidad de error de bit (P_b) en función de $\frac{E_b}{N_0}$ para estos cuatro casos se ilustran en la Figura 56.

Se desea que en la salida del decodificador de canal del receptor la tasa de error de bit sea igual a 10^{-6}. Con este dato, la elección de cual de las cuatro configuraciones utilizar depende del ancho de banda del canal disponible para la transmisión.

(a) (5 puntos) Si el ancho de banda disponible para esta transmisión es 120 kHz, ¿cual de las cuatro posibles configuraciones utilizaría Ud., y por qué?

(b) (2 puntos) ¿Hay alguna de las cuatro configuraciones que en ningún caso se utilizaría, con ningún ancho de banda?

(c) (3 puntos) Si el ancho de banda del canal es ilimitado, ¿cual de las cuatro posibles configuraciones utilizaría Ud., y por qué?

Problema 202: (8 puntos) Se tiene una fuente de datos que entrega los símbolos α, β, γ y δ con probabilidades $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$, respectivamente.

(a) (2 puntos) Determine la entropía de esta fuente.

(b) (2 puntos) Diseñe un código Huffman para comprimir mensajes de esta fuente.

(c) (1 puntos) Determine la secuencia de bits que entrega su compresor Huffman para el mensaje $\alpha\gamma\delta\alpha\beta$.

(d) (3 puntos) Determine el número promedio de bits entregados por el compresor por cada símbolo alimentado al compresor.

Problema 203: (12 puntos) Una fuente de datos entrega los símbolos A, B, C, D, E, F y G con probabilidades $\frac{7}{100}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{12}{100}$, $\frac{18}{100}$, $\frac{22}{100}$ y $\frac{23}{100}$, respectivamente.

(a) (3 puntos) Determine la entropía de esta fuente.

(b) (4 puntos) Diseñe un código Huffman para comprimir esta fuente y calcule el largo descriptivo medio por símbolo del código.

(c) (5 puntos) Suponga que la fuente entrega símbolos a un tasa de 2 Mega-símbolos por segundo y que se dispone de un código de canal que permite operar a 3 dB de la capacidad del canal. ¿ Si la SNR de recepción es 10 dB, qué ancho de banda mínimo es necesario para que la comunicación sea posible sin errores? Asuma compresión perfecta.

Problema 204: (11 puntos) Las urnas de una elección presidencial pueden ser vistas colectivamente como una fuente de información que entrega símbolos diferentes de un alfabeto para cada candidato, votos blancos y votos nulos.

Según un boletín emitido por el Servicio Electoral el día 21 de Noviembre de 2013, el conteo preliminar de las elecciones del 17 de Noviembre es como sigue:

> *Se informa que, sobre un total de 6.696.229 votos emitidos, correspondientes a 41.341 mesas contabilizadas, que equivalen al 99,98 ciento del total de mesas*

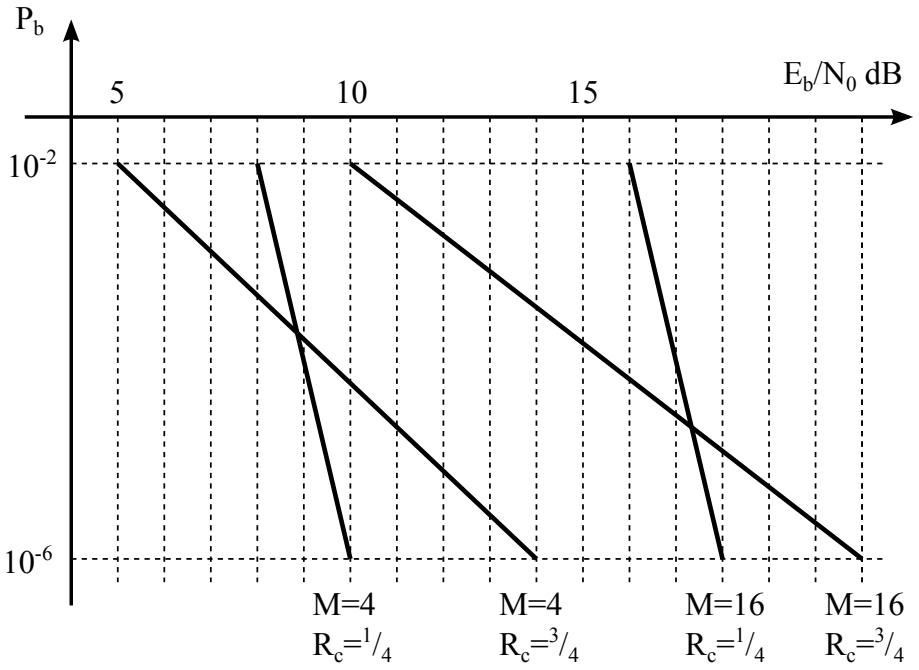


Figura 56: Curvas de desempeño del Problema 201.

de todo el país, los resultados provisorios, sujetos al escrutinio general del Tribunal Calificador de Elecciones, para la nominación del candidato al cargo de Presidente de la República, son los siguientes:

- *Válidamente emitidos: 6.582.474 votos, equivalente al 98,30 por ciento.*
- *Nulos: 67.361 votos, equivalente al 1,00 por ciento.*
- *En Blanco: 46.394 votos, equivalente al 0,69 por ciento.*

De los votos válidamente emitidos, esto es, excluidos los nulos y los blancos, los resultados son los siguientes.

- *Candidato FRANCO ALDO PARISI FERNANDEZ, 665.959 votos, equivalente al 10,11 por ciento.*
- *Candidato MARCEL CLAUDE REYES, 184.966 votos, equivalente al 2,80 por ciento.*
- *Candidato RICARDO ISRAEL ZIPPER, 37.795 votos, equivalente al 0,57 por ciento.*
- *Candidato MARCO ENRIQUEZ-OMINAMI GUMUCIO, 723.066 votos, equivalente al 10,98 por ciento.*
- *Candidata ROXANA MIRANDA MENESES, 82.291 votos, equivalente al 1,25 por ciento.*
- *Candidata MICHELLE BACHELET JERIA, 3.073.570 votos, equivalente al 46,69 por ciento.*
- *Candidata EVELYN MATTHEI FORNET, 1.647.490 votos, equivalente al 25,02 por ciento.*
- *Candidato ALFREDO SFEIR YOUNIS, 154.701 votos, equivalente al 2,35 por ciento.*
- *Candidato TOMAS JOCELYN-HOLT LETELIER, 12.636 votos, equivalente al 0,19 por ciento.*

(a) (4 puntos) Determine la cantidad de información promedio, en bits, contenida en un voto emitido (incluye los votos válimente emitidos, nulos y blancos).

(b) (4 puntos) Diseñe un código Huffman para comprimir esta fuente y calcule el largo descriptivo medio por símbolo en la salida del compresor.

(c) (3 puntos) A partir de sus cálculos en (a), indique la cantidad de información, en bits, que tiene un voto emitido a favor de Michelle Bachelet y uno emitido a favor de Tomás Jocelyn-Holt. Luego, considere que el padrón electoral para estas elecciones fue de 13.573.134 millones de personas y modele el "voto de abstención" mediante un símbolo adicional entregado por la fuente. Determine nuevamente la cantidad de información que tienen los voto emitidos a favor de Michelle Bachelet y Tomás Jocelyn-Holt bajo este nuevo escenario. ¿Comparando, qué puede concluir?

Problema 205: (11 puntos) Se tiene una fuente que emite números enteros $k \in \{1, \ldots, 8\}$, independientes entre sí, con probabilidades $p_k = \frac{k}{36}$.

(a) (2 puntos) Una posible representación binaria para los símbolos de esta fuente es la numeración romana, ya que bastan los símbolos romanos I y V para representar los 8 valores en cuestión. Determine el largo descriptivo medio, medido en bits por símbolo, de este *código romano*.

(b) (2 puntos) Determine el largo descriptivo medio mínimo, en bits por símbolo, que es teóricamente posible para representar los símbolos de esta fuente.

(c) (2 puntos) Compare sus resultados de (a) y (b) y explique.

(d) (5 puntos) Proponga un código concreto que permita comprimir esta fuente sin pérdida y cuyo largo descriptivo medio sea menor que 3 bits por símbolo. Determine el largo descriptivo medio del código propuesto.

Problema 206: (10 puntos) Se tiene una fuente de datos que entrega los símbolos A, C, H, M, O y S. Sus probabilidades son $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$, respectivamente.

(a) (3 puntos) Determine la entropía de esta fuente.

(b) (4 puntos) Diseñe un código Huffman para comprimir mensajes de esta fuente.

(c) (1 puntos) Determine la secuencia de bits que entrega al compresor Huffman para el mensaje "*CHAO COMS*" (el espacio en blanco es sólo para facilitar la lectura).

(d) (2 puntos) Determine el número promedio de bits entregados por el compresor por cada símbolo alimentado al compresor. ¿Es este un buen código compresor?

Problema 207: (10 puntos) La Figura 57 ilustra la representación de siete segmentos de los dígitos 0 al 9. Concretamente, cada dígito es representado mediante los siete bits a, b, c, d, e, f y g. Por ejemplo, el dígito 1 es representado por la secuencia $\{0, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$, donde $b = c = 1$ y todos los demás bits valen 0.

Considere un teclado numérico que entrega a una secuencia de valores decimales. Las probabilidades de los dígitos pares y las de 0, 1 y 9 son todas $\frac{1}{8}$. La probabilidad del dígito 7 es $\frac{1}{16}$ y las de los dígitos 3 y 5 son $\frac{1}{32}$. Cada nuevo dígito entregado por el teclado es alimentado a un codificador Huffman cuya salida a su vez es alimentada a un codificador de siete segmentos. Éste tiene la inteligencia para interpretar el código Huffman y entregar su salida de siete segmentos. Es evidente que el codificador de siete segmentos agrega redundancia en forma controlada, por lo que puede ser visto como un codificador de canal (uno no muy bueno, por cierto, pero eso es otro tema). Finalmente, la salida del codificador de siete segmentos es alimentada a un modulador NRZ que transmite la secuencia de bits con un ancho de banda de 100 kHz por un canal blanco gaussiano.

(a) (3 puntos) Determine la entropía del teclado numérico como fuente de datos.

(b) (3 puntos) Diseñe un código Huffman para esta fuente.

(c) (1 punto) Determine la tasa R_c del codificador, considerando el largo descriptivo medio del código Huffman como tamaño de las palabras de entrada al codificador de siete segmentos.

(d) (3 puntos) Dada una razón señal a ruido (SNR) de 7 dB, ¿cual es la tasa de digitación teórica máxima posible que podría ser soportada a través de este canal?

Indicación: Determine cuanta información contiene en promedio un bit que entrega el codificador de siete segmentos.

Problema 208: (12 puntos) Se tiene una fuente binaria cuya probabilidad de 0 es p y la probabilidad de 1 es $1 - p$. Los símbolos emitidos por esta fuente son independientes entre sí. La función de entropía de la fuente en función de p es $H_2(p)$. Su secuencia de salida es

alimentada a un dispositivo que agrupa los bits de a 3 y según los valores de éstos emite uno de los 8 símbolos A, B, C, D, E, F, G y H. Este dispositivo y su salida 8-aria pueden ser considerados como una fuente 8-aria de símbolos independientes.

(a) (4 puntos) Determine la entropía $H_8(p)$ de la fuente 8-aria y exprésela en términos de $H_2(p)$. Comente el resultado.

(b) (1 puntos) Considerando $p = \frac{1}{4}$, elabore un código Huffman para la fuente binaria y determine el largo descriptivo medio del código.

(c) (5 puntos) Considerando $p = \frac{1}{4}$, elabore un código Huffman para la fuente 8-aria y determine el largo descriptivo medio del código.

(d) (2 puntos) ¿Qué puede concluir al comparar los resultados de (a), (b) y (c)?

10. Otros

Problema 209: (8 puntos) En relación al artículo "A sense of things to come", aparecido en *The Economist* en abril de 2007:

(a) (3 puntos) Explique brevemente el concepto de "ad-hoc mesh networking".

(b) (3 puntos) Mencione tres ejemplos concretos de aplicación de este tipo de redes mencionados en el artículo.

(c) (2 puntos) Indique dos obstáculos que enfrenta el desarrollo de estas tecnologias.

Referencias

[1] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. Wiley, 2001.

[2] L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 6th ed. Prentice Hall, 2001.

[3] B. Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 3rd ed. Oxford University Press, 1998.

[4] A. B. Carlson, P. B. Crilly, and J. C. Rutledge, *Communication systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*, 4th ed. McGraw-Hill, 2002.

[5] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. McGraw-Hill, 2000.

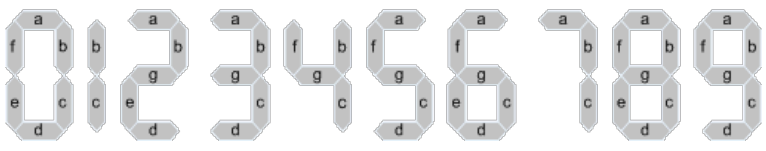


Figura 57: Representación de site segmentos de los dígitos 0 al 9, Problema 207. Fuente: `http://www.electronics-tutorials.ws/`.