Módulo 6 **Procesos estocásticos**

Cápsula 6.1 Procesos estocásticos

¿Por qué estudiar P.E.?

a) Para entender el ruido térmico.

b) Para saber modelar señales no conocidas a priori, pero cuyas características principales deben ser tomadas en consideración en el diseño de sistemas de comunicaciones (ej: señales de mensaje).

Variable aleatoria: X (mayúscula)

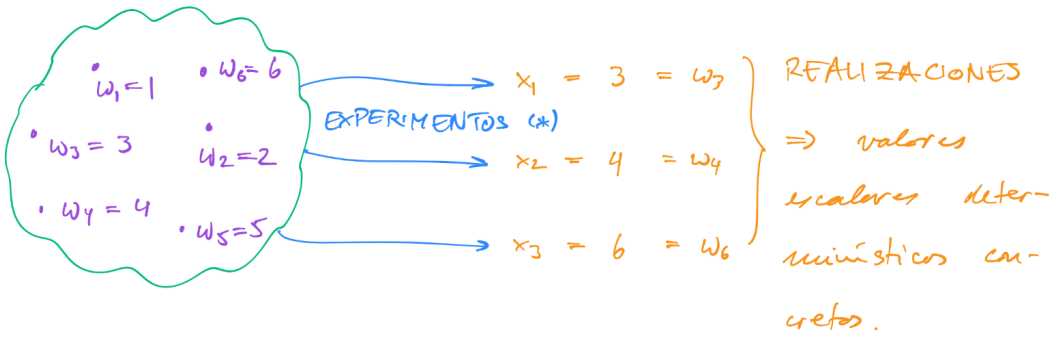


Figura 6.1.1: Espacio muestral, experimentos y realizaciones de variables aleatorias.

Espacio muestral

$$\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_6\} \quad : \quad \text{Todos los valores posibles que puede tomar X.}$$

(*) No es posible predecir la realización antes de llevar acabo su experimento.

PROCESO ESTOCÁSTICO: $X(t)$ (MAYÚSCULA)

$\Leftrightarrow$ Señal o función aleatoria.

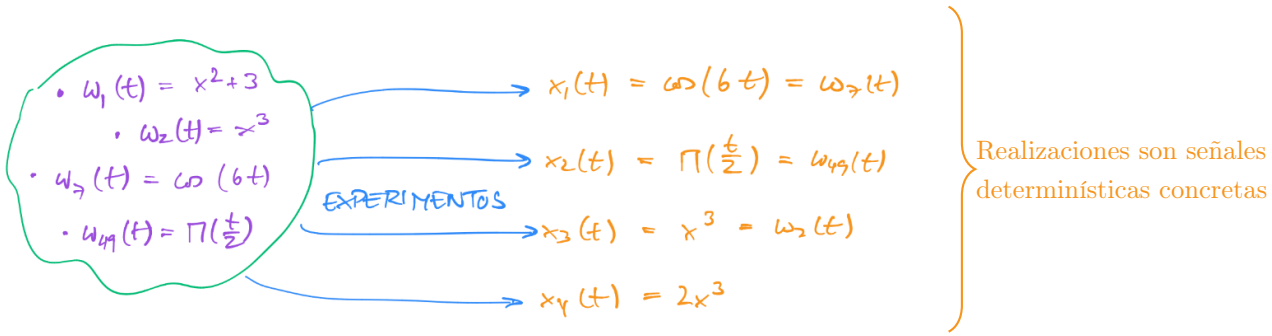


Figura 6.1.2: Espacio muestral, experimentos y realizaciones de procesos estocásticos.

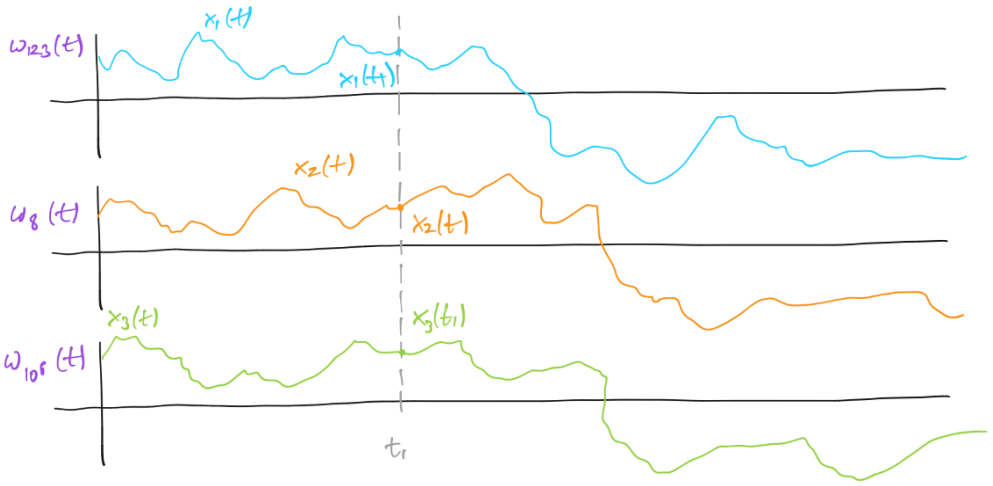
ESPACIO MUESTRAL

$$\Omega = \{w_1(t), w_2(t), ..., w_{123}(t), ...\}$$

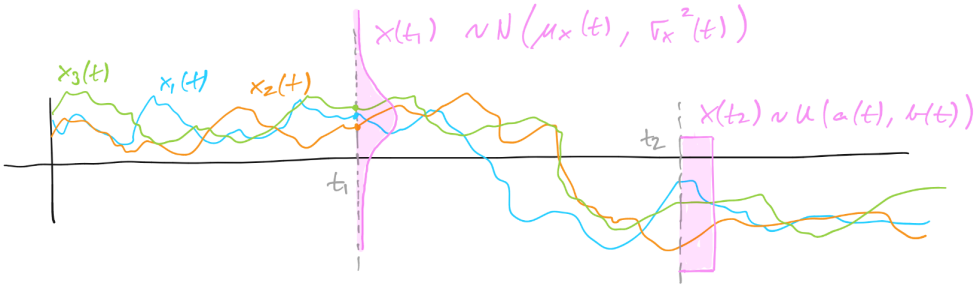
$\Longrightarrow$ Contiene todas las funciones o señales que pueden resultar de un experimento.

Cápsula 6.2 — El ensemble

El conjunto de todas las señales $w_i(t)$ en Ω recibe el nombre de ENSEMBLE.



(a)



(b)

Figura 6.2.1: (a) Tres realizaciones del ensemble y (b) ilustrado mediante realizaciones.

Graficar todas las realizaciones conjuntamente (ej. 1000 experimentos) va revelando la distribución de probabilidad del ensamble de señales en t_1.

Es una suerte de "mapa de calor" que revela la función de densidad de probabilidad del proceso estocástico a lo largo del tiempo.

Un P.E. puede ser concebido como una distribución de probabilidad que evoluciona en el tiempo.

En general, en cada instante t_1, un P.E. $X(t)$ es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es $f_{X(t)}(x)$

↳ visto como un v.a. X observada del P.E. en el instante t.

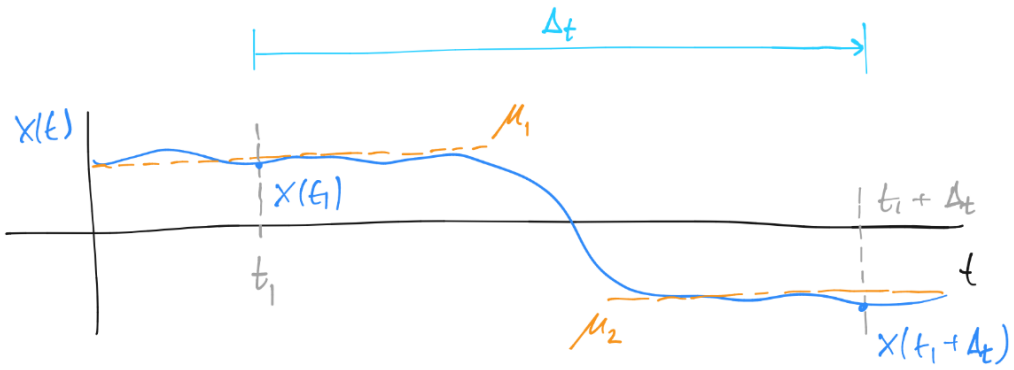


Figura 6.3.1: Función de media.

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}\{X(t_1)\} &= \mu_1 \\ \mathbb{E}\{X(t_1+\Delta_t)\} &= \mu_2\end{aligned}\right\} \implies \mathbb{E}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx = \mu_X(t)$$

Donde $\mu_X(t)$ es la FUNCIÓN DE MEDIA.

Observamos que:

Si $\mu_X(t_1) \neq \mu_X(t_1+\Delta_t)$.

$\implies f_{X(t_1)}(x) \neq f_{X(t_1+\Delta_t)}(x)$

$\implies$ El P.E. NO es ESTACIONARIO.

PROCESO ESTOCÁSTICO ESTACIONARIO (PEE): Es un proceso estocástico cuyas propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

Una condición necesaria (pero no suficiente) para que un P.E. sea estacionario es que $f_{X(t)}(x)$ no cambie con el tiempo. Ello implica que "un P.E.E. tiene función de media constante $\mu_X(t) = \mu_X$".

$$\mu_X(t) = \mu_X \impliedby f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\Delta_t)}(x) \quad (\forall t, \forall \Delta_t) \impliedby \text{P.E.E.}$$

Cápsula 6.4 — Función de autocorrelación

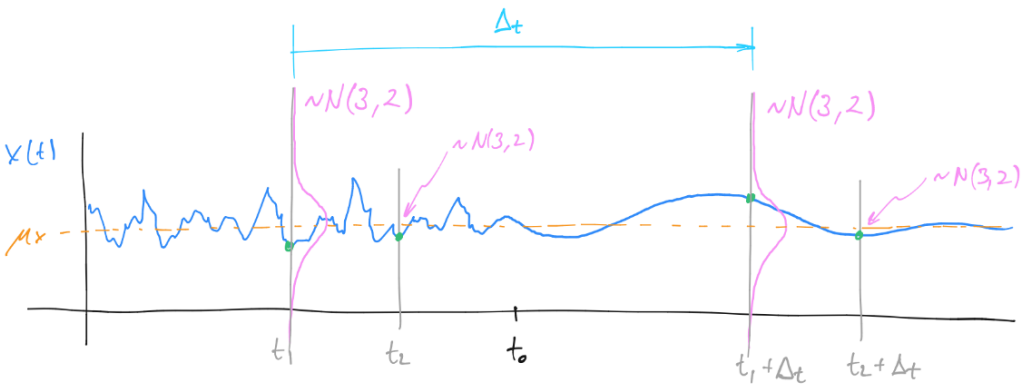


Figura 6.4.1: Función de autocorrelación.

Si bien el P.E. tiene media constante, se observa que en la primera porción ($t < t_0$) el P.E. tiene una capacidad para cambiar más rápidamente que en la segunda porción ($t > t_0$), pese a que la distribución de probabilidad del P.E. permanece igual (supuesto: $f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\Delta_t)}(x)$)

Es evidente que las estadísticas de CORRELACIÓN TEMPORAL varían en el tiempo y que por lo tanto el P.E. no es estacionario. La estacionariedad también depende de la correlación temporal del P.E.

$\Longrightarrow$ Estudiemos por lo tanto la correlación temporal.

Para identificar la correlación temporal de un P.E., se define la FUNCIÓN DE COVARIANZA o de AUTOCOVARIANZA como sigue:

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\} && (6.4.1)\\
&= \mathbb{E}\{[X(t_1) - \mu_X][X(t_2) - \mu_X]\} && (6.4.2)\\
&= \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} - \mu_X^2 && (6.4.3)\\
&= \underbrace{\mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\}} - \mu_X^2 && (6.4.4)\\
&= R_X(t_1, t_2) - \mu_X^2 && (6.4.5)
\end{aligned}
$$

$\hookrightarrow$ Función de autocorrelación.

La función de autocorrelación cuantifica la correlación temporal de un P.E.

En el ejemplo podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} & C_X(t_1, t_2) < C_X(t_1 + \Delta_t, t_2 + \Delta_t) \\ \Leftrightarrow\ & R_X(t_1, t_2) < R_X(t_1 + \Delta_t, t_2 + \Delta_t) \end{aligned}$$

ya que para $t < t_0$ el P.E. pierde correlación más rápidamente que para $t > t_0$.

Cápsula 6.5 Función de autocorrelación de P.E. estacionarios

Por definición:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left\{X(t_1) \cdot X(t_2)\right\} \tag{6.5.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \underbrace{f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)}_{\substack{\text{Función de densidad de} \\ \text{probabilidad bivariada} \\ \text{entre v.a. } X(t_1) \text{ y } X(t_2)}} dx_1\, dx_2 \tag{6.5.2}$$

Asumamos $R_X(t_1, t_2) \neq R_X(t_1 + \Delta_t, t_2 + \Delta_t)$. en tal caso, la autocovarianza del P.E. varía con el tiempo y el P.E. no puede ser estacionario, vale decir:

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) \neq f_{X(t_1+\Delta_t),X(t_2+\Delta_t)}(x_1, x_2)$$

Vice-versa, una condición necesaria (pero no suficiente) para que un P.E. sea estacionario es que $f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$ NO CAMBIE CON Δ_t para cualquier par dado de instantes de observación t_1 y t_2, esto es:

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t_1+\Delta_t),X(t_2+\Delta_t)}(x_1, x_2) \quad (\forall t_1, t_2, \Delta_t) \Longleftarrow \text{P.E.E.}$$

Ello implica que la autocorrelación no depende de la ubicación absoluta de t_1 y t_2 en el tiempo, sino que solo del tiempo relativo Δ_t que transcurre entre ellos.

Por lo tanto, para todo P.E. estacionario la función de autocorrelación satisface:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) \rightarrow \text{Ojo: abuso de notación}$$

La covarianza entre $X(t_1)$ y $X(t_2)$ solo depende de la DIFERENCIA entre los instantes de observación y no de los instantes absolutos. Así, la condición necesaria anterior puede ser escrita como:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) \Longleftarrow \text{P.E.E.}$$

Cápsula 6.6 Procesos estocásticos estacionaros

Con la intuición generada a partir de nuestro análisis de las funciones de media y autocorrelación, podemos formular la condición general para P.E.E.

Un procesos estocástico es ESTACIONARIO EN EL SENTIDO ESTRICTO ssi:

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_k)}(x_1,\ldots,x_k) = f_{X(t_1+\Delta_t),X(t_2+\Delta_t),\ldots,X(t_k+\Delta_t)}(x_1,\ldots,x_k)$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N},$$
$$\forall\, \Delta_t \in \mathbb{R},$$
$$\forall\, \{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \in \mathbb{R}.$$

Si un P.E. cumple con:

1. $\mathbb{E}\{X(t)\} = \mu_X$ cte
2. $\mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = R_X(\underbrace{t_1 - t_2}_{\triangleq \tau}) = R_X(\tau)$

Entonces se dice que el P.E. es ESTACIONARIO EN EL SENTIDO AMPLIO (ESA).

Cápsula 6.7 Propiedades de la función de autocorrelación de P.E. ESA

Suponiendo que $X(t)$ es P.E. ESA $\implies$ $X(t) \to R_X(\tau)$

1. POTENCIA MEDIA:
$$\mathbb{E}\{X^2(t)\} = R_X(0)$$
2. SIMETRÍA:
$$R_X(\tau) = R_X(-\tau)$$
$$\Leftrightarrow R_X(\tau) \text{ es función par.}$$

3. MÁXIMO:

$$R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$$

$\Leftrightarrow$ "Ningún par de muestras del P.E. están mas correlacionadas entre si, que una muestra consigo misma."

4. INTERPOLACIÓN GRÁFICA DE LA CORRELACIÓN TEMPORAL:

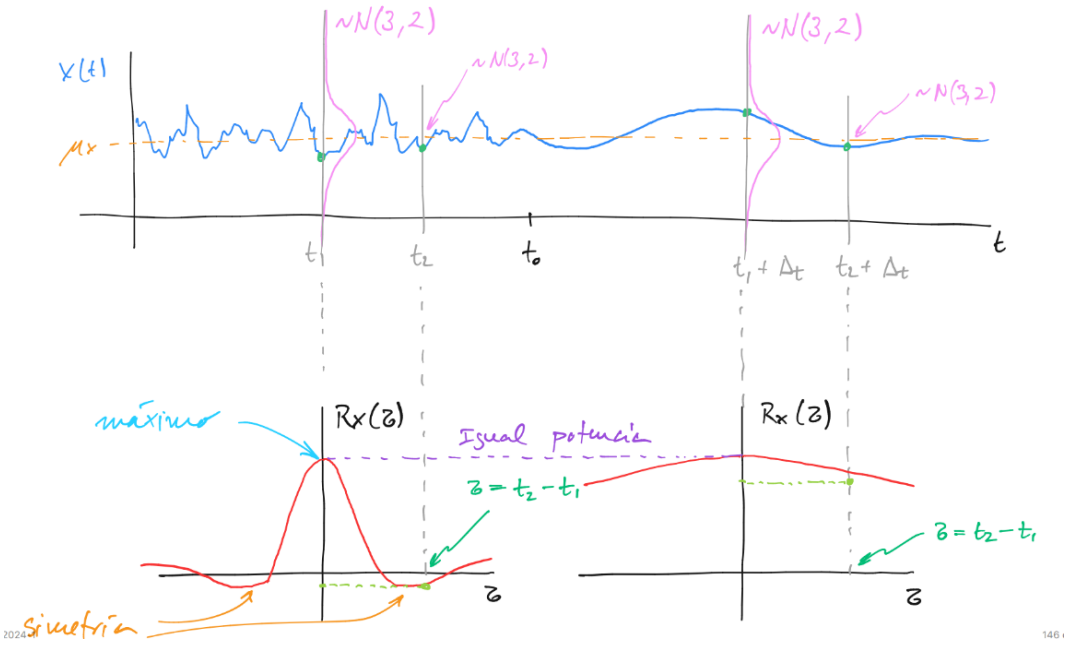


Figura 6.7.1: Interpretación gráfica de la correlación temporal.

Cápsula 6.8 Densidad espectral de potencia de P.E. ESA

¿Cuál es el contenido espectral de un P.E.?

¿En qué frecuencias se concentra la energía del proceso?

Problema: no es posible tomar Transformada de Fourier a un P.E.

1. $X(t)$ no es una señal, sino "una densidad".
2. Las realizaciones de un P.E. ESA entregan potencia, en promedio, a una tasa de $R_X(0)$ y por lo tanto tienen energía ∞.

   $\Longrightarrow$ Realizaciones son no - Fourier transformables en general.

Idea: usar una "Tranformada de Fourier" de tiempo acotado

$$\underbrace{X_T(f)}_{\text{Es una v.a. } \in \mathbb{C}} = \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overbrace{X(t)}^{\text{Escalar}} e^{-j2\pi ft}\, dt}_{\text{Suma ponderada de las } \infty \text{ v.a.}} \tag{6.8.1}$$

$\underbrace{}_{\text{v.a. en cualquier } t}$

Def: DENSIDAD ESPECTRAL MEDIA del P.E. ESA $X(t)$, en $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, en cada frecuencia f:

$$S_X^{(T)}(f,T) = \underbrace{\frac{1}{T}}_{\left[\frac{1}{s}\right]} \underbrace{\mathbb{E}\left\{|X_T(f)|^2\right\}}_{\left[\frac{\text{J}}{\text{Hz}}\right]} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{Hz}}\right] \tag{6.8.2}$$

Recordando el teorema de energía:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{|u(t)|^2}^{[\text{V}^2]}\, dt = \overbrace{E}^{[\text{J}]} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df \tag{6.8.3}$$

$\underbrace{}_{[\text{W}] = \left[\frac{\text{J}}{\text{s}}\right]}$ $[\text{s}]$ $\underbrace{}_{\left[\frac{\text{J}}{\text{Hz}}\right]}$ $[\text{Hz}]$

$(h(t) : [\text{V}],\ R = 1\,\Omega)$

Def: La DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA de un P.E. ESA $X(t)$ esta dada por:

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} S_X^{(T)}(f,T)$$

y responde a la pregunta:

¿Cuánta potencia entrega el P.E. ESA $X(t)$ en promedio, en un Hz de ancho de banda en la frecuencia f?

Notemos algunas propiedades básicas de $S_X(f)$:

1. $S_X(f) \in \mathbb{R}$
2. $S_X(f) = S_X(-f) \implies$ Función par/simétrica
3. $S_X(f) \geq 0 \quad \forall f$

Cápsula 6.9 — Teorema de Wiener-Khinchin

La DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA de un P.E. ESA $X(t)$ esta dada por:

$$\boxed{S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}} \tag{6.9.1}$$

Corolario: La potencia del proceso esta dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df = R_X(0) \tag{6.9.2}$$

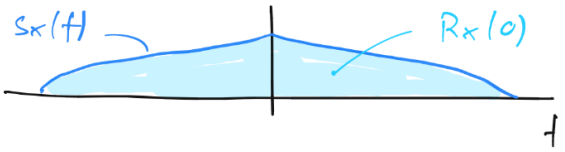


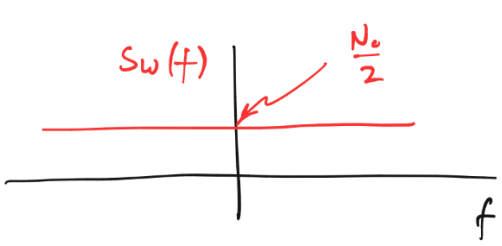
Figura 6.9.1: Densidad espectral de potencia $S_X(f)$ de un proceso.

Por TWK:

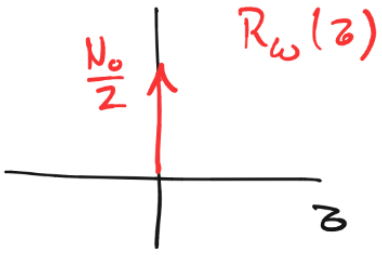
$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df = R_X(\tau) \tag{6.9.3}$$

($\tau = 0$)

Def: P.E. BLANCO: Es un P.E. $w(t)$ cuya D.E.P es plana en frecuencia $\forall f$:



(a) Densidad Espectral de Potencia $S_w(f)$ de ruido blanco.



(b) Función de autocorrelación $R_w(\tau)$ de ruido blanco.

Figura 6.9.2: Densidad espectral de potencia y función de autocorrelación de ruido blanco.

Nomenclatura: $w(t) \Leftrightarrow$ P.E. Blanco (*"white"*).

De lo anterior, resultan dos observaciones:

(a) Cualquier par de muestras de un P.E. blanco no tiene correlación entre si.

$$R_w(\tau) = R_w(t_1 - t_2) = \mathbb{E}\{w(t_1)w(t_2)\} = 0 \quad (\forall t_1 \neq t_2)$$

(b) Un P.E. blanco tiene potencia ∞.

$$\Leftrightarrow R_w(0) = \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f)\, d_f = \infty$$

Cápsula 6.10 — Procesos estocásticos a través de filtros lineales

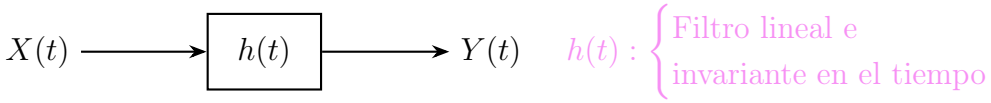


Figura 6.10.1: Proceso estocástico a través de filtro LTI.

Dada la distribución del P.E. $X(t)$, ¿cuál será la distribución del P.E. $X(t)$?

¿Si $X(t)$ es ESA, ¿lo es también $Y(t)$?

Supongamos que $Y(t)$ es ESA.

$$\begin{aligned}
\mu_Y(t) &= \mathbb{E}\{Y(t)\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, X\big(t-\tau\big)\, d\tau\Big\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \mathbb{E}\{X(t-\tau)\}\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \mu_X\big(t-\tau\big)\, d\tau \\
&= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau \qquad \leftarrow e^{j2\pi 0\tau} \\
&= \mu_X\, H(0) \\
&= \text{cte.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= \mathbb{E}\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t_1-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)X(t_2-\tau_2)d\tau_2\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\mathbb{E}\left\{X(t_1-\tau_1)X(t_2-\tau_2)\right\}d\tau_1 d\tau_2 \qquad (*) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\mathbb{E}\{R_X(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2 \\
&\qquad\qquad R_X(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2) = R_X(\underbrace{t_1-t_2}_{\triangleq\,\tau}-\tau_1+\tau_2)) \\
&= R_Y(t_1-t_2) = R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $X(t)$ es P.E. ESA, entonces la salida $Y(t)$ del filtro LTI también lo es!

Cápsula 6.11 Densidad espectral de potencia de procesos filtrados

Tomemos $\mathcal{F}\{\cdot\} = R_Y(\tau) = R_Y(t_1-t_2) = (*)$

$$
S_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau-\tau_1+\tau_2)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\,d\tau_1\,d\tau_2 \qquad (6.11.1)
$$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\underbrace{\tau-\tau_1-\tau_2}_{\triangleq\,\tau'})e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\,d\tau_1\,d\tau_2 \qquad (6.11.2)
$$

($\tau' + \tau_1 - \tau_2$; $d\tau'$)

$$
= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)e^{-j2\pi f\tau_1}}_{H(f)}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)e^{j2\pi f\tau_2}}_{H^*(f)}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau')e^{-j2\pi f\tau'}}_{S_X(f)}\,d\tau'\,d\tau_1\,d\tau_2 \qquad (6.11.3)
$$

$$
S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \qquad (6.11.4)
$$

Cápsula 6.12 Propiedades de procesos estocásticos gaussianos

1. Si un P.E.G. es aplicado a un filtro LIT, estable, entonces el P.E. observado en la salida también es P.E.G. (Justificación: Teorema límite del central).

2. Si un P.E.G. es ESA entonces el P.E. también es estacionario en el sentido amplio.

© 2010–2025 Christian Oberli