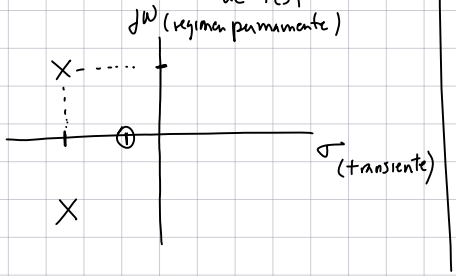
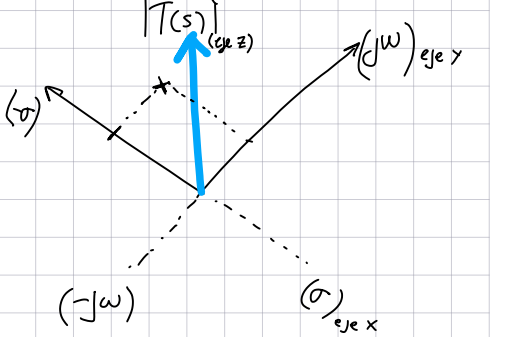
Otra forma de ver Bode

* Una función de transferencia puede ser vista de 2 formas:

2D (donde ponemos $X_{(polos)}$ y $O_{(ceros)}$ de $T(s)$)



3D (donde observamos el comportamiento de $|T(s)|$)



En el plano (σ jw) no tenemos información sobre la magnitud de $T(s)$ pero esa si la tenemos al considerar $|T(s)|$ como eje z en 3D:

* Polo => Magnitud se va a infinito
* Cero => Magnitud se va a 0

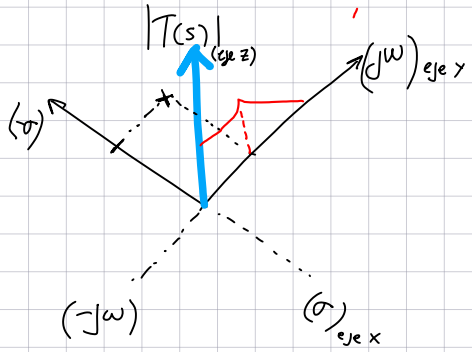
} ambas interactuan para dar forma a $|T(s)|$

* Polos y ceros interactuan deformando el espacio contenido por los ejes σ, jw y $|T(s)|$.

Cuando hacemos $s = jw$, en nuestro plano 3D es equivalente a analizar lo que ocurre con $|T(s)|$ contenida en el plano $|T(s)|$ y jw

↳ Curva de contorno de $|T(s)|$ contenida en el plano $|T(s)|$ y jw

Así:



En rojo es la porción de contorno de la superficie en el plano z, y

↳ Este contorno es la respuesta en frecuencia en régimen permanente de |T(s)|.

Si transformamos $|T(j\omega)|$ a dB

↳ $|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log(|T(j\omega)|)$

La curva de contorno sería el diagrama de bode de magnitud de $|T(s)|$

¿Porqué dB? → Variaciones de $|T(s)|$ se dan en varios ordenes de magnitud tanto en valor como en frecuencia

↳ gráfico Log-Log.

Ventajas: Representación Canonica de FT:

$$T(s) = K \cdot \frac{s^u \prod_{i=1}^{M} \left(1 - \frac{s}{z_i}\right)}{s^v \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{s}{p_i}\right)}$$

$s = j\omega$

$$T(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega)^u \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{j\omega}{z_i}\right)}{(j\omega)^v \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{j\omega}{p_i}\right)}$$

Usando notacion fasorial

$\rightarrow$ $X + jY = K \cdot e^{j\phi}$, $K = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$\phi = \text{Arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$

Podemos hacer algunas transformaciones en la expresion de $T(j\omega)$

$\Rightarrow$ $K = K \cdot e^{j0}$

$\Rightarrow$ $j\omega = \omega \cdot e^{j\pi/2}$ $\longrightarrow$ funcion de ω

$\Rightarrow$ $1 - \frac{j\omega}{z_i} \longrightarrow Z_i(\omega) \cdot e^{j\phi_{z_i}(\omega)} \rightarrow$ } magnitud $f(\omega)$, fase $f(\omega)$

$\Rightarrow$ $1 - \frac{j\omega}{p_i} \longrightarrow P_i(\omega) \cdot e^{j\phi_{p_i}(\omega)} \rightarrow$ }

Esto se traduce:

$$T(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega)^v \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{j\omega}{z_i}\right)}{(j\omega)^w \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{j\omega}{p_i}\right)} = \left(K \cdot e^{j0}\right) \frac{\left(\omega \cdot e^{j\pi/2}\right)^v \prod_{i=1}^{M} Z_i(\omega) \cdot e^{j\phi_{z_i}}}{\left(\omega\, e^{j\pi/2}\right)^w \prod_{i=1}^{N} P_i(\omega)\, e^{j\phi_{p_i}}}$$

Si bien la ecuacion se ve my fea, notemos lo siguiente:

$$|T(j\omega)| = K \cdot \frac{\omega^u \cdot \prod_{i=1}^{M} Z_i(\omega)}{\omega^v \prod_{i=1}^{N} P_i(\omega)} = K \cdot \omega^{u-v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M} Z_i(\omega)}{\prod_{i=1}^{N} P_i(\omega)}$$

$$\measuredangle T(j\omega) = u \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{M} \phi_{Z_i}(\omega) - \left(v \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{N} \phi_{P_i}(\omega) \right)$$

Y claramente calcular el logaritmo del producto para calcular la magnitud en dB transforma la ecuacion para $|T(j\omega)|$ en una sumatoria sencilla.

Usemos esta generalizacion para ver los casos de clases:

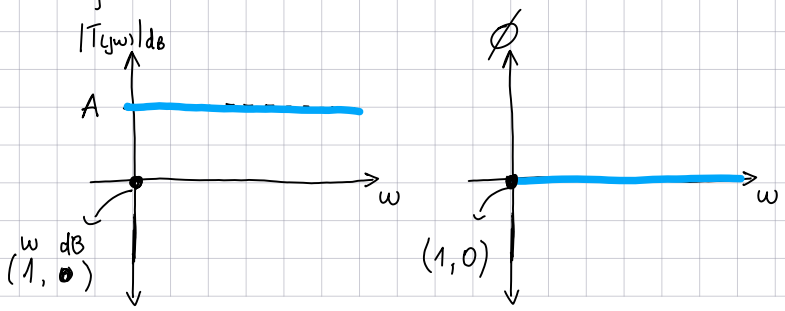
Orden 0 $\Rightarrow$ Ganancia estatica

① $T(s) = K \overset{s=j\omega}{\Longrightarrow} \boxed{T(j\omega) = K = K \cdot e^{j0}}$

$|T(j\omega)| = K \Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) = A$

$\phi = 0°$

Digrama de Bode

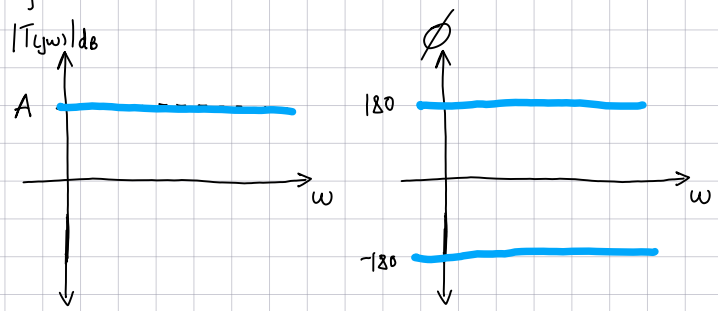


② $T(s) = -K \xrightarrow{s=j\omega} \boxed{T(j\omega) = k = k \cdot e^{j\pi} = k\,e^{j(-\pi)}}$

$|T(j\omega)| = k \Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20\log(k) = A$

$\phi = \pm\pi = \pm 180°$

Digrama de Bode



* Criterio: ¿ +180 o −180?

Para $-K$, usamos $-180°$

Como lo dice el profe Ángel

Orden 1 - Polo en el origen

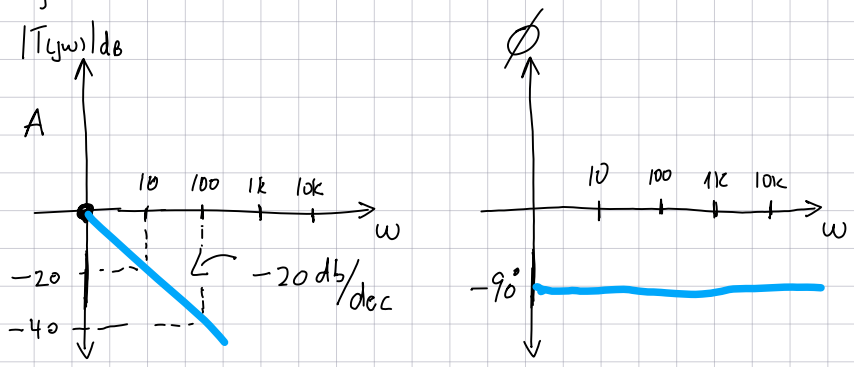
$$T(s) = \frac{1}{s} \overset{s=j\omega}{\Longrightarrow} T(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega}(-j) = \frac{1}{\omega} \cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

* $$|T(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \overset{dB}{\Longrightarrow} |T(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$|T(j\omega)|_{dB} = -20\log(\omega)$$

* $$\phi = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

Digrama de Bode



Orden 1 - Cero en el Origen

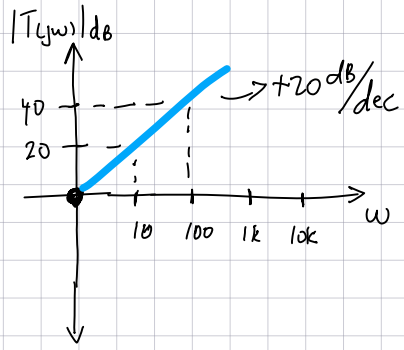
$$T(s) = s \overset{s=j\omega}{\Longrightarrow} T(j\omega) = j\omega = \omega \cdot j = \omega \cdot e^{j\pi/2}$$

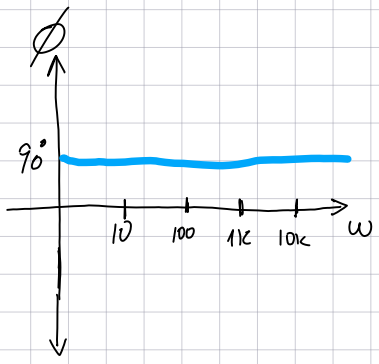
* $|T(j\omega)| = \omega \overset{dB}{\Longrightarrow} |T(j\omega)|_{dB} = 20\log(\omega)$

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20\log(\omega)$$

* $$\phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Diagrama de Bode





Orden 1 - Polo Real

$$T(s) = \frac{1}{1+sT} \overset{s=j\omega}{\Longrightarrow} T(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

Desarrollando un poco:

$$1 \longrightarrow \begin{cases} \text{Magnitud} = 1 \\ \text{fase} = 0° \end{cases}$$

$$1 + j\omega T \longrightarrow \begin{cases} \text{Magnitud} = \sqrt{1^2 + (\omega T)^2} \\ \text{Fase} = \text{Arctg}(\omega T) \end{cases}$$

Así:

$$T(j\omega) = \frac{1 \cdot e^{j0}}{\sqrt{1+(\omega T)^2} \cdot e^{j\,\text{Arctg}(\omega T)}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{T(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \cdot e^{j(-\text{Arctg}(\omega T))}}$$

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\right)$$

$$\boxed{|T(j\omega)|_{dB} = -20\log\left(\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\right)}$$

Aquí no es tan fácil graficar, por lo que tenemos que analizar casos:

$$|T(j\omega)| \begin{cases} \text{tiende } \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 & \omega << 1/\tau \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 & \omega = 1/\tau \\ \text{tiende } \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\omega\tau} \approx 0 & \omega >> 1/\tau \end{cases}$$

$\Downarrow$ en dB

$$|T(j\omega)|_{dB} \begin{cases} \text{tiende } 0\ dB & \omega << 1/\tau \\ = -3\ dB & \omega = 1/\tau \\ \text{tiende } -\infty\ dB & \omega >> 1/\tau \end{cases}$$

$\hookrightarrow -20\log(\omega\tau)$

pendiente -20 dB/dec

$$\phi = -Arctg(\omega\tau)$$

Se ve feo, por lo que tenemos que analizar casos, como se hizo en magnitud.

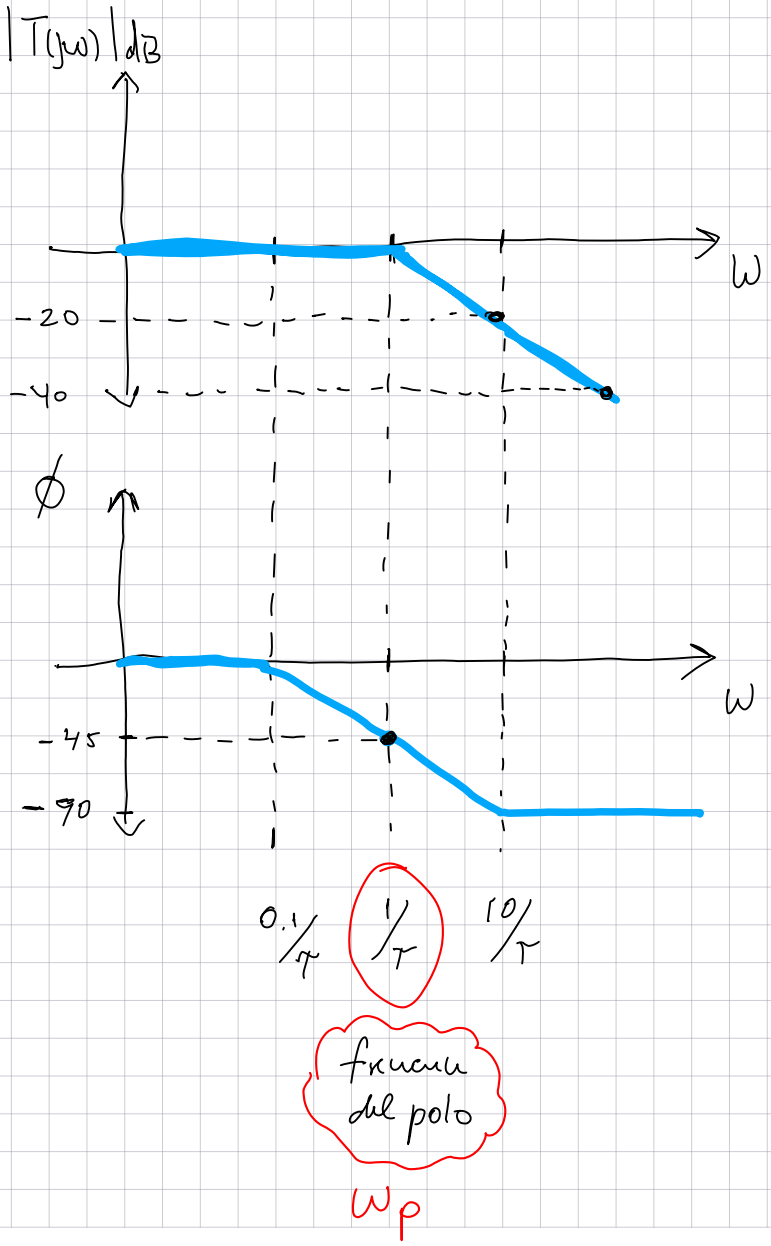
$\Rightarrow$ En fase los extremos de analisis corresponden a: $0{,}1\,\omega_p$, ω_p, $10\,\omega_p$

con ω_p es la frecuencia del Polo.

$$\phi \begin{cases} -Arctg(\omega\tau) \xrightarrow{\text{tiende}} 0 & \omega\cdot\tau \ll 0.1 \\ -Arctg(\omega\tau) \simeq -\pi/4 & \omega\tau = 1 \\ -Arctg(\omega\tau) \xrightarrow{\text{tiende}} -\pi/2 & \omega\tau \gg 10 \end{cases}$$

El analisis de magnitud y fase nos da la información de asíntotas en fase y magnitud

Diagrama de Bode



Orden 1 – Ceros Reales

$$T(s) = 1 + s\tau \overset{s=j\omega}{\Longrightarrow} T(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

Desarrollando un poco:

$$1 + j\omega\tau \longrightarrow \begin{cases} \text{Magnitud} = \sqrt{1^2 + (\omega\tau)^2} \\ \text{Fase} = \text{Arctg}(\omega\tau) \end{cases}$$

Así:

$$T(j\omega) = \sqrt{1+(\omega T)^2} \cdot e^{j\,\text{Arctg}(\omega\tau)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{|T(j\omega)| = \sqrt{1+(\omega\tau)^2} \;/\; |T(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\right)}$$

$$\boxed{\phi = \text{Arctg}(\omega\tau)}$$

Y podemos hacer el mismo análisis previo.

$|T(j\omega)|$

- tiende $\sqrt{1+0} = 1$ — $\omega \ll 1/\tau$
- $= \sqrt{2} \approx 1.41$ — $\omega = 1/\tau$
- tiende $\sqrt{(\omega\tau)^2} = \omega\tau \approx \infty$ — $\omega \gg 1/\tau$

en dB

$|T(j\omega)|_{dB}$

- tiende 0 dB — $\omega \ll 1/\tau$
- $= 3$ dB — $\omega = 1/\tau$
- tiende ∞ dB — $\omega \gg 1/\tau$

($[20 \log(\omega\tau)]$ → pendiente 20 dB/dec

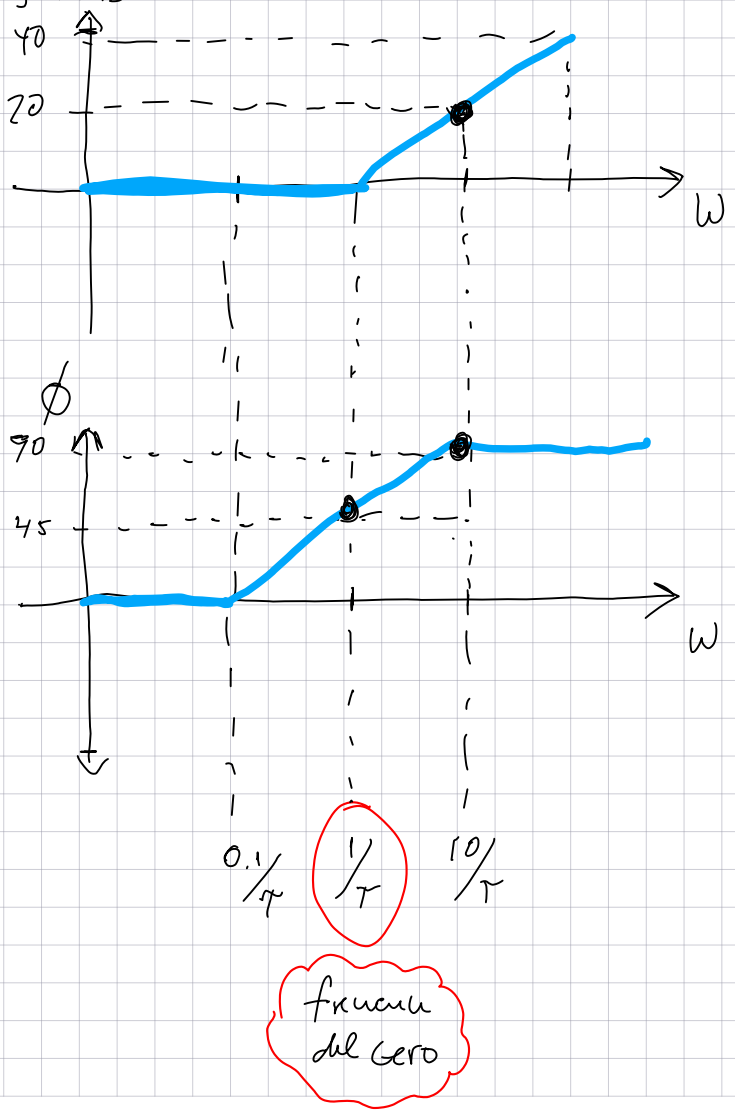
ϕ

- $\text{Arctg}(\omega\tau) \xrightarrow{\text{tiende}} 0$ — $\omega \cdot \tau \ll 0.1$
- $\text{Arctg}(\omega\tau) \simeq \pi/4$ — $\omega\tau = 1$
- $\text{Arctg}(\omega\tau) \xrightarrow{\text{tiende}} \pi/2$ — $\omega\tau \gg 10$

Luego el diagrama de bode es:

Diagrama de Bode

- $|T(j\omega)|_{dB}$



Orden 2 - Polos complejos Conj

Consideremos una función de transferencia como la siguiente:

$$T(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{s\eta}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

* Cual fue ecuación de 2° orden puede ser escrita como la anterior
  - Manipulación matemática

Determinamos $T(j\omega)$

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\frac{j\omega\eta}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Luego construimos una variable de normalización de frecuencia u:

$$u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Interpretación de ω_n y η (asumiendo polos estables)

Los polos de este sistema están en:

$$s = -\eta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\eta^2 - 1}$$

↳ ω_n es la frecuencia natural a la que oscilaría el sistema a una excitación en la entrada cuando $\eta = 0$

↳ η tiene un efecto amortiguador que produce una exponencial estable tanto en crecimiento como en decrecimiento



(Amortigua la exponencial)

Luego $T(u)$, considerando $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$\Rightarrow \boxed{T(u) = \frac{1}{1 + 2j\eta u - u^2}}$$

Ahora podemos hacer el mismo analisis anterior

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\eta u)^2}} e^{j\left(-\text{Arctg}\left(\frac{2\eta u}{1-u^2}\right)\right)}$$

$$\hookrightarrow |T(u)| = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\eta u)^2}}$$

$$|T(u)|_{dB} = -20 \log\left(\sqrt{(1-u)^2 + (2\eta u)^2}\right)$$

$$\phi = -\text{Arctg}\left(\frac{2\eta u}{1-u^2}\right)$$

Procedemos a analizar las asíntotas

$|T(u)|$ en dB:

- tiende $\frac{1}{\sqrt{1^2+0}} = 1$, $u \ll 1$ $(w \ll w_n)$
- $= \frac{1}{2\gamma u}$ $u \approx 1$ $(w \approx w_n)$
- tiende $\frac{1}{u^2}$ $u \gg 1$ $(w \gg w_n)$

$|T(jw)|_{dB}$

- tiende 0 dB $u \ll 1$
- $= -20 \log(2\gamma u)$ $u \approx 1$
- tiende $-\infty$ $u \gg 1$

$(-40 \log(u))$

↑ pendiente -40 dB/dec

Notemos que cuando $w \approx w_n$ dependemos de γ

Y en fase:

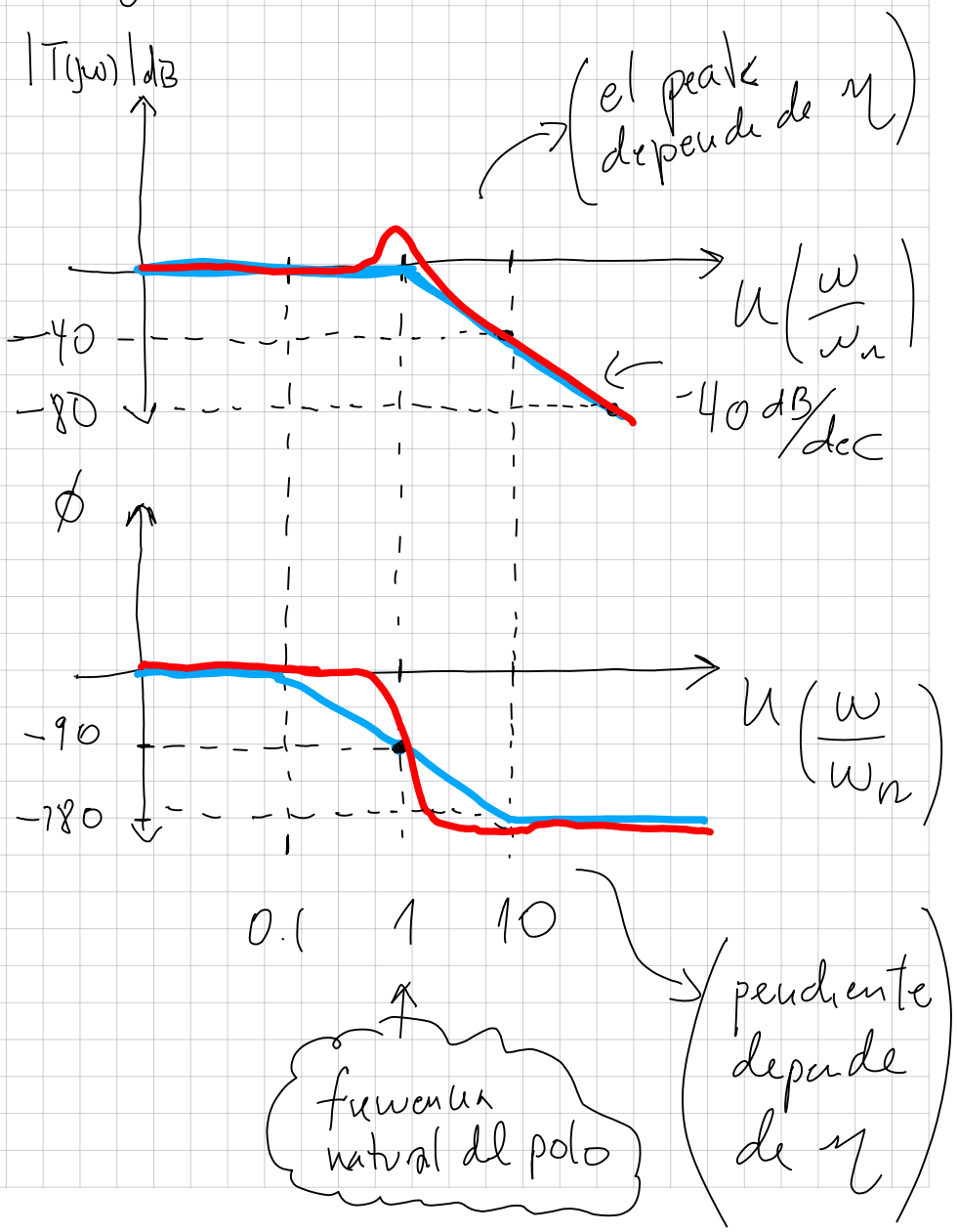
$$\phi = \begin{cases} -\text{Arctg}\left(\frac{2\gamma u}{1-u^2}\right) \\ \text{tiende} \to 0 \end{cases} \qquad u \ll 0.1 \quad (w \ll 0.1 w_n)$$

$$\begin{cases} -\text{Arctg}\left(\frac{2\gamma u}{1-u^2}\right) \\ \text{tiende} \to -\frac{\pi}{2} \; (-90^\circ) \end{cases} \qquad u \approx 1 \quad (w \approx w_n)$$

$$\begin{cases} -\text{Arctg}\left(\frac{2\gamma u}{1-u^2}\right) \\ \text{tiende a } -\pi \quad (-180^\circ) \end{cases} \qquad u \gg 10 \quad (w \gg 10 w_n)$$

Luego podemos hacer el diagrama de Bode.

Diagrama de Bode



* Para Y creciente desde 0
  - El peak se hace menos pronunciado al punto de desaparecer
  - El peak se aleja de W_a
  - La pendiente se hace menos empinada para la transición de fase.

* Para Y tendiente a 0
  - El peak tiende a infinito y se centra en W_a
  - La pendiente se hace más empinada para la transición de fase

→ Con lo hecho antes, haga el Bode para ceros complejos conjugados.

→ ¿Como hago para un bode multi polos y multiceros?

Como hacemos fasores, los productos y divisiones pasan a ser sumas y restas en logaritmos. Por lo que podemos sumar las contribuciones de cada polo y cero facilmente.

Si no me cree, le dejo un link con ejercicios resueltos

https://lpsa.swarthmore.edu/Bode/BodeExamples.html

↳ Uso educacional gratuito!